Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Torsdag 22 aug 2013, kl 14.00-18.00 i "V"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Tisdag 3 sep 2013, kl 11.30-13.00 i 7112B, översta våningen i norra flygeln av Origobyggnaden.

1. Grafit är en kristall av grundämnet kol där atomerna bildar plana skikt med hexagonstruktur. För grafit gäller att dess värmekapacitivitet vid konstant tryck kan beskrivas med hjälp av uttrycket

$$C_P(T) = a + b\,T - \frac{c}{T^2}$$

över ett ganska stort temperaturintervall, där a = 16.86 J/K·mol, b = $4.77 \cdot 10^{-3}$ J/K^2·mol och c = $8.54 \cdot 10^5$ J·K/mol. Antag att 10 g grafit värms upp från 25 °C till 1000 °C vid konstant tryck. Beräkna tillfört värme samt ändringen av entropin för grafitstycket.

2. Som motor i ett höghastighetsborr används en liten turbin, som drivs av komprimerad luft. Luften kommer in i turbinen med trycket 500 kPa och temperaturen 30°C. När luften lämnar turbinen har dess tryck sjunkit till 180 kPa. Beräkna det uträttade arbetet per mol luft! Luftens expansion får antas ske reversibelt och adiabatiskt. Bidraget från luftens strömningshastighet vid inloppet och vid utloppet får försummas. Vidare så får luften behandlas som en tvåatomig idealgas med konstant värmekapacitet och nödvändiga data kan tas från Physics Handbook. Motivera kort de uttryck du använder.

3. Industriell framställning av ammoniak direkt från kvävgas och vätgas

$$\mathrm{N_2}(g) + 3\,\mathrm{H_2}(g) \rightleftharpoons 2\,\mathrm{NH_3}(g)$$

sker vid höga tryck och temperaturer i närvaro av en katalysator. Antag från början en gasblanding med en del kvävgas och tre delar vätgas. Temperaturen höjs till 500 °C och jämvikt ställer in sig vid trycket 400 bar. Bestäm andelen kväveatomer som har bildat ammoniak vid jämvikt! Gaserna får behandlas som ideala gaser. Vid jämvikt gäller för partialtrycken P_{NH_3}, P_{N_2} och P_{H_2} att

$$\frac{(P_{NH_3}/P^o)^2}{(P_{N_2}/P^o)(P_{H_2}/P^o)^3} = K(T)$$

där $K(T) = 6.9 \cdot 10^{-5}$ vid $500\,^{\circ}$C och P^o är det valda referenstrycket ($P^o = 1$ bar).

4. Betrakta ett paramagnetiskt material med N magnetiska partiklar. Det magnetiska momentet för en enskild partikel kan anta olika värden. Dessa beror på partikelns totala rörelsemängdsmoment J som alltid är en multipel av $1/2$. De tillåtna värdena på z-komponenten av det magnetiska momentet ges av uttrycket

$$\mu_z = \Delta\mu\, m\ ; \qquad m = -J, -J+1, \ldots, J-1, J$$

där $\Delta\mu$ är en konstant. Antalet tillåtna värden är $2J{+}1$. I närvaro av ett magnetiskt fält B längs med z-axeln ges partikelns magnetiska energi av uttrycket

$$\epsilon_m = -\mu_z B$$

Antag att materialet är i termodynamisk jämvikt vid temperaturen T. Visa att dess medelmagnetisering $\bar{M}$ kan skrivas som

$$\bar{M} = N\,\bar{\mu}_z = NkT\frac{\partial \ln Z}{\partial B}$$

där Z är tillståndssumman och k Boltzmanns konstant. Bestäm systemets tillståndssumma och utnyttja detta för att härleda att

$$\bar{M} = N\Delta\mu\, B_J(\Delta\mu\, B/kT)$$

där

$$B_J(\eta) \equiv \left(J + \frac{1}{2}\right)\coth\left[\left(J + \frac{1}{2}\right)\eta\right] - \frac{1}{2}\coth\left[\frac{1}{2}\eta\right]$$

Visa därefter att då $kT \gg \Delta\mu\, B$ gäller för medelmagnetiseringen att

$$\bar{M} \propto \frac{B}{T}$$

Bestäm proportionalitetskonstanten!

5. En klar sommardag står solen 60° över horisonten. Dess strålar värmer en horisontell svart yta. Vilken är den högsta temperatur som ytan kan tänkas få? Den instrålade effekten från solen mot jorden är 1370 W/m^2.

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tenta i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Torsdagen den 22/8 2013

1. Den givna formeln för värmekapaciteten är

$$C_P(T) = a + bT - \frac{c}{T^2}$$

Där $a = 16.86$ J/K·mol, $b = 4.77 \cdot 10^{-3}$ J/K^2·mol och $c = 8.54 \cdot 10^5$ J·K/mol. Antalet mol n ges av $n = m/M$, där M är molmassan. Eftersom $m = 10$ g och $M = 12$ g/mol fås $n = 5/6$ mol. Den tillförda värmen ges av

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C_P(T)dT = n\left[a(T_2 - T_1) + \frac{b}{2}(T_2^2 - T_1^2) + c\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right]$$

och förändringen i entropin ges av

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_P(T)}{T}dT = n\left[a\ln\frac{T_2}{T_1} + b(T_2 - T_1) + c\left(\frac{1}{2T_2^2} - \frac{1}{2T_1^2}\right)\right]$$

Med $T_1 = 298.15$ K och $T_2 = 1273.15$ K fås

$$Q = 14916 \text{ J} = 15 \text{ kJ}\ , \Delta S = 20.5 \text{ J/K}$$

2. Då vi betraktar luften som en diatomär idealgas vet vi att $C_V = \frac{5}{2}nR$, $C_P = \frac{7}{2}nR$ och $\gamma = C_p/C_v = 1.4$. Eftersom luften expanderar reversibelt och adiabatiskt har vi sambandet

$$P^{1-\gamma}T^\gamma = konstant \ \rightarrow \ T_e = T_i\left(\frac{P_e}{P_i}\right)^{1-1/\gamma},$$

där P_i, T_i är tryck och temperatur innan turbinen och P_e, T_e är tryck och temperatur efter turbinen. Detta är en stationär flödesprocess, vilket innebär att om inget arbete uträttas måste entalpin hos luften som strömmar in (H_i) vara lika med entalpin hos luften som strömmar ut ur turbinen (H_e). Om turbinen dessutom uträttar ett arbete W_{ut} måste enligt första huvudsatsen:

$$H_i = W_{\text{ut}} + H_e.$$

Entalpin kan skrivas som $H = C_pT$ och vi får därför

$$W_{\text{ut}} = C_p(T_i - T_e)$$

Med $P_i = 500$ kPa, $T_i = 30$ °C och $P_e = 180$ kPa blir arbetet per mol:

$$W_{\text{ut}}/n = \frac{7}{2}RT_i\left(1 - \left[\frac{P_e}{P_i}\right]^{1-1/\gamma}\right) = 2.23 \text{ kJ/mol}$$

3. Vi har reaktionen

$$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$$

Antag att vi före reaktionen har en mol N_2 och tre mol H_2. Låt z vara den andel av kväveatomerna som bildar ammoniak under reaktionen. Då kommer vi efter reaktionen att ha $1-z$ mol N_2, $3-3z$ mol H_2 och $2z$ mol NH_3, totalt $4-2z$ mol molekyler. Vi har också att partialtrycken $P_{\mathrm{NH_3}}$, $P_{\mathrm{N_2}}$ och $P_{\mathrm{H_2}}$ vid jämvikt uppfyller

$$\frac{(P_{\mathrm{NH_3}}/P^0)^2}{(P_{\mathrm{N_2}}/P^0)(P_{\mathrm{H_2}}/P^0)^3} = K(T)$$

där P^0 referenstrycket (1 bar). Vi inför molbråk:

$$y_i = \frac{n_i}{n_{\mathrm{tot}}} = \frac{P_i}{P}$$

där n_i är antal mol av molekyl i, n_{tot} är totala antalet mol och P är det totala trycket. Vi får då

$$\begin{aligned}
\frac{y_{\mathrm{NH_3}}^2}{y_{\mathrm{N_2}} y_{\mathrm{H_2}}^3} &= \left(\frac{P}{P^0}\right)^2 K(T) \\
\frac{\left(\frac{2z}{4-2z}\right)^2}{\frac{1-z}{4-2z}\left(\frac{3-3z}{4-2z}\right)^3} &= \left(\frac{P}{P^0}\right)^2 K(T) \\
\frac{z^2(2-z)^2}{(1-z)^4} &= \frac{27}{16}\left(\frac{P}{P^0}\right)^2 K(T)
\end{aligned}$$

Detta ger

$$\begin{aligned}
\frac{z(2-z)}{(1-z)^2} &= \sqrt{\frac{27}{16}\left(\frac{P}{P^0}\right)^2 K(T)} = K' \\
2z - z^2 &= K'(1 - 2z + z^2) \\
z^2(1+K') - 2z(1+K') + K' &= 0 \\
z^2 - 2z + \frac{K'}{1+K'} &= 0 \\
z = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{K'}{1+K'}} &= 1 - \sqrt{\frac{1}{1+K'}}
\end{aligned}$$

där den ena lösningen kan ignoreras för att $0 < z < 1$. Med $K(T) = 6.9 \cdot 10^{-5}$ och $P = 400P^0$ fås då $z = 0.5663$. Alltså är andelen kväveatomer som bildat ammoniak vid jämvikt ca 57 %.

4. Vi har

$$Z = \sum_m e^{\beta \mu_z B}$$

där $\beta = 1/kT$. Det innebär att

$$kT\frac{\partial \ln Z}{\partial B} = kT\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial B} = kT\frac{1}{Z}\sum_m \beta\mu_z e^{\beta\mu_z B} = \frac{1}{Z}\sum_m \mu_z e^{\beta\mu_z B} = \bar{\mu_z}$$

Detta visar att

$$\bar{M} = N\bar{\mu_z} = NkT\frac{\partial \ln Z}{\partial B}$$

Man kan också skriva tillståndssumman som

$$Z = \sum_{m=-J}^{J} e^{\eta m} \qquad \eta = \frac{\Delta\mu B}{kT}$$

Detta kan också skrivas

$$Z = \sum_{m=J}^{-J} e^{\eta m} = e^{\eta J} + e^{\eta(J-1)} + ... + e^{-\eta J} = e^{\eta J}[1 + e^{-\eta} + e^{-2\eta} + ... + e^{-2J\eta}] =$$

$$e^{\eta J}\frac{1-e^{-(2J+1)\eta}}{1-e^{-\eta}} = \frac{e^{\eta J}-e^{-(J+1)\eta}}{1-e^{-\eta}} = \frac{e^{\eta(J+1/2)}-e^{-\eta(J+1/2)}}{e^{\eta/2}-e^{-\eta/2}} = \frac{\sinh[\eta(J+1/2)]}{\sinh[\eta/2]}$$

Man får då medelmagnetiseringen

$$\bar{M} = NkT\frac{\partial}{\partial B}\left[\ln\left(\sinh\left[\eta\left(J+\frac{1}{2}\right)\right]\right) - \ln\left(\sinh\left[\frac{\eta}{2}\right]\right)\right] =$$

$$N\Delta\mu\left[\frac{\cosh\left[\eta\left(J+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sinh\left[\eta\left(J+\frac{1}{2}\right)\right]}\left(J+\frac{1}{2}\right) - \frac{\cosh\frac{\eta}{2}}{\sinh\frac{\eta}{2}}\frac{1}{2}\right] =$$

$$N\Delta\mu B_J\left(\frac{\Delta\mu B}{kT}\right)$$

där

$$B_J(\eta) = \left[\left(J+\frac{1}{2}\right)\coth\left[\eta\left(J+\frac{1}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\coth\left[\frac{\eta}{2}\right]\right]$$

Vi studerar vad som händer då $\Delta\mu B << kT$, d.v.s. $\eta << 1$. Vi har

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Med $x << 1$ fås

$$\coth(x) = \frac{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ...\right) + \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + ...\right)}{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + ...\right) - \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + ...\right)} =$$

$$\frac{2 + x^2 + ...}{2x + \frac{1}{3}x^3 + ...} = \frac{1}{x}\left[\frac{1 + \frac{1}{2}x^2 + ...}{1 + \frac{1}{6}x^2 + ...}\right] =$$

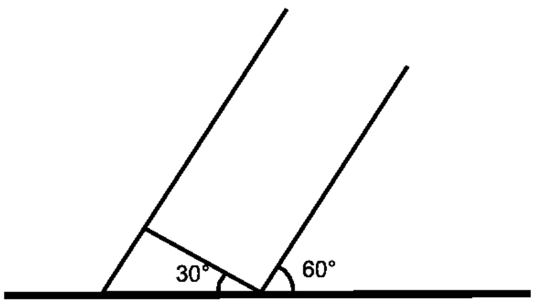
$$\frac{1}{x}\left[\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + ...\right)\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + ...\right)\right] = \frac{1}{x}\left[1 + \frac{x^2}{3} + ...\right]$$

Vi får alltså

$$a\coth(a\eta) \to \frac{1}{\eta} + \frac{a^2}{3}\eta$$

$$\Rightarrow \left(J+\frac{1}{2}\right)\coth\left[\left(J+\frac{1}{2}\right)\eta\right] - \frac{1}{2}\coth\left[\frac{\eta}{2}\right]$$

$$\to \frac{\eta}{3}\left[\left(J+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{\eta}{3}J(J+1)$$



Figur 1: Solstrålarnas vinkel mot ytan är 60 °

För medelmagnetiseringen fås därmed

$$\bar{M} = N\frac{(\Delta\mu)^2 J(J+1)}{3k}\frac{B}{T}$$

5. Antag att en yta som är placerad vinkelrätt mot solens strålar tar emot effekten P_{sol}. Eftersom vinkeln mellan den aktuella ytan och solstrålarna är 60° blir den instrålade effekten (se figur 1)

$$P_{\mathrm{in}} = P_{\mathrm{sol}} \cos 30°$$

Eftersom ytan är svart blir den utstrålade effekten $P_{\mathrm{ut}} = \sigma T^4$. Då ytan nått sin högsta temperatur och systemet alltså är i jämvikt måste $P_{\mathrm{in}} = P_{\mathrm{ut}}$ och man får

$$T = \left(\frac{P_{\mathrm{sol}} \times \cos 30°}{\sigma}\right)^{1/4}$$

Med $P_{\mathrm{sol}} = 1370$ W/m^2 och $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m^{2}K^4 fås då T=380 K=107 °C.