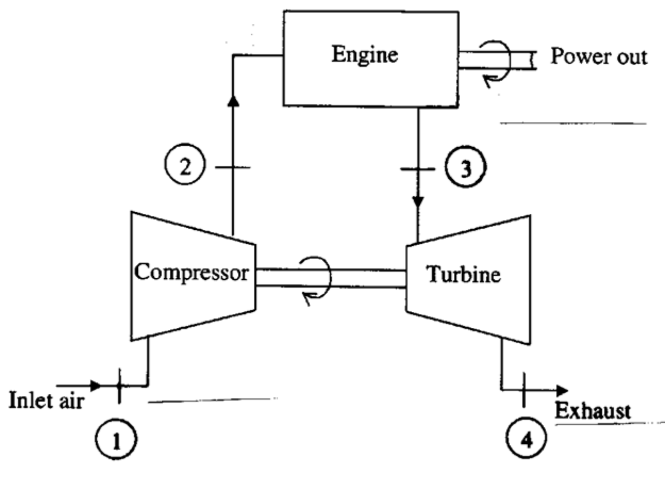
Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Onsdag 16 jan 2013, kl 14.00-18.00 i "M"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ett A4-blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Edit Helgee, tel. 772-8428, 073-5625271.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Fredag 25 jan 2013, kl 11:30-13.00 i S3031, 3:e våningen i byggnad Soliden.

1. Betrakta en varmluftsballong. Luften i ballongen värms upp och ballongen börjar stiga. Dess volym är då 2000 m^3 och den omgivande luftens temperatur och tryck är 5 °C respektive 100 kPa. Bestäm luftens temperatur inuti ballongen då den långsamt stiger uppåt! Ballongkorg med passagerare samt ballongens tyg väger tillsammans 500 kg.

2. Figuren visar principen för en turbo. Innan bränsleblandningen sprutas in i motorn komprimeras den i kompressorn, vilken drivs av en turbin som utnyttjar de varma avgaserna. Hur stort är trycket P_2 efter komprimeringen uttryckt i trycken P_1, P_3 och P_4 och temperaturerna T_1 och T_3?



Det får antas att kompressionen och expansionen i kompressorn respektive turbinen sker adiabatiskt (och kvasistatiskt). Bränsleblandningen får antas bestå av enbart luft, och den får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet. Ändringen i antal mol i förbränningen i motorn får försummas, liksom den ändliga strömningshastigheten. Gör en numerisk beräkning för P_1=P_4=100 kPa, P_3=180 kPa, T_1=20 °C, T_3=650 °C!

3. Processen då ett fast ämne övergår direkt till gasfas utan att först smälta kallas för sublimation. Vid denna process upptas energi, sublimationsentalpin L. För att bestämma L för vatten har man mätt upp ångtrycket som funktion av temperaturen enligt följande tabell

Temperatur (°C)	Ångtryck (mm Hg)
-19.6	0.806
-20.0	0.776
-20.4	0.747

Beräkna med hjälp av dessa data sublimationsentalpin för vatten vid -20 °C! Du får anta att vattenånga i jämvikt med is kan betraktas som en idealgas och att isens specifika volym (volym per massa) kan försummas jämfört med vattenångans.

4. För de flesta tvåatomiga molekyler gäller att elektronsystemet vid normala temperaturer befinner sig i sitt grundtillstånd och därför inte ger något bidrag till värmekapaciteten. Ett undantag är NO-molekylen, för vilken det första exciterade elektrontillståndet ligger endast 15 meV över grundtillståndet.

   Bestäm elektronbidraget till värmekapaciteten som funktion av temperaturen samt beräkna dess värde dels vid temperaturen 150 K, dels vid temperaturen 300 K! Ange temperaturberoendet för det elektroniska bidraget till värmekapaciteten för låga respektive höga temperaturer! Det får förutsättas att övriga energinivåer för elektronsystemet ligger så högt i energi att de saknar betydelse i detta sammanhang.

5. När en tung stjärna exploderar som en supernova kan det bildas exotiska himlakroppar som neutronstjärnor och svarta hål. En neutronstjärna består huvudsakligen av neutroner och den stabiliseras av en balans mellan den attraktiva gravitationskraften och neutronernas degenerationstryck.

   Betrakta en sfärisk neutronstjärna med massan M. Antag att den består av enbart neutroner. Neutroner är fermioner med spinn 1/2. Behandla neutronsystemet som en degenererad Fermigas. Antag vidare att dess massa är uniformt fördelad med den konstanta masstätheten ρ. Då gäller att gravitationsenergin ges av uttrycket

$$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

där R är stjärnans radie. Antag att neutronerna kan behandlas icke-relativistiskt och bestäm ett uttryck för kinetiska energin baserat på antagandet om en degenererad Fermigas. Härled därefter ett uttryck för neutronstjärnans jämviktsradie som funktion av dess massan M! Vad händer med jämviktsradien om massan ökar?

Studera nu en neutronstjärna med massan $M{=}1.4M_\odot$, där $M_\odot$ är solens massa. Bestäm stjärnans jämviktsradie och dess täthet! Beräkna systemets Fermitemperatur! En typisk neutronstjärna har temperaturen 10^6 K. Är antagandet om en degenererad Fermigas välmotiverat?

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tenta i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Onsdagen den 16/1 2013

1. Molmassan för luft är

$$M_{\text{luft}} = \frac{1}{5} \cdot 32 + \frac{4}{5} \cdot 28 = 28.8\text{g/mol}$$

Den luft som trängs undan av ballongen har massan

$$m_0 = M_{\text{luft}} \frac{P_0 V}{R T_0}$$

Där $R = 8.315$ J/mol·K är allmänna gaskonstanten. Massan av luften i ballongen är då

$$m = M_{\text{luft}} \frac{P_0 V}{R T}$$

Då ballongen stiger långsamt kan vi anta att gravitationen och lyftkraften balanserar varandra, så att

$$m_0 g = mg + Mg$$

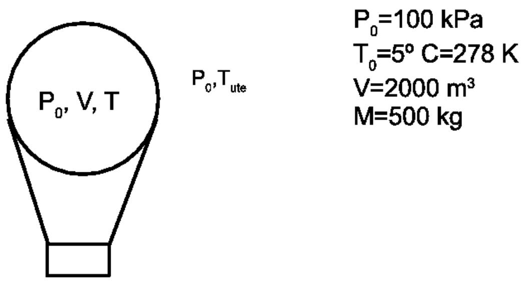
Vilket ger

$$\frac{M_{\text{luft}} P_0 V}{R} \frac{1}{T_0} = \frac{M_{\text{luft}} P_0 V}{R} \frac{1}{T} + M$$

Som leder till

$$T = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{MR}{M_{\text{luft}} P_0 V} \right)^{-1} = 348 \text{ K}$$

Vilket ger svaret 75 °C



2. För kompressorn gäller att arbetet på gasen är $w_c = H_2 - H_1$, där $H_{1,2}$ är entalpin vid punkterna 1 och 2. Eftersom processen är adiabatisk gäller också att

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

På samma sätt gäller för turbinen

$$H_3 - H_4 = w_t$$
$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

där w_t är arbetet som utförs av gasen. Eftersom kompressorn drivs av turbinen får vi

$$w_c = w_t \;\Rightarrow H_2 - H_1 = H_3 - H_4$$

Och då $H = C_p T$ fås

$$T_2 - T_1 = T_3 - T_4$$

Om man sätter samman de ovanstående uttrycken fås

$$T_2 - T_1 = T_3\left(1 - \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$
$$T_1\left(\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right) = T_3\left(1 - \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)$$

vilket ger

$$P_2 = P_1\left[1 + \frac{T_3}{T_1}\left(1 - \left(\frac{P_4}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Med $P_1 = P_4 = 100$ kPa, $P_3 = 180$ kPa, $T_1 = 293$ K, $T_3 = 923$ K och $\gamma = 1.4$ fås $P_2 = 400.9$ kPa.

3. Vi börjar med Clausius-Clapeyrons ekvation

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta V}$$

Eftersom vi kan försumma isens volym blir $\Delta V = V_{gas} = RT/P$ för en mol. Vi får då

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{R}\frac{P}{T^2}$$
$$\frac{dP}{P} = \frac{L}{R}\frac{dT}{T^2}$$
$$\ln(P) = -\frac{L}{R}\frac{1}{T} + konstant$$

Med data från Tabell 1 får vi då att

$$\frac{L}{R} = \frac{0.2917 - 0.2157}{3.9565 - 3.9440} \cdot 10^3 = 6.080 \cdot 10^3 \text{ K}$$

Med R=8.315 J/mol·K ger detta L=50.6 kJ/mol

Tabell 1:

T (°C)	$1/T$ (K^{-1}	P (mm Hg)	ln(P)
-19.6	$3.9440 \cdot 10^{-3}$	0.806	-0.2157
-20.0	$3.9502 \cdot 10^{-3}$	0.776	-0.2536
-20.4	$3.9565 \cdot 10^{-3}$	0.747	-0.2917

4. Systemet i uppgiften är ett tvånivåsystem där nivåerna har energierna 0 och $\epsilon = 15$ meV. Fördelningsfunktionen blir då

$$Z = 1 + e^{-\beta\epsilon}$$

($\beta = 1/kT$). Energin är

$$U = \frac{1}{Z}\epsilon e^{-\beta\epsilon} = \frac{\epsilon}{1 + e^{\beta\epsilon}}$$

För att få värmekapaciteten deriverar vi med avseende på T

$$C = \frac{dU}{dT} = -\frac{1}{kT^2}\frac{dU}{d\beta}$$

$$= k\left(\frac{\epsilon}{kT}\right)^2 \frac{e^{\beta\epsilon}}{(1 + e^{\beta\epsilon})^2} = k\ f(x)$$

där

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{(1 + e^x)^2} = \frac{x^2 e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$$

och $x = \beta\epsilon = \frac{\epsilon}{kT}$.

$T \rightarrow 0$ ger

$$f(x) \rightarrow x^2 e^{-x} = \left(\frac{\epsilon}{kT}\right)^2 e^{-\epsilon/kT}$$

och $T \rightarrow \infty$ ger

$$f(x) \rightarrow \frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{\epsilon}{2kT}\right)^2$$

Vid 150 K är $x = 1.16$, vilket ger $f(x) = 0.244$ och $C = 0.244k$. Vid 300 K är $x = 0.58$, vilket ger $f(x) = 0.077$ och $C = 0.077k$.

5. Vi har gravitationsenergin

$$U_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

där M är massan. Den totala kinetiska energin för en Fermigas är

$$U_{kin} = \frac{3}{5}N\epsilon_{\mathrm{F}}, \qquad \epsilon_{\mathrm{F}} = \frac{h^2}{8m_n}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$$

Antalet neutroner är $N = M/m_n$, där $m_n = 1.67 \cdot 10^{-27}$ är neutronmassan. Volymen ges av $V = 4\pi R^3/3$ vilket leder till

$$U_{kin} = \frac{3}{40}\left(\frac{3}{2\pi}\right)^{4/3}\frac{h^2}{m_n}\left(\frac{M}{m_n}\right)^{5/3}\frac{1}{R^2}$$

För att hitta jämviktsradien minimerar vi totalenergin $U_{tot} = U_g + U_{kin}$ vilket ger

$$R_{min} = \frac{h^2}{4G} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{4/3} \frac{1}{m_n^{8/3}} \frac{1}{M^{1/3}} \tag{1}$$

Om massan ökar minskar alltså jämviktsradien

Med $M = 1.4 M_\odot$ ($M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg) fås $R_{min} = 11.1$ km och tätheten $\rho = 4.86 \cdot 10^{17}$ kg/m^3. Fermitemperaturen ges av

$$\begin{aligned} T_\mathrm{F} = \frac{\epsilon_\mathrm{F}}{k} &= \frac{1}{k} \frac{h^2}{8 m_n} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} \\ = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} & \frac{h^2}{8k} \frac{1}{m_n^{5/3}} \rho^{2/3} = 1.01 \cdot 10^{12} \text{ K} \end{aligned}$$

Eftersom $T_\mathrm{F} >> T = 1 \cdot 10^6$ är det rimligt att anta att neutronsystemet är degenererat.