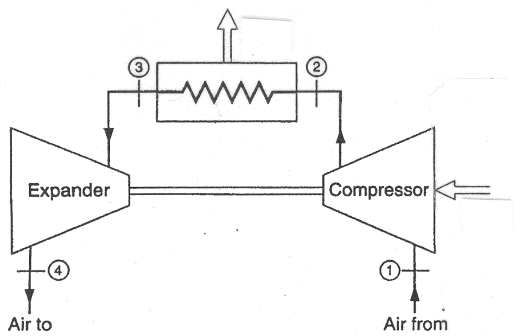
Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Måndag 9 jan 2012, kl 8.30-12.30 i ”Väg och vatten”-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, ”Sammanfattning av kursen FTF140 Termodynamik för F3” (utdelat), Chalmersgodkänd räknare.
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Onsdag 25 jan 2012, kl 12:15-13.00 i S3031, 3:e våningen i byggnad Soliden.

1. Man önskar kyla ned en viss mängd heliumgas. Gasen är placerad i en cylinder vars volym kan regleras med en friktionsfri kolv. Från början har gasen trycket 100 kPa och temperaturen 18 °C. Den komprimeras därefter till trycket 800 kPa vid konstant temperatur och sedan låter man den expandera adiabatiskt tillbaks till begynnelsetrycket 100 kPa. Båda processerna får antas ske kvasistatiskt och heliumgasen får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet. (a) Beräkna sluttemperaturen! (b) Skulle sluttemperaturen blivit högre eller lägre om gasen hade varit syre i stället för helium?

2. Två identiska kroppar har från början temperaturen 100 °C och befinner sig i en omgivning som håller den konstanta temperaturen 20 °C. Med hjälp av värmemotorer och värmepumpar kan man värma upp den ena kroppen ytterligare samtidigt som den andra kroppen avkyls. Vilken är den högsta temperatur som den kropp som värms upp kan uppnå, om inget arbete tillförs utifrån? De två kropparnas värmekapacitet får antas vara konstanta och lika stora och omgivningens temperatur är hela tiden 20 °C.



3. Figuren illustrerar en vanlig princip för luftkonditionering i flygplan. Kall uteluft komprimeras adiabatiskt i en kompressor och därefter avger luften värme vid konstant tryck. Slutligen expanderar den adiabatiskt genom en rotor (”Expander”), som dessutom hjälper till att

driva kompressorn. Luften kan behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet och kompressionen och expansionen kan antas ske kvasistatiskt. Antag att uteluften har temperaturen -35 °C och trycket 30 kPa, att den i kompressorn komprimeras till trycket 200 kPa och att den när den kommer in i kabinen har temperaturen 18 °C och trycket 100 kPa. Bestäm det nettoarbete per kilogram luft som krävs för att driva luftkonditioneringsapparaten!

4. För fasta *oordnade* material har man funnit ett linjärt temperaturbidrag till värmekapaciteten vid låga temperaturer. Detta gäller *även* för isolatorer. Den gängse förklaringen till detta fenomen är att vissa atomer, eller grupper av atomer, i materialet rör sig mellan två närliggande potentialminima med en viss energiskillnad ϵ. Varje sådan atom, eller grupp av atomer, kan därför approximeras med ett tvånivåsystem med energiskillnaden ϵ. Oordningen medför dock att storleken av energiskillnaden ϵ varierar slumpmässigt för de olika tvånivåsystemen. Antag att sannolikheten att finna ett tvånivåsystem med energiskillnaden ϵ ges av fördelningsfunktion

$$\rho(\epsilon) = \begin{cases} 1/\epsilon_0 & \text{om} - \epsilon_0/2 < \epsilon < \epsilon_0/2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

där ϵ_0 är en systemberoende parameter. Visa att detta leder till ett linjärt temperaturberoende om $kT \ll \epsilon_0$!
Ledning: Beräkna först värmekapaciteten $C_V(\epsilon)$ för ett diskret tvånivåsystem med en given energiskillnad ϵ. Teckna därefter medelvärdet av $C_V(\epsilon)$ med hjälp av ovanstående fördelningsfunktion $\rho(\epsilon)$ och visa att av detta följer att värmekapaciteten blir proportionell mot temperaturen om $kT \ll \epsilon_0$.

5. Neutrinon är en elementarpartikel som saknar elektrisk laddning. Den har halvtaligt spinn och är därför en fermion. Man har länge trott att den är masslös och färdas med ljusets hastighet. Numera är man dock inte lika säker på att den har vilomassan noll och i september förra året rönte det stor uppmärksamhet när ett antal forskare dessutom hävdade att neutrinon kunde färdas fortare än ljuset. Vi ska här dock anta att neutrinon är masslös och rör sig med ljusets hastighet. Den skiljer sig dock från fotonen i åtminstone tre avseenden: i) Den har spinnet s=1/2 vilket betyder att den är en fermion istället för en boson. ii) Antalet neutriner i ett slutet system är konstant (om vi bortser från möjligheten till reaktioner med andra elementarpartiklar). För fotoner gäller att antalet varierar med temperaturen. iii) En neutrino har bara en inre frihetsgrad associerad med spinnet, fotonen har två. Betrakta nu ett system bestående av N neutriner i en behållare med volymen V vid temperaturen T. Bestäm systemets medelenergi (a) i gränsen T $\to 0$, och (b) i gränsen T $\to \infty$!

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tenta i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Måndagen den 9/1 2012

1. För den adiabatiska processen har vi att

$$
\begin{aligned}
T_i &= 18°\text{C} = 291.15 \text{ K} \\
P_i &= 800 \text{ kPa} \\
P_f &= 100 \text{ kPa}
\end{aligned}
$$

Där T_i är starttemperaturen, P_i starttrycket och P_f sluttrycket. Vi söker sluttemperaturen T_f. I en adiabatisk process är

$$PV^{\gamma} = konstant$$

vilket ger att

$$P^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} T = konstant$$

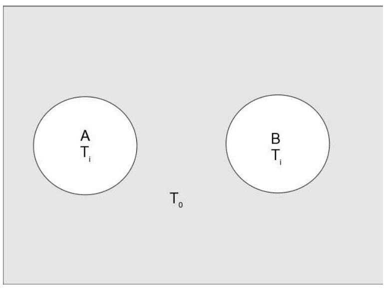
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{2}{f+2}$$

Detta ger att

$$T_f = T_i \left(\frac{P_i}{P_f}\right)^{-\frac{2}{f+2}}$$

För helium är $f = 3$ och vi får $T_f = -146°$ C. För syrgas är $f > 3$ och temperaturen blir högre.

2. Vi har att $T_i = 100°$ C, $T_0 = 20°$ C och vi söker sluttemperaturen T_f för kropp B. Denna kommer att vara som störst då temperaturen hos kropp A sjunkit till T_0.



A ger ifrån sig värmen

$$Q_A = C(T_i - T_0)$$

B tar upp värmen

$$Q_B = C(T_f - T_i)$$

där C är värmekapaciteten. Den värme som avges till omgivningen är då

$$Q_0 = Q_A - Q_B$$

Entropiförändringar:

$$\Delta S_A = \int_{T_i}^{T_0} \frac{C\ dT}{T} = C \ln \frac{T_0}{T_i}$$
$$\Delta S_B = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C\ dT}{T} = C \ln \frac{T_f}{T_i}$$
$$\Delta S_0 = \frac{Q_0}{T_0} = C \frac{2T_i - T_0 - T_f}{T_0}$$

Maximal sluttemperatur erhålls då $\Delta S_{tot} = 0$, dvs

$$\ln \frac{T_0}{T_i} + \ln \frac{T_f}{T_i} + \frac{2T_i - T_0 - T_f}{T_0} = 0$$

$$T_f = 2T_i + T_0 \left[\ln \frac{T_0 T_f}{T_i^2} - 1 \right]$$

Numerisk iterering ger $T_f = 137°$ C.

3.

$$\begin{aligned} P_1 &= 30 \text{ kPa} \quad T_i = -35° \text{ C} = 238.15 \text{ K} \\ P_2 &= 200 \text{ kPa} \\ P_3 &= P_2 \\ P_4 &= 100 \text{ kPa} \quad T_4 = 18° \text{ C} = 291.15 \text{ K} \end{aligned}$$

Stegen mellan 1 och 2 samt mellan 3 och 4 är adiabatiska processer, vilket innebär att vi har

$$P^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} T = konstant$$

där γ för en diatomär ideal gas är 1.4. Vi får

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 409.5 \text{ K}$$
$$T_3 = T_4 \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 354.9 \text{ K}$$

Arbetet för delprocesserna kompression och expansion blir då

$$w_{comp} = c_p(T_2 - T_1)$$
$$w_{exp} = c_p(T_3 - T_4)$$

Använder vi $c_p = 1.01$ kJ/kg får vi $w_{tot} = w_{comp} - w_{exp} = 109$ kJ/kg.

4. Vi börjar med att beräkna värmekapaciteten för ett tvånivåsystem med energiskillnad ϵ. Eftersom värmekapaciteten inte beror på nollnivåenergin, sätter vi ena tillståndets energi till 0 och andra tillståndets till ϵ. Detta ger tillståndssumman

$$Z(\epsilon) = 1 + e^{-\beta\epsilon},$$

vilket ger medelenergin

$$\bar{E}(\epsilon) = -\frac{\partial \ln Z(\epsilon)}{\partial \beta} = \frac{\epsilon}{1+e^{\beta\epsilon}},$$

vilket ger värmekapaciteten

$$c_v(\epsilon) = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T}\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = k\beta^2 \frac{\epsilon^2 e^{\beta\epsilon}}{(1+e^{\beta\epsilon})^2}$$

Medelvärdet för värmekapaciteten ges nu av att summera över alla tvånivåsystem:

$$\bar{c}_v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_v(\epsilon) \to \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) c_v(\epsilon) = \frac{k\beta^2}{\epsilon_0}\int_{-\epsilon_0/2}^{\epsilon_0/2} d\epsilon \frac{\epsilon^2 e^{\beta\epsilon}}{(1+e^{\beta\epsilon})^2}$$
$$= \frac{k\beta^2}{\epsilon_0}\int_{-x_0=-\frac{\epsilon_0}{2\beta}}^{x_0=\frac{\epsilon_0}{2\beta}} \frac{dx}{\beta}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{k}{\beta\epsilon_0}\int_{-x_0}^{x_0} dx \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2}.$$

Vi har givet att $\beta\epsilon_0 \gg 1 \Rightarrow x_0 \gg 1$, och eftersom integranden går snabbt mot 0 för stora (positiva och negativa) x, kan vi med gott samvete ersätta gränserna med $\pm\infty$:

$$\bar{c}_v = \frac{k}{\beta\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^x}{(1+e^x)^2}.$$

Integralen beror nu inte längre på temperaturen, utan har något bestämt (men okänt) värde I. Vi har alltså

$$\bar{c}_v = \frac{k}{\beta\epsilon_0} I = \frac{Ik^2T}{\epsilon_0} \propto T,$$

och alltså är värmekapaciteten proportionell mot temperaturen.

5. Eftersom neutrinos är fermioner skall vi använda Fermi-Diracfördelningen

$$\bar{n}_{FD} = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_BT}+1}$$

Den totala energin för en relativistisk fermiongas med en intern frihetsgrad kan skrivas

$$U = \int_0^{\infty} \frac{V4\pi\epsilon^3/(hc)^3}{e^{(\epsilon-\mu)/k_BT}+1} d\epsilon$$

(eq. 7.83 i Shroeder's "Thermal Physics"). Detta kan skrivas om som

$$U = \int_0^{\infty} \epsilon \left(\frac{4\pi V\epsilon^2}{(hc)^3}\right) \bar{n}_{FD} d\epsilon$$

vilket ger oss att tillståndstätheten är

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi}{(hc)^3} V\epsilon^2$$

(a) För $T \to 0$ får vi

$$\bar{n}_{FD} = \begin{cases} 1 & \text{om } \epsilon < \mu(T=0) \equiv \epsilon_F \\ 0 & \text{om } \epsilon > \epsilon_F \end{cases}$$

Vilket ger

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi}{(hc)^3} V \frac{\epsilon_F^3}{3}$$

och

$$\epsilon_F = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} hc$$

Energin blir

$$U = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon)\epsilon d\epsilon = \frac{4\pi}{(hc)^3} V \frac{\epsilon_F^4}{4} = \frac{3}{4} N \epsilon_F$$

(b) Då $T \to \infty$ får vi

$$\bar{n}_{FD} \to e^{\mu/k_B T} e^{-\epsilon/k_B T}$$

Vilket ger

$$N = \int_0^{\infty} g(\epsilon) d\epsilon e^{\mu/k_B T} e^{-\epsilon/k_B T} = \frac{4\pi}{(hc)^3} V e^{\mu/k_B T} 2(k_B T)^3$$

och energin blir

$$U = \int_0^{\infty} g(\epsilon) d\epsilon \epsilon e^{\mu/k_B T} e^{-\epsilon/k_B T} = N \frac{k_B T}{2} 3! = 3 N k_B T$$