

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Onsdagen den 19/10 2011, kl 8.30-12.30 i "Maskin"-salar.

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, "Sammanfattning av kursen FTF140 Termodynamik för F3" (utdelat), Chalmersgodkänd räknare

Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634, 076-1010523

Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 20 poäng (4:a minst 30 poäng, 5:a minst 40 poäng).

Lösningar: Anslås på kurshemsidan.

Rättningsgranskning: Onsdag 2/11 kl 11:45-13.00 i S3020, 3:e våningen i byggnad Soliden.

1. En värmemotor drivs av värme från en värmekälla vid temperaturen 800°C och avger spillvärme till en kylare vid temperaturen 40°C . Motorns verkningsgrad är 30% och den ger uteffekten 50 kW. Hur mycket entropi producerar den per tidsenhet, det vill säga hur mycket ökar entropin per tidsenhet när motorn är igång?
2. Grafit och diamant är två olika former av ett och samma grundämne, nämligen kol. Det är också tämligen välkänt att grafit kan omvandlas till diamant vid höga tryck.
 - (a) Med utgångspunkt från bifogade tabell förväntar man sig att grafit skall vara den stabila formen av kol vid rumstemperatur och atmosfärstryck. Varför?
 - (b) Bestäm Gibbs fria energi som funktion av trycket för grafit respektive diamant vid 25°C . Antag då att specifika volymen är konstant, det vill säga försumma kompressibiliteten av grafit och diamant. Vid vilket tryck omvandlas grafit till diamant?
3. Betrakta ett system med energinivåerna

$$E_n = ne, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

där e är en konstant. Energinivåerna är inte degenererade. Systemet befinner sig i termisk jämvikt med en reservoar med temperaturen T . Bestäm sannolikheten P_{udda} för att n är udda, dvs sannolikheten för att systemets energi är ett udda antal e . Studera P_{udda} för höga och låga temperaturer. Med vilka kvalitativa resonemang kan man komma fram till svaren för P_{udda} vid höga och låga temperaturer?

4. En helt svart plan yta H med temperaturen T_H är parallell med en annan helt svart plan yta L med temperaturen T_L . Effektflödet i vakuum mellan dessa två ytor är

$$J = \sigma (T_H^4 - T_L^4)$$

per areaenhet enligt Stefan-Boltzmanns lag.

- (a) Antag nu att en plan skiva A som inte är helt svart placeras mellan ytorna H och L . Skivan A är ogenomskinlig men reflekterar andelen r av infallande strålning (oberoende av våglängden). Detta gäller för båda sidorna av skivan A . Beräkna nu effektflödet från H till L när ett stationärt flödestillstånd har ställt in sig. Hur förhåller sig detta till det ursprungliga effektflödet J ?
- (b) Ersätt nu skivan A med två skivor B och C som båda är helt svarta. Bestäm effektflödet när ett stationärt tillstånd har ställt in sig. Hur förhåller sig detta effektflöde till det ursprungliga flödet J ?
- (c) Vilket värde ska skivan A ha på reflektionskoefficienten r om effektflödet ska vara lika stort i (a) och (b) uppgifterna?
5. Med hjälp av halvledarteknik kan man skapa system där elektronerna begränsas till att röra sig på ett två-dimensionellt plan. Elektronerna bildar då en så kallad två-dimensionell elektrongas (2DEG). Elektronernas energitillstånd ges av uttrycket

$$\epsilon_{n_x, n_y} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2L} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2); \quad n_x, n_y \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

där m är elektronens massa och $A = L^2$ är arean av det tvådimensionella planet. Typiska tätheter för elektronerna i en sådan 2DEG kan vara 10^{13} elektroner/cm².

- (a) Bestäm systemets tillståndstäthet $g(\epsilon)$ i energirummet.
- (b) Utgående från detta härled ett uttryck för systemets Fermienergi ϵ_F . Vad blir motsvarande värde på Fermitemperaturen $T_F = \epsilon_F/k$ i Kelvin med ovanstående värde för elektrontätheten?

Thermodynamic Properties of Selected Substances

All of the values in this table are for one mole of material at 298 K and 1 bar. Following the chemical formula is the form of the substance, either solid (s), liquid (l), gas (g), or aqueous solution (aq). When there is more than one common solid form, the mineral name or crystal structure is indicated. Data for aqueous solutions are at a standard concentration of 1 mole per kilogram water. The enthalpy and Gibbs free energy of formation, $\Delta_f H$ and $\Delta_f G$, represent the changes in H and G upon forming one mole of the material starting with elements in their most stable pure states (e.g., C (graphite), O_2 (g), etc.). To obtain the value of ΔH or ΔG for another reaction, subtract Δ_f of the reactants from Δ_f of the products. For ions in solution there is an ambiguity in dividing thermodynamic quantities between the positive and negative ions; by convention, H^+ is assigned the value zero and all others are chosen to be consistent with this value. Data from Atkins (1998), Lide (1994), and Anderson (1996). Please note that, while these data are sufficiently accurate and consistent for the examples and problems in this textbook, not all of the digits shown are necessarily significant; for research purposes you should always consult original literature to determine experimental uncertainties.

Substance (form)	$\Delta_f H$ (kJ)	$\Delta_f G$ (kJ)	S (J/K)	C_P (J/K)	V (cm ³)
Al (s)	0	0	28.33	24.35	9.99
Al ₂ SiO ₅ (kyanite)	-2594.29	-2443.88	83.81	121.71	44.09
Al ₂ SiO ₅ (andalusite)	-2590.27	-2442.66	93.22	122.72	51.53
Al ₂ SiO ₅ (sillimanite)	-2587.76	-2440.99	96.11	124.52	49.90
Ar (g)	0	0	154.84	20.79	
C (graphite)	0	0	5.74	8.53	5.30
C (diamond)	1.895	2.900	2.38	6.11	3.42
CH ₄ (g)	-74.81	-50.72	186.26	35.31	
C ₂ H ₆ (g)	-84.68	-32.82	229.60	52.63	
C ₃ H ₈ (g)	-103.85	-23.49	269.91	73.5	
C ₂ H ₅ OH (l)	-277.69	-174.78	160.7	111.46	58.4
C ₆ H ₁₂ O ₆ (glucose)	-1268	-910	212	115	
CO (g)	-110.53	-137.17	197.67	29.14	
CO ₂ (g)	-393.51	-394.36	213.74	37.11	
H ₂ CO ₃ (aq)	-699.65	-623.08	187.4		
HCO ₃ ⁻ (aq)	-691.99	-586.77	91.2		
Ca ²⁺ (aq)	-542.83	-553.58	-53.1		
CaCO ₃ (calcite)	-1206.9	-1128.8	92.9	81.88	36.93
CaCO ₃ (aragonite)	-1207.1	-1127.8	88.7	81.25	34.15
CaCl ₂ (s)	-795.8	-748.1	104.6	72.59	51.6
Cl ₂ (g)	0	0	223.07	33.91	
Cl ⁻ (aq)	-167.16	-131.23	56.5	-136.4	17.3
Cu (s)	0	0	33.150	24.44	7.12
Fe (s)	0	0	27.28	25.10	7.11

Tenta i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3
Onsdagen den 19/10 2011

1. Vi vet att

$$\begin{aligned}T_h &= 800^\circ\text{C} = 1073.15 \text{ K} \\T_c &= 40^\circ\text{C} = 313.15 \text{ K} \\ \eta &= 0.3, \dot{W} = 50 \text{ kW}\end{aligned}$$

Där \dot{W} är arbetet per tidsenhet, effekten. Vi har

$$\eta = \frac{\dot{W}}{\dot{Q}_h}$$

alltså

$$\dot{Q}_h = \frac{\dot{W}}{\eta}$$

Enligt första huvudsatsen

$$\begin{aligned}\dot{Q}_h &= \dot{W} - \dot{Q}_l \Rightarrow \\ \dot{Q}_l &= \frac{\dot{W}}{\eta} - \dot{W} = \frac{1-\eta}{\eta}\dot{W}\end{aligned}$$

Enligt andra huvudsatsen är entropin som produceras per tidsenhet

$$\begin{aligned}\dot{S} &= \frac{\dot{Q}_l}{T_l} - \frac{\dot{Q}_h}{T_h} = \left(\frac{1-\eta}{\eta} \frac{1}{T_l} - \frac{1}{\eta} \frac{1}{T_h} \right) \dot{W} = \\ &= \left(\frac{1-\eta}{T_l} - \frac{1}{T_h} \right) \frac{\dot{W}}{\eta} = 217 \frac{\text{W}}{\text{K}}\end{aligned}$$

2. (a) Gibbs fria energi för grafit G_g är mindre än Gibbs fria energi för diamant G_d vid rumstemperatur och atmosfärstryck
(b) Vi har

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_T &= V \Rightarrow \\ G &= \int V dP \Rightarrow \\ G(P) &= G(P_0) + V(P - P_0)\end{aligned}$$

Vi har också

$$\begin{aligned}G_g(P_0) &= 0, \quad G_d(P_0) = 2.9 \text{ kJ/mol} \\ V_g &= 5.3 \text{ cm}^3/\text{mol}, \quad V_d = 3.42 \text{ cm}^3/\text{mol}\end{aligned}$$

Sätt $G_g(P) = G_d(P)$ så får vi

$$P - P_0 = \frac{G_d(P_0)}{V_g - V_d} = 1.54 \cdot 10^9 \text{ Pa} = 1.54 \cdot 10^4 \text{ bar} = 15.4 \text{ kbar}$$

Alltså: $P=15 \text{ kbar}$.

3. Partitionsfunktionen för systemet:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\beta ne) = \frac{1}{1 - \exp(-\beta e)}$$

Där $\beta = 1/k_B T$. Sannolikheten för att systemet ska befinna sig i tillstånd n är

$$P_n = \frac{1}{Z} \exp(-\beta ne) = (1 - \exp(-\beta e)) \exp(-\beta ne)$$

För att få sannolikheten för tillstånd med udda n summerar vi över dessa

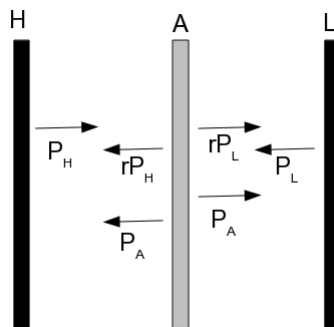
$$\begin{aligned} P_{\text{udda}} &= \sum_{n \text{ udda}} P_n = \{n = 2s + 1\} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{2s+1} = \\ &= (1 - \exp(-\beta e)) \exp(-\beta e) \sum_{s=0}^{\infty} \exp(-\beta 2se) = \\ &= \frac{(1 - \exp(-\beta e)) \exp(-\beta e)}{1 - \exp(-2\beta e)} = \\ &= \frac{(1 - \exp(-\beta e)) \exp(-\beta e)}{(1 - \exp(-\beta e))(1 + \exp(-\beta e))} = \frac{1}{1 + \exp(\beta e)} \end{aligned}$$

Vid låga temperaturer går βe mot oändligheten och P_{udda} går därför mot noll. Detta innebär att endast grundtillståndet, som har ett jämnt n , är ockuperat.

Vid höga temperaturer går βe mot noll, $\exp(\beta e)$ går mot 1 och P_{udda} går därför mot $\frac{1}{2}$. Hälften av de ockuperade nivåerna kommer att vara udda.

4. Utan skivor mellan svartkroppsstrålarna har vi $J = P_H - P_L = \sigma(T_H^4 - T_L^4)$

(a) Med skivan A, som reflekterar andelen r av all strålning

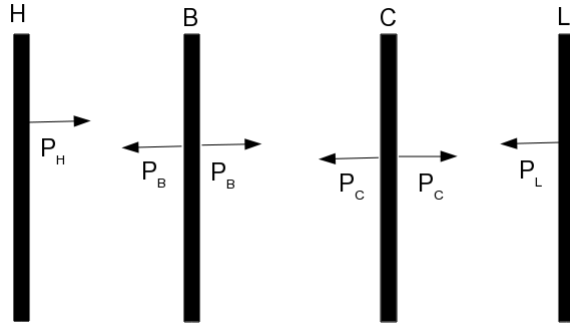


$$J_a = P_H - rP_H - P_A = rP_L + P_A - P_L$$

vilket innebär

$$\begin{aligned} J_a &= \frac{1}{2} [(1 - r)P_H - P_A + P_A - (1 - r)P_L] = \\ &= \frac{1 - r}{2} (P_H - P_L) = \frac{1 - r}{2} J \end{aligned}$$

(b) Med de helt svarta skivorna B och C



$$J_b = P_H - P_B = P_B - P_C = P_C - P_L$$

vilket ger

$$J_b = \frac{1}{3} [P_H - P_B + P_B - P_C + P_C - P_L] = \frac{1}{3} (P_H - P_L) = \frac{1}{3} J$$

(c)

$$\frac{1-r}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

5. (a) Tillståndstätheten i n-rummet

$$\int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y f(n_x, n_y) \rightarrow \frac{1}{4} 2\pi \int n dn f(n) \Rightarrow g_n(n) = \frac{\pi n}{2}$$

Vi har

$$g(\epsilon) d\epsilon = 2g_n(n) dn$$

Där tvåan kommer från att vi har två möjliga spin. Med

$$\epsilon = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2L} \right)^2 n^2$$

fås

$$g(\epsilon) = \frac{\pi n}{\frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2L} \right)^2 2n} = \frac{4\pi m}{h^2} A$$

(b)

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon \Rightarrow \frac{N}{A} = \frac{4\pi m}{h^2} \epsilon_F$$

så

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{4\pi m} \frac{N}{A}$$

och

$$T_F = \frac{1}{k} \frac{h^2}{4\pi m} \frac{N}{A} = 278 \text{ K}$$