Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tentamen i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Onsdagen den 20/10 2010, kl 14.00-18.00 i "Maskin"-salar.
Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare
Jourhavande lärare: Göran Wahnström, tel. 772-3634
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Till detta adderas eventuella duggapoäng. För godkänt krävs 27 poäng (4:a minst 40 poäng, 5:a minst 54 poäng).
Lösningar: Anslås på kurshemsidan.
Rättningsgranskning: Onsdag 3/11 kl 11:45-13.00 i S3020, 3:e våningen i byggnad Soliden.

1. (a) I "Physics Handbook" kan man hämta följande data för de tre gaserna N_2, C_2H_6 och He.

Gas	C_P/C_V
N_2	1.404
C_2H_6	1.21
He	1.66

   Värdena gäller vid rumstemperatur. Ge en motivering till de tre olika värdena på kvoten C_P/C_V, baserat på egenskaper för de olika gaserna!

   (b) För hålrumsstrålning gäller att

$$f(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3}\omega^2$$

   och

$$n(\omega) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

   där $f(\omega)$ är tillståndstätheten, $n(\omega)$ Plancks fördelningslag och ω ljusets vinkelfrekvens. Teckna ett uttryck för totala strålningsenergin i ett hålrum med volymen V samt bestäm utgående från detta hur strålningsenergin beror av temperaturen.

2. Du har tillgång till ett isblock i Arktis och du vill utnyttja det för att utvinna arbete. Storleken på detta beror på omgivningen och du transporterar det därför till Sahara. Där låter du isblocket fungera som lågtemperaturreservoar och ökensanden som högtemperaturreservoar för en värmemotor. Ökensanden har temperaturen 60 °C. Hur mycket arbete kan man maximalt erhålla? Isblocket har massan 1000 ton och från början temperaturen 0 °C. Lämpliga och rimliga antaganden får göras.

3. En kompressor tar in luft vid 0.1 MPa och 20 °C och avlevererar luften vid 1.0 MPa och med hastigheten 10 m/s. Massflödet är 5.0 g/s. Antag att luftens kompression sker adiabatiskt och att dess hastighet vid intaget är försumbart liten. Bestäm den minsta effekt som erfordras av kompressorn! Luften får behandlas som en idealgas med konstant värmekapacitet.

4. För fasta *oordnade* material har man funnit ett linjärt temperaturbidrag till värmekapaciteten vid låga temperaturer. Detta gäller *även* för isolatorer. Den gängse förklaringen till detta fenomen är att vissa atomer, eller grupper av atomer, i materialet rör sig mellan två närliggande potentialminima med en viss energiskillnad ϵ. Varje sådan atom, eller grupp av atomer, kan därför approximeras med ett tvånivåsystem med energiskillnaden ϵ. Oordningen medför dock att storleken av energiskillnaden ϵ varierar slumpmässigt för de olika tvånivåsystemen. Antag att fördelningen av dessa ges av

$$\rho(\epsilon) = \begin{cases} 1/\epsilon_0 & \text{om} - \epsilon_0/2 < \epsilon < \epsilon_0/2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Visa att detta leder till ett linjärt temperaturberoende om $k_B T \ll \epsilon_0$! Ledning: Beräkna först värmekapaciteten $C_V(\epsilon)$ för ett diskret tvånivåsystem med en given energiskillnad ϵ. Teckna därefter medelvärdet av $C_V(\epsilon)$ med hjälp av ovanstående fördelningsfunktion $\rho(\epsilon)$ och visa att av detta följer att värmekapaciteten blir proportionell mot temperaturen om $k_B T \ll \epsilon_0$.

5. För en viss tvåatomig molekyl gäller att vibrationsbidraget till värmekapaciteten är $0.65\mathrm{k}_B$ per molekyl vid temperaturen 950 K. Uppskatta vinkelfrekvensen ω hos den harmoniska oscillatorpotentialen mellan de två atomerna i molekylen! Kan du med hjälp av ”Physics Handbook” ange en trolig kandidat? Notera att uppgiften leder till en ekvation som måste lösas numeriskt. Om du inte klarar det ange en lösningsskiss för hur problemet slutligen kan lösas.

6. En svart plan yta med temperaturen T_H är parallell med en svart plan yta med temperaturen T_L. Energiflödet i vacuum mellan de två ytorna är

$$J = \sigma \left(T_H^4 - T_L^4 \right)$$

enligt Stefan-Boltzmanns lag. Antag nu att en tredje plan svart yta placeras mellan de två andra. Bestäm temperaturen på denna tredje yta när energiflödet blivit konstant. Hur förhåller sig detta energiflöde till det ursprungliga flödet?

Chalmers
Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Tenta i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Onsdagen den 20/10 2010

1. (a) Energin för en mol av en ideal gas är $E = p\frac{1}{2}k_B T N_0$, där p är antalet frihetsgrader och N_0 = Avogrados tal.

$$c_v = \frac{dE}{dT} = \frac{1}{2}pk_B N_0 = \frac{1}{2}pR$$
$$c_p = c_v + R = \left(\frac{p}{2}+1\right)R$$
$$\frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{p}{2}+1}{\frac{p}{2}} = 1 + \frac{2}{p}$$

He har tre translationsgrader, $p = 3$, och $\frac{c_p}{c_v} = 1.67$.
N_2 har förutom translationsfrihetsgraderna också rotation omkring två axlar $\Rightarrow p = 5$, och $\frac{c_p}{c_v} = 1.40$.
Om man för C_2H_6 sätter $p = 9$ fås $\frac{c_p}{c_v} = 1.22$

(b) Totala strålningsenergin

$$\bar{E} = \int_0^\infty f(\omega)n(\omega)E_{\text{foton}}(\omega)d\omega = \int_0^\infty f(\omega)n(\omega)\hbar\omega d\omega$$
$$= \int_0^\infty \frac{V}{\pi^2c^3}\frac{\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\hbar\omega d\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2c^3}\int_0^\infty \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\hbar\omega d\omega.$$

Sätt $\beta\hbar\omega = x$ och då $\beta\hbar d\omega = dx$. Detta ger

$$\bar{E} = \frac{V\hbar}{\pi^2c^3\beta^4\hbar^4}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}dx.$$

Serieutveckling vid låga x ($e^x = 1 + x + x^2/2 + \cdots$) och approximationen $\frac{x^3}{e^x-1} = \frac{x^3}{e^x}$ för höga x visar att, tämligen direkt, integralen är konvergent och får något konstant värde. $\bar{E}$ blir då proportionell mot $1/\beta^4 \propto T^4$.

2. Två olika lösningar, men likartade

(a) Mest generell lösning:
Sanden avger värmeenergin Q_{sand} vid temp. $T_{\text{sand}} = 333$ K.
Vattnet upptar värmeenergin Q_{vatten} vid uppvärmning 273 K till 333 K.
Isen upptar värmeenergin Q_{is} vid temp. $T_{\text{is}} = 273$ K.
Hela processen måste ha en entropiändring $\Delta S \geq 0$.
1:a HS:

$$Q_{\text{sand}} = W + Q_{\text{is}} + Q_{\text{vatten}}. \tag{1}$$

2:a HS:

$$\Delta S = -\frac{Q_{\text{sand}}}{T_{\text{sand}}} + \frac{Q_{\text{is}}}{T_{\text{is}}} + \int_{273\text{K}}^{333\text{K}} \frac{Mc_{\text{vatten}}dT}{T} \geq 0. \tag{2}$$

$$(2) \Rightarrow Q_{\text{sand}} \leq \frac{T_{\text{sand}}}{T_{\text{is}}}Q_{\text{is}} + T_{\text{sand}} \cdot M \cdot c_{\text{vatten}} \ln\frac{333}{273}.$$

$$Q_{\text{is}} = ML = 10^6\text{kg} \cdot 333 \cdot 10^3\text{J/kg},\ c_{\text{vatten}} = 4.18 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

$$(1) \Rightarrow W = Q_{\text{sand}} - Q_{\text{is}} - Q_{\text{vatten}} \leq \frac{T_{\text{sand}}}{T_{\text{is}}} Q_{\text{is}} + T_{\text{sand}} \cdot M \cdot c_{\text{vatten}} \ln \frac{333}{273} - Q_{\text{is}} - Q_{\text{vatten}}.$$

$$Q_{\text{vatten}} = M \cdot c_{\text{vatten}} \cdot \Delta T = 10^6 \text{kg} \cdot 4.18 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 60\text{K}. \quad (3)$$

Insättning ger $W \leq 100.6 \cdot 10^9$ J $= 101$ GJ

(b) Separera problemet i två delar.

i. Isen smälter.

$$Q_{\text{sand}} = W_i + Q_{\text{is}}.$$

$$\Delta S_i = -\frac{Q_{\text{sand}}}{T_{\text{sand}}} + \frac{Q_{\text{is}}}{T_{\text{is}}} \geq 0 \Leftrightarrow Q_{\text{sand}} \leq \frac{T_{\text{sand}}}{T_{\text{is}}} Q_{\text{is}}$$

$$\Rightarrow W_i \leq \left(\frac{T_{\text{sand}}}{T_{\text{is}}} - 1 \right) Q_{\text{is}} = \left(\frac{333}{273} - 1 \right) 333 \cdot 10^9 \text{J} = 73,2 \text{ GJ}$$

ii. Vattnet värms upp.

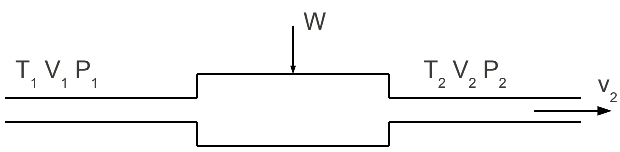
$$Q_{\text{sand}} = W_{ii} + Q_{\text{vatten}}.$$

$$\Delta S_{ii} = -\frac{Q_{\text{sand}}}{T_{\text{sand}}} + \int_{273\text{K}}^{333\text{K}} \frac{M c_{\text{vatten}} dT}{T} \geq 0 \Leftrightarrow Q_{\text{sand}} \leq M \cdot c_{\text{vatten}} \cdot T_{\text{sand}} \ln \frac{333}{273}$$

$$\Rightarrow W_{ii} \leq M \cdot c_{\text{vatten}} \cdot T_{\text{sand}} \ln \frac{333}{273} - M \cdot c_{\text{vatten}} \cdot \Delta T = 27.6 \text{ GJ}$$

$$W_{\text{tot}} = W_i + W_{ii} \leq 101 \text{ GJ}$$

3.



Beräkna minsta möjliga W, under givna förhållanden.
Energirelation:

$$H_1 + K_1 + W = H_2 + K_2,$$

där $K_1 = 0$ och $K_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$. Detta ger

$$W = H_2 - H_1 + K_2 = \Delta H + K_2.$$

Generellt:

$$\Delta H = \int_{T_1}^{T_2} c_p dT.$$

Vad är T_2? Adiabatisk process $\Rightarrow PV^\gamma =$ konst och $TP^{\frac{1}{\gamma}-1} =$ konst, där $\gamma = 1.4$.

$$\Rightarrow T_1 P_1^{\frac{1}{\gamma}-1} = T_2 P_2^{\frac{1}{\gamma}-1} \Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} = 566 \, \text{K}$$

Värmekapaciteten för luft kan man räkna ut som i uppgift 1a eller få från tabell: $c_p = 1000$ J kg^{-1} K^{-1}. Vi får därför

$$\Delta H = c_p(T_2 - T_1) = 1000(566 - 293)\frac{\text{J}}{\text{kg}} = 273 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}}.$$

För $m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg fås

$$W = 273 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3}\,\text{J} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2\,\text{J} = 1365\,\text{J} + 0.25\,\text{J} = 1365\,\text{J},$$

d.v.s. effekten 1365 W.

Alternativ lösning:
$W = \Delta H + K_2$,
$dH = d(E + PV) = dE + PdV + VdP$.
Generellt gäller $dE = TdS - PdV \Rightarrow dH = TdS + PdV$.
Adiabatisk process $\Rightarrow dS = 0 \Rightarrow dH = VdP \Rightarrow \Delta H = \int VdP$.
Adiabatiskt ger också $P_1 V_1^\gamma = PV^\gamma \Rightarrow V = V_1 \left(\frac{P_1}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

$$\Delta H = \int_{P_1}^{P_2} V_1 \left(\frac{P_1}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma}} dP = V_1 P_1^{\frac{1}{\gamma}} \left[\frac{P^{1-\gamma^{-1}}}{1-\gamma^{-1}}\right]_{P_1}^{P_2}.$$

V_1 fås ur ideala gaslagen: $V_1 = \frac{RT_1}{P_1} = 0.0243\,\frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \Rightarrow 0.84\,\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$.
Insättning ger $\Delta H = 0.84 \cdot \left(10^5\right)^{0.71} \cdot \frac{1}{1-0.71}\left[\left(10^6\right)^{0.29} - \left(10^5\right)^{0.29}\right]\frac{\text{J}}{\text{kg}} \approx 275000\,\frac{\text{J}}{\text{kg}}$ och för $m = 5 \cdot 10^{-3}$ kg fås $\Delta H = 1370$ J.

$$W = \Delta H + \frac{1}{2}mv^2 = 1370\,\text{J} + 0.25\,\text{J} = 1370\,\text{J}$$

och en effekt på 1370 W.

4. Vi börjar med att beräkna värmekapaciteten för ett tvånivåsystem med energiskillnad ϵ. Eftersom värmekapaciteten inte beror på nollnivåenergin, sätter vi ena tillståndets energi till 0 och andra tillståndets till ϵ. Detta ger tillståndssumman

$$Z(\epsilon) = 1 + e^{-\beta\epsilon},$$

vilket ger medelenergin

$$\bar{E}(\epsilon) = -\frac{\partial \ln Z(\epsilon)}{\partial \beta} = \frac{\epsilon}{1 + e^{\beta\epsilon}},$$

vilket ger värmekapaciteten

$$c_v(\epsilon) = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\partial \beta}{\partial T}\frac{\partial \bar{E}}{\partial \beta} = k\beta^2 \frac{\epsilon^2 e^{\beta\epsilon}}{(1 + e^{\beta\epsilon})^2}$$

Medelvärdet för värmekapaciteten ges nu av att summera över alla tvånivåsystem:

$$\bar{c}_v = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_v(\epsilon) \to \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \rho(\epsilon) c_v(\epsilon) = \frac{k\beta^2}{\epsilon_0}\int_{-\epsilon_0/2}^{\epsilon_0/2} d\epsilon \frac{\epsilon^2 e^{\beta\epsilon}}{\left(1+e^{\beta\epsilon}\right)^2}$$

$$= \frac{k\beta^2}{\epsilon_0}\int_{-x_0=-\frac{\epsilon_0}{2\beta}}^{x_0=\frac{\epsilon_0}{2\beta}} \frac{dx}{\beta}\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^2 e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{k}{\beta\epsilon_0}\int_{-x_0}^{x_0} dx \frac{x^2 e^x}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

Vi har givet att $\beta\epsilon_0 \gg 1 \Rightarrow x_0 \gg 1$, och eftersom integranden går snabbt mot 0 för stora (positiva och negativa) x, kan vi med gott samvete ersätta gränserna med $\pm\infty$:

$$\bar{c}_v = \frac{k}{\beta\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2 e^x}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

Integralen beror nu inte längre på temperaturen, utan har något bestämt (men okänt) värde I. Vi har alltså

$$\bar{c}_v = \frac{k}{\beta\epsilon_0} I = \frac{I k^2 T}{\epsilon_0} \propto T,$$

och alltså är värmekapaciteten proportionell mot temperaturen.

5. För vilken vinkelfrekvens ω är vibrationsbidraget till värmekapaciteten $0.65k$ vid temperaturen 950 K?
   En harmonisk oscillator med vinkelfrekvens ω har tillståndssumman

$$Z^{\text{vib}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = e^{-\beta\hbar\omega/2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\beta\hbar\omega}\right)^n = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1-e^{-\beta\hbar\omega}}.$$

Detta ger medelenergin

$$\bar{E}^{\text{vib}} = -\frac{\partial \ln Z(\epsilon)}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2} + \ln\left(1-e^{-\beta\hbar\omega}\right)\right) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1},$$

och värmekapaciteten

$$c_v^{\text{vib}} = \frac{\partial\bar{E}}{\partial T} = \frac{\partial\beta}{\partial T}\frac{\partial\bar{E}}{\partial\beta} = k\beta^2\frac{(\hbar\omega)^2 e^{\beta\hbar\omega}}{\left(e^{\beta\hbar\omega}-1\right)^2} = k\frac{x^2 e^x}{\left(e^x-1\right)^2},$$

där $x = \beta\hbar\omega$. $c_v^{\text{vib}} = 0.65k$ ger oss alltså följande ekvation att lösa:

$$\frac{x^2 e^x}{\left(e^x-1\right)^2} = 0.65.$$

Denna ekvation går inte att lösa analytiskt (såvitt jag kan komma på), så vi får lösa den numeriskt. Detta kan göras på många sätt, men det enklaste är helt enkelt att pröva sig fram på miniräknaren:

x	$\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}$	Kommentar
1	0.92	För högt
0.5	0.98	Fel håll
2	0.72	För högt
3	0.50	För lågt
2.5	0.61	För lågt
2.2	0.68	För högt
2.4	0.63	För lågt
2.3	0.66	Tillräckligt bra

Vi finner alltså att $x \approx 2.3$ är en lösning, vilket ger $\omega = \frac{2.3}{\hbar\beta} = 2.9 \cdot 10^{14} s^{-1}$. Egentligen borde vi också visa att detta är den enda lösningen, till exempel genom att visa att derivatan är negativ för alla positiva x.

Det återstår att lista ut vilken molekyl det rör sig om. Tabell 5.7 i Physics Handbook listar egenskaper hos ett antal vanliga tvåatomiga molekyler. Dock står inte frekvensen ω angiven direkt, utan bara vibrationsenergin $h\nu \equiv \hbar\omega$. Vårat värde på ω ger en vibrationsenergi

$$\hbar\omega = 188\,\mathrm{meV},$$

och vi ser att den troligaste kandidaten är syrgas, med en vibrationsenergi på 197 meV.

6. Om mittenplattan har temperaturen T_M så ges flödet från den varma plattan till mittenplattan av

$$J_{H\to M} = \sigma(T_H^4 - T_M^4),$$

och flödet från mittenplattan till den kalla plattan av

$$J_{M\to L} = \sigma(T_M^4 - T_L^4).$$

När dessa flöden är lika stora har mittenplattan nått sin sluttemperatur och energiflödet ändrar sig inte längre. Sluttemperaturen ges därför av ekvationen

$$J_{H\to M} = J_{M\to L} \Leftrightarrow \sigma(T_H^4 - T_M^4) = \sigma(T_M^4 - T_L^4) \Leftrightarrow 2T_M^4 = T_H^4 + T_L^4 \Leftrightarrow T_M = \left(\frac{T_H^4 + T_L^4}{2}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Det nya flödet från $J_{H\to L}$ ges nu av antingen $J_{H\to M}$ eller $J_{M\to L}$ (de är ju lika stora):

$$J_{H\to L} = J_{H\to M} = \sigma(T_H^4 - T_M^4) = \sigma(T_H^4 - \frac{T_H^4 + T_L^4}{2}) = \frac{\sigma(T_H^4 - T_L^4)}{2} = \frac{J}{2},$$

d.v.s. hälften av det ursprungliga flödet.