

## Tentamen i Termodynamik och Statistisk fysik för F3(FTF140)

---

**Tid och plats:** Tisdag 13/1 2009, kl. 08.30-12.30 i V-huset.

**Examinator:** Mats Granath, 7723175, 0708938077, mats.granath@physics.gu.se

**Hjälpmedel:** BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, Chalmersgodkänd räknare.

**Bedömning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Finns på kurshemsidan efter tentans slut.

**Rättningsgranskning:** Tisdag 27/1 kl 11.45-13.00, hos examinatoren, rum O7109B.

### Uppgift 1

Svaren till dessa behöver inte motiveras. 2.5 poäng per uppgift.

**A)** Ett system med tryck  $P$  och volym  $V$  befinner sig i en omgivning med tryck  $P_0$ . Vad är arbetet på systemet vid en liten volymförändring  $dV$ ?

- a)  $dW = -PdV$       b)  $dW = -P_0dV$   
c)  $dW < -PdV$       d)  $dW > -P_0dV$

**B)** En diatomär molekyl i en gas har två rotations frihetsgrader och två vibrationsfrihetsgrader. Vid höga temperaturer ger dessa inre frihetsgrader följande bidrag till gasens värmekapacitet per molekyl:

- a)  $R$       b)  $k_B T$   
c)  $2k_B$       d)  $\mu_B$

**C)** Enligt termodynamikens tredje huvudsats gäller för entropin,  $S(T) \rightarrow 0$  då  $T \rightarrow 0$ . Enligt definitionen av entropi i statistisk fysik är 3e huvudsatsen följaktligen ekvivalent med:

- a) att systemet har ett unikt lägsta energitillstånd.  
b) Clasius-Clapeyrons ekvation.  
c) Ideala gaslagen.  
d) statistiska fysikens grundpostulat.

**D)** Entropin för en enatomig klassisk idealgas med  $N$  atomer ges av (Sackur-Tetrodes ekvation)

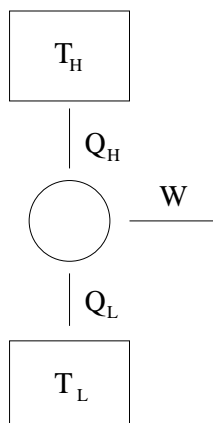
$$S = k_B N \left[ \ln(V/N) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) + \frac{5}{2} \right].$$

Vad är entropin för dubbelt så många atomer om täthet och temperatur är oförändrade?

- a)  $S^2$       b)  $S$   
c)  $S \ln 2$       d)  $2S$

## Uppgift 2

a) Härled baserat på första och andra lagen den maximala verkningsgraden (Carnotverkningsgraden) för en värmemaskin som jobbar mellan en högtemperaturreservoar vid temperatur  $T_H$  och en lågtemperaturreservoar vid temperatur  $T_L$ . Rita också en ny figur där riktningen på respektive värme flöde och arbete är specificerat. (Kom ihåg att syftet med en värmemaskin är att utvinna arbete från värme.) (5p)



b) Rita motsvarande figur och beräkna den maximala verkningsgraden för en värmepump vars syfte är att överföra värme från den kallare till den varmare reservoaren. (5p)

## Uppgift 3

Ett paramagnetiskt material innehåller joner med effektivt spinn ett, vilket innebär att i ett magnetiskt fält  $B$  har jonerna tre energinivåer,  $\epsilon = -\mu B, 0, \mu B$  där  $\mu$  är storleken på jonens magnetiska dipolmoment. De tre energinivåerna svarar mot att dipolmomentet i magnetfältets riktning är  $\mu$  för  $\epsilon = -\mu B$ , 0 för  $\epsilon = 0$  och  $-\mu$  för  $\epsilon = \mu B$ . Dipolerna kan anses vara i termisk jämvikt med en omgivning vid temperatur  $T$ .

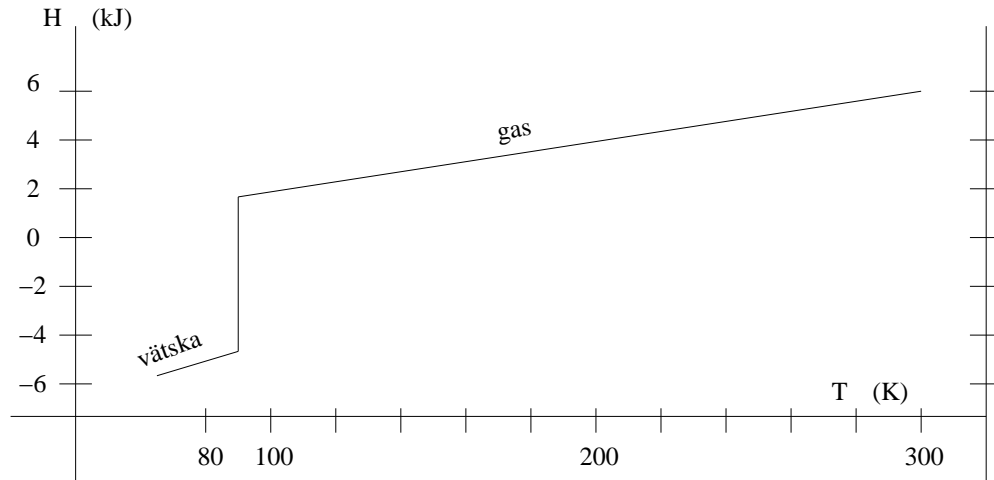
a) Beräkna magnetiseringen  $m$  (väntevärdet av dipolmomentet) för en jon som funktion av temperaturen. (7p)

b) Visa att för höga temperaturer följer magnetiska susceptibiliteten  $\chi = \frac{\partial m}{\partial B}$  Curies lag  $\chi \sim \frac{1}{T}$ . (3p)

## Uppgift 4

Grafen visar entalpin  $H$  per mol för Argon i vätske och gasfaserna vid konstant tryck ( $P = 1 \text{ atm}$ ) som funktion av temperaturen. Kokpunkten kan antas vara  $T_0 = 90 \text{ K}$ .

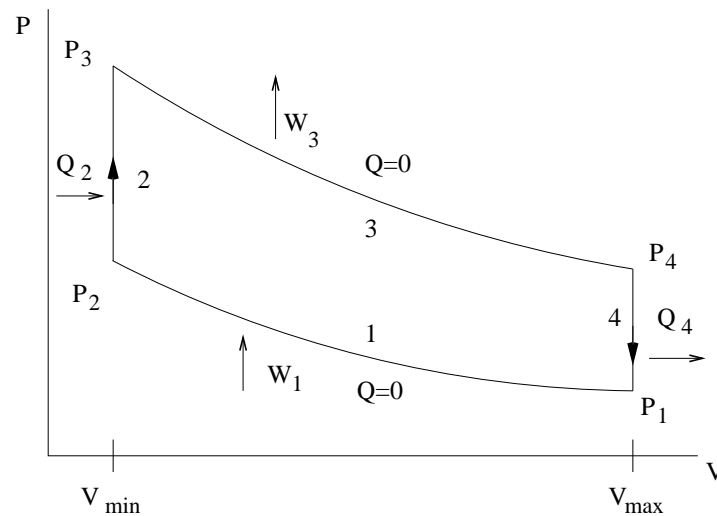
a) Notera att entalpin beror linjärt på temperaturen i gasfasen. Förklara varför detta innebär att gasen kan betraktas som ideal. (4p)



b) Givet att gasen är ideal beräkna entropin per mol för gasen vid kokpunkten,  $S_g(T_0)$ . (3p)

c) Uppskatta från b) och med hjälp av värden ur grafen entropin per mol för vätskan vid kokpunkten,  $S_v(T_0)$ . (3p)

## Uppgift 5



Figuren är en skiss av ett P-V diagram för Otto cykeln som idealiserar en förbränningsmotor. Arbetsmediet består av  $n$  mol idealgas med molära värmekapaciteter  $C_p$  och  $C_v$ . Kompression (1) och expansion (3) kan antas vara adiabatiska. I den ideala cykeln antas dessutom att dessa steg sker reversibelt, vilket kräver tryckjämvikt dvs att den yttre

kraften fördelad över kolven är lika stor som trycket inne i cylindern. (Detta i sin tur ger ingen effekt eftersom förflyttning av kolven då sker oändligt långsamt pga kraftjämvikt.)

Som en möjligen mer realistisk variant på Ottocykeln antag nu istället att i kompressionssteget är den yttre kraften konstant och sådant att trycket på gasen är  $P_2$  under hela denna process. (Trycket för gasen i cylindern är då  $P : P_1 \leq P \leq P_2$  vilket ger en verklig kompression.) På samma sätt antar vi att det yttre trycket som verkar på gasen under hela expansionssteget är  $P_4$ . I övrigt är cykeln densamma som den ideala Ottocykeln.

a) Skriv ner uttryck för  $W_1$ ,  $Q_2$ ,  $W_3$ , och  $Q_4$  i termer av givna storheter för denna cykel. (6p)

b) Beräkna verkningsgraden för cykeln i termer av givna storheter. (4p)

## Uppgift 6

Debyemodellen beskriver fördelningen av kvantiserade vibrationsfrekvenser för atomerna i ett fast ämne. Varje vibrationsfrekvens  $\omega$  svarar mot en harmonisk oscillator med energi  $\epsilon = \hbar\omega(n + 1/2)$  där  $n \geq 0$  är ett positivt heltal. Enligt Debyemodellen beror vibrationsfrekvenserna linjärt på vågtal  $\vec{k}$  så som  $\omega(\vec{k}) = v_s|\vec{k}|$  ( $v_s$  är ljudhastigheten) upp till en maximal frekvens  $\omega_D$ .

a) Skriv ner tillståndssumman  $Z$  för en uppsättning  $r = 1, \dots, 3N$  oberoende harmoniska oscillatorer med energi  $\hbar\omega_r$ . (3p)

b) Beräkna entropin genom antagandet att frekvenserna är fördelade enligt Debyemodellen. (Använd tex  $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ .) Visa att svaret kan skrivas

$$S = 12k_B N (T/T_D)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1},$$

där  $T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}$ . (5p)

c) För låga temperaturer ger Debyemodellen  $C_V = 36k_B N (T/T_D)^3 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$ . Visa att detta är förenligt med entropin enligt b). (2p)

# Lösning Tenta 090113, Termodynamik och statistisk fysik, FTF140

## Uppgift 1

A) b

B) c

C) a

D) d

## Uppgift 2

Se föreläsningssanteckningar. Svar:

a)  $\eta \leq 1 - \frac{T_L}{T_H}$

b)  $\eta \leq 1/(1 - \frac{T_L}{T_H})$

## Uppgift 3

a)  $\bar{\mu} = \frac{1}{Z}(\mu e^{\beta\mu B} + 0 - \mu e^{-\beta\mu B})$  med  $Z = e^{\beta\mu B} + 1 + e^{-\beta\mu B}$

b) Höga T svarar mot  $\beta\mu B = \frac{\mu B}{k_B T} \ll 1$ . Vi kan utveckla exponenterna till lägsta ordning vilket ger  $\bar{\mu} \approx \frac{\mu(1+\beta\mu B) - \mu(1-\beta\mu B)}{3} = \frac{2\mu^2 B}{3k_B T}$ , alltså  $\chi = \frac{2\mu^2}{3k_B T} \sim \frac{1}{T}$

## Uppgift 4

a) För en ideal gas gäller  $\Delta H = \Delta E + \Delta(PV) = C_v \Delta T + R \Delta T = C_p \Delta T$ , alltså beror entalpin linjärt på temperaturen.

b) Här kan vi använda Sackur-Tetrodes ekvation (se uppgift 1d), per mol och insatt  $V/N = k_B T/P$   $S = R[\ln(\frac{k_B T}{P}) + \frac{3}{2} \ln(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}) + \frac{5}{2}]$ . Sätter vi in värden  $m = 40\mu$ ,  $P = 10^5 Pa$ ,  $T = 90K$  får vi  $S_g = 130J/K$

c) För vätskan får vi entropibidrag i fasövergången  $\Delta S = S_g - S_v = Q/T = [urfigur] = 6.5kJ/90K = 0.07kJ/K$ , vilket ger  $S_v = S_g - 70J/K = 60J/K$

## Uppgift 5

a) Använd  $W = -P_0 dV$ , med tecken på processerna enligt figur fås  $W_1 = -P_2(V_{min} - V_{max})$ ,  $W_3 = P_4(V_{max} - V_{min})$ ,  $Q_2 = C_v(T_3 - T_2) = \frac{C_v}{nR}(P_3 V_{min} - P_2 V_{min})$  och  $Q_4 =$

$$C_v(T_4 - T_1) = \frac{C_v}{nR}(P_4V_{max} - P_1V_{max}).$$

b) Verkningsgraden  $\eta = \frac{W_3 - W_1}{Q_2}$ , detta kan vi skriva om med hjälp av  $W_1 + Q_2 = W_3 + Q_4$  så som  $\eta = \frac{Q_2 - Q_4}{Q_2} = 1 - \frac{Q_4}{Q_2} = 1 - \frac{V_{max} P_4 - P_1}{V_{min} P_3 - P_2}$

OBS! Denna uppgift kräver i princip lite mer eftertanke. Arbetet  $W_3$  som vi beräknat är (-) arbetet på gasen. Vad vi egentligen ska ha för att räkna ut verkningsgraden är arbetet på omgivningen  $W_{3,omg.} = \int PdV$ . Eftersom gasen expanderar gäller  $|W_{3,omg.}| > |W_3|$ , vilket ger  $\eta > \frac{W_3 - W_1}{Q_2}$ . Bättre än så kan vi inte göra eftersom processen är irreversibel och vi vet inte gasens momentana tryck under expansionen.

## Uppgift 6

a) För en oscillator  $Z_r = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega_r(n+\frac{1}{2})} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_r/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_r}}$ . Tillståndssumman för 3N oberoende oscillatorer är alltså  $Z = \prod_{r=1}^{3N} Z_r$ , där  $\Pi$  betyder produkten.

b)  $F = -k_B T \ln Z = -k_B T \sum_r \ln Z_r = \sum_r (\hbar\omega_r/2 + k_B T \ln(1 - e^{-\hbar\omega_r/k_B T}))$ , vilket ger  $S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -k_B \sum_r \ln(1 - e^{-\hbar\omega_r/k_B T}) + k_B \sum_r (\hbar\omega_r/k_B T) \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_r} - 1}$ . Vi ersätter summan med en integral  $\sum_r \rightarrow \int_0^{\omega_D} f(\omega) d\omega$  med tillståndstäthet  $f(\omega) d\omega = 9N \frac{\omega^2}{\omega_D^3} d\omega$ . Variabelsubstitution  $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$  och partialintegrera logaritmen ger

$$S = 12k_B N (T/T_D)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - 3k_B N \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega_D}).$$

(Den andra termen är exponentiellt liten för låga temperaturer och kan fösummas, för höga temperaturer ger den ett logaritmiskt bidrag. Uttrycket i tentatesen är alltså inte helt korrekt!)

c) För  $T \ll T_D$  fås från b)  $S = 12k_B N (T/T_D)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$  vilket är samma som  $S = \int_0^T \frac{C_V(T)}{T} dT$