Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för Teknisk Fysik
Mats Granath

Tentamen i Termodynamik och Statistisk fysik för F3(FTF140)

Tid och plats: Fredagen den 19 januari 2007, kl. 8.30-12.30 i V-huset.
Examinator: Mats Granath, 7723175, 0708938077, mgranath@fy.chalmers.se
Hjälpmedel: BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, valfri räknedosa i fickformat.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.
Lösningar: Finns på kurshemsidan efter tentans slut.
Rättningsprotokoll: Anslås senast onsdag 7/2 2007.
Rättningsgranskning: Kontakta examinatorn, rum O7109B.

Uppgift 1

För ett stationärt flöde genom en strypventil kan vi anta att ingen värme eller arbete utbyts med omgivningen.

a) Vilken termodymamisk storhet är bevarad? (5p)

b) För ett sådant flöde kan man skriva ändringen i temperatur mellan in och utflöde som funktion av motsvarande ändring i tryck så som $dT = \alpha_{JT} dP$. Beräkna α_{JT} om flödet består av en klassisk idealgas. (5p)

Uppgift 2

Ett system har endast två tillgängliga tillstånd. Sannolikheten att systemet befinner sig i tillstånd 1 respektive 2 är P_1 respektive P_2. Visa att systemets entropin är maximal om båda tillstånden är lika sannolika. (10p)

Uppgift 3

Ett kylskåp har verkningsgrad $\beta = 2.6$. $\dot{Q} = 1.5kW$ värme flödar in i kylskåpet från köket där kylskåpet är placerat.

a) Med vilken effekt arbetar kylaggregatet om temperaturen i kylskåpet hålls konstant? (4p)

b) Blir luften i köket varmare eller kallare? Hur stort är detta värmeflöde till eller från luften i köket? (3p)

c) Vad är totala entropiändringen för köket inklusive kylskåpet om kylskåpets temperatur är 10^oC och kökets temperatur kan betraktas som konstant, 20^oC? (3p)

Uppgift 4

Ett system består av ett stort antal N särskiljbara svagt växelverkande partiklar. Varje partikel har två tillgängliga tillstånd med energier $-\epsilon$ och ϵ med $\epsilon > 0$.

a) Antag att systemet är slutet och att totala energin är $E = N_1\epsilon$ $(-N \leq N_1 \leq N)$ Vad är då sannoliketen att en specifik partikel har energi ϵ? (5p)

b) Om samma systemet i stället är i kontakt med ett värmebad vid temperatur T. Vad är temperaturen om väntevärdet av energin för systemet är $< E >= N_1\epsilon$? (5p)

Uppgift 5

En cylinder med en rörlig kolv har en volym V_1=0.003m^3 och innehåller torr (ingen vätska) mättad vattenånga vid T_1=200^{o}C. Kolven rör sig så att volymen expanderar till V_2=0.015m^3 och sluttryck P_2=0.25MPa. Expansionen kan antas ske utan värmeutbyte med omgivningen.

a) Hur mycket arbete fås ut? (8p)

c) Hur mycket av detta arbete går förlorat genom arbete på omgivningen (atmosfären)? (2p)

Uppgift 6

Ett ferromagnetiskt material innehåller N magnetiska dipoler med spin S som vid $T = 0$ är ordnade i samma riktning så att magnetiseringen är $M(T = 0) = NS$. Kollektiva riktningsförändringar av dipolerna kan beskrivas som så kallade spinvågor. Dessa är bosoner och har (för små $k = |\vec{k}|$) energi $\epsilon(\vec{k}) = \epsilon_0 a^2 |\vec{k}|^2$ där ϵ_0 och a är konstanter och $\vec{k}$ är en vågvektor i tre dimensioner. För temperaturer $T > 0$ reduceras magnetiseringen med S per exciterad spinvåg så att

$$M(T) = M(T = 0)(1 - \frac{1}{NS}\sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}})$$

där $n_{\vec{k}}$ är väntevärdet av antalet spinvågor (bosoner) i tillstånd $\vec{k}$.

Visa att magnetiseringen reduceras med en term som är proportionell mot $T^{3/2}$. (Tips: skriv om summan som en integral, och argumentera varför integrationsgränsen kan tas till $k \to \infty$.)

Lösning Tenta 070119, Termodynamik och statistisk fysik, FTF140

Uppgift 1

a) Entalpin $H = E + PV$ är bevarad.

b) För idealgas gäller $E = E(T)$ och $PV = \nu RT$ vilket ger $H = H(T)$. Konstant entalpi innebär alltså konstant temperatur, dvs $\alpha_{JT} = 0$.

Uppgift 2

Entropin ges av $S = -k \sum_r P_r \ln P_r$, där $\sum_r P_r = 1$. Skriv $P_1 = x$ och $P_2 = 1 - x$ vilket ger $f(x) = S/(-k) = x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)$ vilken då ska visas ha ett minimum för $x = 1/2$. $f'(x) = \ln x + 1 - \ln(1 - x) - 1 = \ln x - \ln(1 - x) = 0$ om $x = 1/2$. $f''(x) = 1/x + 1/(1 - x) > 0$. VSV

Uppgift 3

Verkningsgraden för kylskåpet är kvoten mellan värme som tas ut och arbete, $\beta = Q_{ut}/W = \dot{Q}_{ut}/\dot{W}$.

a) För konstant temperatur krävs alltså $\dot{Q} = \dot{Q}_{ut}$, dvs effekten $\dot{W} = \dot{Q}/\beta = 0.58kW$

b) Energikonservering ger att arbetet som kylaggregatet utför $\dot{W} = 0.58kW$ övergår i värme till köket, som alltså värms upp.

c) Entropiökningen ges av $\Delta S = Q/T$. Eftersom nettovärme endast går till köket fås entropiökningen $\Delta S = \dot{W}/T = 2J/(Ks)$.

Uppgift 4

a) Energin ges av $E = n\epsilon - (N - n)\epsilon = (2n - N)\epsilon$, där n respektive $1 - n$ är antalet partiklar i tillståndet med energi ϵ respektive $-\epsilon$. Energin $E = N_1\epsilon_1$ ger alltså $n = (N + N_1)/2$. Sannoliketen att en partikel har energi ϵ är alltså $n/N = \frac{1}{2}(1 + N_1/N)$.

b) Här gäller kanonisk fördelning $P_r = e^{-\beta\epsilon_r}/Z$ där $Z = \sum_r e^{-\beta\epsilon_r}$ och $\beta = 1/kT$, vilket ger $< E >= N(\epsilon e^{-\beta\epsilon} - \epsilon e^{\beta\epsilon})/Z = -N\epsilon \tanh(\beta\epsilon)$. Ur detta fås $T = -\epsilon/(k \tanh^{-1}(N_1/N))$

Uppgift 5

Processen är adabatisk, alltså ges arbetet av ändringen i inre energi. Bestäm först slut-tillståndet genom att använda masskonservering. I tillstånd (1) har vi torr mättad ånga vid $T_1 = 200^o$C, ur tabell fås $v_1 = 0.127m^3/kg$, vilket ger $m = V_1/v_1 = 24g$. I tillstånd (2) krävs alltså en specifik volym v_2 sådan att $V_2/v_2 = V_1/v_1$, dvs $v_2 = v_1(V_2/V_1) = 0.635m^2/kg$. Vi antar mättad ånga med massandel gas x. Ur tabell för $P_2 = 0.25MPa$ fås $v_{2,g} = 0.7187m^3/kg$ och $v_{2,f} = 0.001067m^3/kg$, vi behöver $v_2 = xv_{2,g} + (1-x)v_{2,f}$ vilket ger $x = 0.88$.

a) Ändringen i inre energi är då $\Delta E = mu_1 - m(xu_{2,g} + (1-x)u_{2,f})$. Ur tabell fås $u_1 = 2595kJ/kg$, $u_{2,g} = 2537kJ/kg$ och $u_{2,f} = 535kJ/kg$, vilket ger $\Delta E = 7.2kJ$

b) Arbetet på omgivningen uppstår pga expansionen mot atmosfärstrycket, alltså $W_{atm} = 0.1MPa(V_2 - V_1) = 1.2kJ$

Uppgift 6

Vi behöver visa $\sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \sim T^{3/2}$. Spinvågorna är bosoner, dvs följer Bose-Einstein fördelning $n_{\vec{k}} = 1/(e^{\beta\epsilon(k)} - 1)$ (här $\mu = 0$ ty likt fotoner och fononer är partikelantalet inte fixerat). Vi kan ersätta summan med en integral genom tillståndstätheten $(d^3k)/(2\pi)^3$ och eftersom temperaturen antas låg bidrar inte höga energier ($e^{\beta\epsilon(k)} \to \infty$ för $\epsilon(k) >> T$) och vi kan ta integrations gränsen till $k = \infty$.

$$\sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} \approx \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{e^{\beta\epsilon_0 a^2 k^2} - 1} = [x = \beta\epsilon_0 a^2 k^2] = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} (\frac{k_B T}{\epsilon_0 a^2})^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \sim T^{3/2}$$