Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för Teknisk Fysik
Mats Granath

Tentamen i Termodynamik och Statistisk fysik för F3(FTF140)

Tid och plats: Tisdag, 24e oktober 2006, kl. 14.00-18.00 i V-huset.
Kontaktperson: Mats Jonson, 7723188, 070-308 8070, *för frågor under pågående tenta.*
Examinator: Mats Granath, 7723175, 0708938077, mgranath@fy.chalmers.se
Hjälpmedel: BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, valfri räknedosa i fickformat.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.
Lösningar: Finns på kurshemsidan efter tentans slut.
Rättningsprotokoll: Anslås senast fredag 10/11 2006.
Rättningsgranskning: Måndag 13/11, kl 11.45-12.30, rum O7109B.

Uppgift 1

Svaren till dessa behöver inte motiveras. 2.5 poäng per uppgift.

A) Termodynamikens tredje lag säger att ett systems entropi går mot noll då temperaturen går mot noll. Vilket antagande är väsentligt för att härleda 3e lagen?
a) Systemets grundtillstånd är unikt.
b) Värmekapaciteten är konstant vid låga temperaturer.
c) Temperatursänkningen sker adiabatiskt.
d) Systemet kan beskrivas som klassiskt.

B) Väntevärdet av energin för en harmonisk oscillator med energin $\varepsilon = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\kappa x^2$ i ett värmebad ges av.
a) $\hbar\omega$ (där $\omega = \sqrt{\kappa/m}$) b) $\frac{3}{2}k_B T$
c) $k_B T$ d) $\frac{1}{2}k_B T$

C) En ideal gas i en låda med dimensionen $L \times L \times L$ består av ett stort antal partiklar med massa m där lägsta energi för en partikel ges av $\varepsilon_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$. För systemets kemiska potential gäller $\mu >> \varepsilon_0$. Systemet är då:
a) en klassisk idealgas. b) en degenererad bosegas.
c) slutet. d) en degenererad fermigas.

D) Stor kanonisk fördelning kan användas för att beskriva ett system med stort men begränsat partikelantal, därför att:
a) det slutna systemet följer mikrokanonisk fördelning.
b) partikelantalet fluktuerar relativt lite runt medelvärdet.
c) Fermitemperaturen är stor, $T_F >> T$.
d) ekvipartitionspricipen gäller.

Uppgift 2

En klassisk idealgas komprimeras adiabatiskt från en volym V_i och tryck P_i till en volym $V_f = V_i/2$.

i) Beräkna trycket P_f om kompressionen sker kvasistatiskt. (5p)

ii) Vad gäller för trycket P_f för en verklig, dvs icke kvasistatiskt, kompression under i övrigt samma förutsättningar? (5p)

Uppgift 3

Den så kallade Grüneisenparametern, γ, beskriver hur vibrationsfrevensen hos en gittervibration (fonon) i ett fast ämne beror på volymen genom

$$\gamma = -\frac{\partial \ln \omega}{\partial \ln V}$$

En modell för att beräkna kompressibilitet och termisk utvidgning hos ett fast ämne kan beseras på en beskrivning av ämnet som en fonongas, dvs en gas av gittervibrationer.

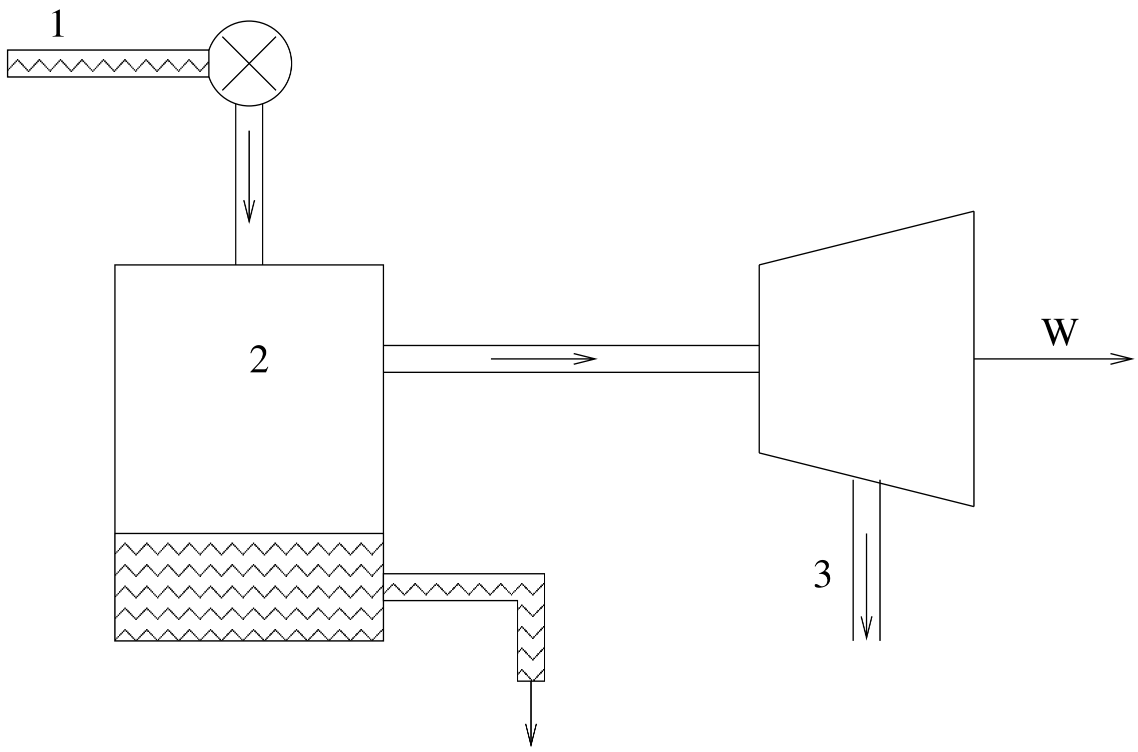
i) Beräkna trycket för en fonongas per mol av ett fast ämne. Använd Einsteinmodellen där varje atom representeras av tre oberoende harmoniska kvantoscillatorer med vinkelfrekvens $\omega = \omega_E$. (8p)

ii) Härled följande tillståndsekvationer för höga respektive låga temperaturer:
$PV = 3\gamma RT$ och $PV = \frac{3}{2}\gamma RT_E$. (2p)

Uppgift 4

En geotermisk källa utnyttjas för att driva en ångturbin enligt skissen. Vatten i vätskeform vid högt tryck, $P_1 = 1.5\text{MPa}$, som befinner sig i kokpunkten passerar genom en adiabatisk strypventil och kommer ut som mättad gas och vätska vid ett lägre tryck $P_2 = 400\text{kPa}$. Gasen passerar (utan värmeförluster) genom turbinen som ger en effekt $\dot{W} = 1\text{MW}$. Mättad ånga lämnar turbinen vid ett tryck $P_3 = 10\text{kPa}$ och en kvalitet (dvs massandelen gas) 90%.

Hur mycket varmvatten per sekund, (kg/s), tas från den varma källan? (10p)



Uppgift 5

Betrakta en mol av en enatomig klassisk idealgas i en behållare med en rörlig vägg (en kolv) omgiven av luft. Omgivningen har ett tryck P_0 och temperatur T_0 medan gasen i behållaren har tryck P_i och temperatur T_i. Det maximala nyttiga arbete som kan fås ur systemet ges av minus ändringen i exergi (tillgänglighet), $A = E + P_0V - T_0S$, då systemet uppnått jämvikt.

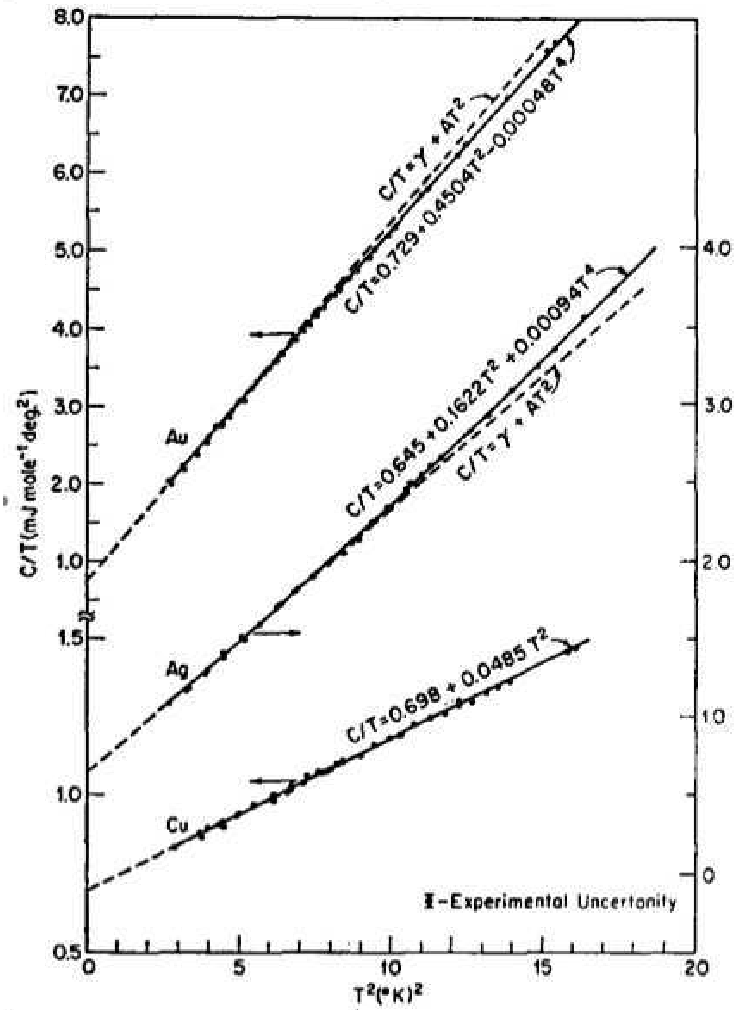
i) Beräkna det maximala nyttiga arbetet som kan fås ur systemet. Skriv svaret som funktion av T_0 och kvoterna $\mathbf{x_T = T_i/T_0}$ och $\mathbf{x_P = P_0/P_i}$.(4p)

ii) Givet $T_i = T_0$ ($x_T = 1$) visa att det maximala nyttiga arbetet är positivt oberoende av ursprungstrycket P_i, så länge $P_i \neq P_0$ ($x_P \neq 1$) (3p)

iii) För att få ut det maximala arbetet i det allmäna fallet $T_i \neq T_0$ och $P_i \neq P_0$ krävs att förändringen sker i två distinkta steg, vilka? (3p)

Uppgift 6

Figuren visar värmekapaciteten för tre ädelmetaller vid låga temperaturer (från L.L. Isaacs, J. Chem. Phys. vol 43, p 307, 1965). Plottat är C_v/T $(10^{-3} J mole^{-1} K^{-2})$ som funktion av T^2 (K^2).
Med hjälp av figuren uppskatta *densitet* och *ljudhastighet* hos silver. (10p)
(Ädelmetaller har en ledningselektron per atom.)



Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för Teknisk Fysik
Mats Granath

Lösningar, Tentamen FTF140, 20061024

Uppgift 1

a) a
b) c
c) d
d) b

Uppgift 2

i) För adiabatisk och kvasistatisk förändring i idealgas gäller PV^γ, där $\gamma = C_P/C_V$. Vilket ger $P_{f,q.s.} = 2^\gamma P_i$

ii) Här gäller $đW > -PdV$. För adiabatisk gäller $dE = đW$, dvs $dE > dE_{q.s}$ vilket ger $T_f > T_{f,q.s}$ så att $P_f > P_{f,q.s.}$. Sluttrycket blir högre.

Uppgift 3

i) Beräkna trycket ur $P = (-\frac{\partial F}{\partial V})_T = k_B T (\frac{\partial \ln Z}{\partial V})_T$. För $3N_A$ harmoniska oscillatorer har vi $Z = Z_1^{3N_A}$ med

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2}+n)} = \frac{2}{\sinh \beta\hbar\omega/2}$$

Vi får alltså

$$\begin{aligned} P &= -3N_A k_B T \frac{\partial \ln \sinh(\beta\hbar\omega/2)}{\partial V} \\ &= -3N_A k_B T \coth(\beta\hbar\omega/2)\frac{1}{2}\beta\hbar\frac{\partial\omega}{\partial V} \\ &= \frac{3}{2}N_A\frac{\hbar\omega}{V}\gamma\coth(\beta\hbar\omega/2) \end{aligned}$$

ii) Höga temperaturer $T >> T_E$ eller $\beta\hbar\omega << 1$ ger $\coth(\beta\hbar\omega/2) \approx \frac{2}{\beta\hbar\omega}$, dvs $PV = 3\gamma RT$

Låga temperaturer $T << T_E$ eller $\beta\hbar\omega >> 1$ ger $\coth(\beta\hbar\omega/2) \approx 1$, dvs $PV = \frac{3}{2}\gamma R\frac{\hbar\omega}{k} = \frac{3}{2}\gamma R T_E$

Uppgift 4

Vi följer flödet och använder $\Delta h = q - w$. Entalpivärdena tas ur tabell för mättad ånga.

1→2 Adiabatisk ventil ger $h_1 = h_2$. Vi har $h_1 = 845kJ/kg$ och $h_2 = xh_{g,2} + (1-x)h_{f,2}$ där x är massandel gas, $h_{g,2} = 2739kJ/kg$ och $h_{f,2} = 605kJ/kg$. Vi kan då lösa ut $x = \frac{h_1 - h_{f,2}}{h_{g,2} - h_{f,2}} = 0.11$ vilket är den del av entalpin som går vidare.

2→3 För att få ut effekten måste vi ta in massflödet. Vi definierar $\dot{m}$ som flödet in i 1, flödet in och ur turbinen är då $x\dot{m}$. Energikonservering ger $x\dot{m}h_{g,2} = \dot{W} + x\dot{m}(0.9h_{g,3} + 0.1h_{f,3})$ där $h_{g,3} = 2585kJ/kg$ och $h_{f,3} = 192kJ/kg$. Vi löser ut

$$\dot{m} = \frac{\dot{W}}{x(h_{g,2} - 0.9h_{g,3} - 0.1h_{f,3})} = 23kg/s$$

Uppgift 5

i) $(W_{ut})_{max} = -\Delta A = -\Delta E - P_0\Delta V + T_0\Delta S$, där sluttillståndet är $T = T_0$ och $P = P_0$. För enatomig idealgas: $\Delta E = 3/2R\Delta T = 3/2R(T_0 - T_i)$, $\Delta V = V_f - V_i = R(T_0/P_0 - T_i/P_i)$, $\Delta S = R(\ln V_f/V_i + 3/2 \ln T_0/T_i)$, vilket ger

$$(W_{ut})_{max} = RT_0(3/2x_T + x_T x_P - 5/2 - 5/2 \ln x_T - \ln x_P)$$

ii) Här har vi $f(x) = (W_{ut})_{max}/(RT_0) = x - 1 - \ln x$. $f'(x) = 1 - 1/x$ och $f''(x) = 1/x^2 > 0$. Vi har alltså ett minimum vid $x = 1$, dvs vid $P_i = P_0$ där $(W_{ut})_{max} = 0$.

iii) Förändringen måste vara reversibel, vilket innebär att all värmeöverföringen måste ske vid konstant temperatur. Krävs alltså en adiabatisk expansion/kompression till $T = T_0$ och en isoterm expansion/kompression till $P = P_0$.

Uppgift 6

Vi använder värmekapaciteten från ledningselektroner $C_v = \gamma T$, med $\gamma = N_A \frac{\pi^2 k_B}{2T_F}$, och Debye modellens $C_v = AT^3$, där $A = N_A \frac{12\pi^4 k_B}{5T_D^3}$. Här är $T_F = \frac{h^2}{2mk_B}(\frac{3}{8\pi}n)^{2/3}$ och $T_D^3 = \frac{6\pi^2 n\hbar^3 v_s^3}{k_B^3}$, där n är elektron respektive atom täthet vilka är lika eftersom det är en elektron per atom.

Ur figuren tar vi $\gamma = 0.645 \times 10^{-3} J/K^2$ och $A = 0.1622 \times 10^{-3} J/K^4$.

Från γ löser vi ut tätheten $n = \frac{8\pi}{3}(\frac{\pi^2 k_B^2 m}{\gamma h^2})^{3/2} = 5.8 \times 10^{28}/m^3$ viket ger en densitet $\rho = \mathbf{10.5 \times 10^3 kg/m^3}$. Från A löser vi ut ljudhastigheten $\mathbf{v_s} = (\frac{\mathbf{2\pi^2 k_B^4 N_A}}{\mathbf{5nAh^3}})^{\mathbf{1/3}} = \mathbf{1984m/s}$