

## Tentamen i Termodynamik och statistisk för F3(FTF140)

**Tid och plats:** Torsdagen den 20 april 2006, kl. 8.30-12.30 i V-huset.

**Examinator:** Mats Granath, 7723175, 0708938077, mgranath@fy.chalmers.se

**Hjälpmedel:** BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Finns på kurshemsidan efter tentans slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås senast onsdag 3/5 2006.

**Rättningsgranskning:** Efter överenskommelse med examinator, rum O7109B.

### Uppgift 1

Svaren till dessa behöver inte motiveras. 2.5 poäng per uppgift.

**A)** Ett system har energinivåer  $E_r$  med motsvarande magnetisering  $M_r$  och är i jämvikt med ett värmebad vid temperatur  $T$ . Vad är väntevärdet av systemets magnetisering?

a)  $\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$

b)  $\sum_r M_r e^{-E_r/kT} / \sum_r e^{-E_r/kT}$

c)  $-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

d)  $\sum_r M_r$

**B)** Vilket ord saknas i följande formulering av termodynamikens andra lag: Entropin för ett "...” system kan inte minska.

a) expanderande

b) idealt

c) isolerat

d) verkligt

**C)** Vilket bidrag till värmekapaciteten per molekyl av en diatomär ideal gas fås från rotationer runt molekylens masscentrum i gränsen  $T \rightarrow \infty$  ?

a)  $2k_B$

b)  $k_B$

c)  $C_p$

d)  $\beta$

**C)** Einsteins modell för värmekapaciteten hos ett fast ämne ger inte rätt temperaturberoende vid låga temperaturer. Varför?

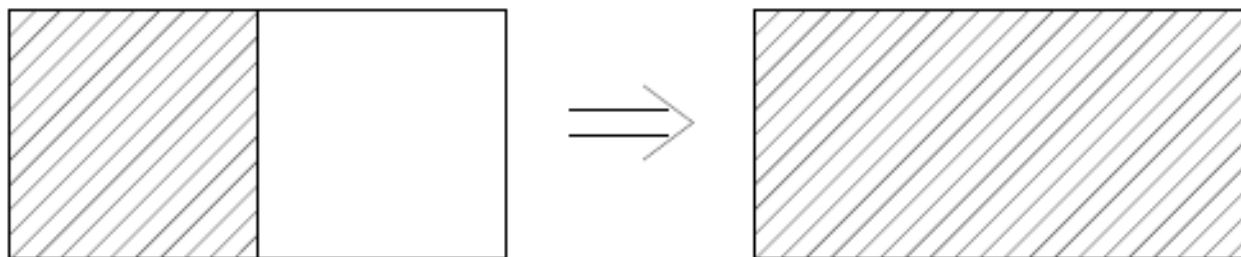
a) gittervibrationer med låga energier tas inte hänsyn till

b) modellen innehåller inte en korrekt kvantmekanisk formulering

c) modellen tar inte hänsyn till ekvipartitionsprincipen

d) den så kallade Einsteintemperaturen är fel

## Uppgift 2



Figuren illustrerar ett klassiskt exempel på en adabatisk men ickereversibel process. En värmeisolerad låda är partitionerad i två lika stora delar som båda har volymen  $V_0$ . Den ena halvan innehåller en mol ideal gas vid trycket  $P_0$  och den andra är tom. Partitionen tas bort plötsligt och gasen är slutligen i jämvikt i hela lådan.

- Beräkna gasens temperatur och tryck i sluttillståndet. (5p)
- Antag istället att gasen kan utbyta värme med omgivningen och att partitionen förflyttas långsamt så att gasen hela tiden är i jämvikt, men att sluttillståndet är det samma som ovan. Hur mycket arbete får man då ut ur expansionen? (5p)

## Uppgift 3

En värmeisolerad cylinder innehåller 1 liter mättad vattenånga vid temperatur  $T_0=30^\circ\text{C}$ .

- Vad är trycket i cylindern? (2p)

Trycket i kolven ökas långsamt (reversibelt) till  $P_1=400\text{kPa}$ .

- Vad är vattnets temperatur  $T_1$ . (6p)
- Antag att kompressionen sker snabbt så att den inte kan beskrivas som reversibel. Vad kan man då säga om temperaturen  $T_1$  vid trycket  $P_1$ ? (2p)

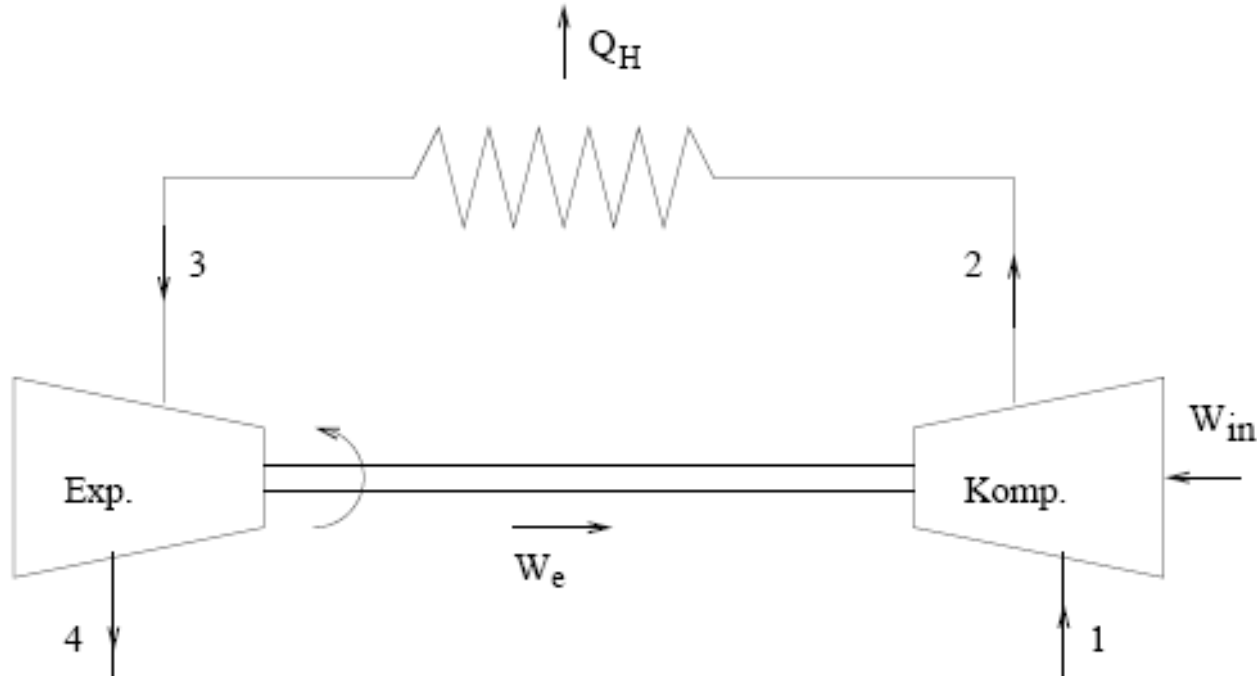
## Uppgift 4

En diatomär molekyl har  $(2j + 1)$ -faldigt degenererade rotationsenerginivåer

$$\epsilon_j = k_B \theta_{\text{rot}} j(j + 1), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

där  $\theta_{\text{rot}}$  är en molekylspecifik konstant.

- Skriv ner ett uttryck för sannolikheten,  $P_j$ , att molekylen finns i ett tillstånd med energin  $\epsilon_j$ . (4p)
- För kolmonoxid CO gäller  $\theta_{\text{rot}} = 2.77\text{K}$ . Bestäm den mest sannolika rotationsenergin för en CO-molekyl vid 10K respektive 300K. (6p)



### Uppgift 5

En luftkonditioneringsapparat kan fungera enligt ovan figur. Varm luft vid temperatur  $T_1$  och tryck  $P_1$  komprimeras adiabatiskt till ett tryck  $P_2 > P_1$ . Luften kyls av vid konstant tryck,  $P_3 = P_2$ , till en temperatur  $T_3 = T_2 - \alpha(T_2 - T_1)$ , där  $\alpha$  är en konstant  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Därefter expanderar luften adiabatiskt till atmosfärstryck ( $P_4 = P_1$ ) genom en rotor som hjälper till att driva kompressorn utan energiförluster. Luften kan behandlas som en ideal gas med konstant  $\gamma = C_p/C_v = 1.4$  och alla adiabatiska processer kan antas reversibla.

- a) Härled ett uttryck för sluttemperaturen  $T_4$  i termer av  $T_1$  och kvoten  $x = P_2/P_1$ . (4p)
- b) Vad är den maximala relativa temperatursänkningen  $\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_1 - T_4}{T_1}$  som kan uppnås? (2p)
- c) Härled uttrycket  $\beta = \frac{1}{x^\gamma - 1}$  där  $\beta$  är verkningsgraden för kylprocessen och  $\delta = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ . ( $\beta$  är alltså kvoten mellan förändringen i luftens "värmeinnehåll" och tillfört arbete  $W_{in}$ ) (4p)

### Uppgift 6

Med hjälp av halvledarteknik kan man skapa system där elektroner begränsas till att röra sig på ett två-dimensionellt plan. Elektronerna bildar då en så kallad två-dimensionell elektrongas (2DEG). Typiska tätheter för elektronerna i en sådan 2DEG kan vara  $10^{17}$  elektroner/m<sup>2</sup>.

- a) Härled Fermienergin för en 2DEG uttryckt i elektrontätheten, givet fria icke-relativistiska elektroner ( $\epsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$ ). (8p)
- b) Beräkna Fermitemperaturen givet elektrontäthet enligt ovan. Om man bortser från växelverkan, kan då elektrongasen beskrivas som en klassisk idealgas om systemets temperatur är 1K? (2p)

## Lösningar, Tentamen FTF140, 20060420

### Uppgift 1

- a) b
- b) c
- c) b
- d) a

### Uppgift 2

- a) För ett isolerat system gäller  $E = \text{konstant}$  och för idealgas  $E = E(T)$ . Alltså sluttemperatur  $T_1 = T_0 = P_0 V_0 / R$ .
- b) Reversibel isoterm process för idealgas, arbetet på gasen  $dW = -PdV = -RT_0 dV/V$ . Alltså fås arbete  $W_{\text{ut}} = \int_{V_0}^{2V_0} RT_0 dV/V = RT_0 \ln 2$

### Uppgift 3

Använd tabell för vatten.

- a) Mättad ånga vid  $30^\circ\text{C}$  svara mot ett tryck på **4.25kPa**
- b) Reversibel adiabatisk process, dvs entropin bevarad. Ur tabell fås  $s_0 = 8.45 \text{kJ/kgK}$ . För att få samma entropi för samma mängd vatten vid 400kPa krävs överhettad ånga. Ur tabell fås  **$T \approx 600^\circ\text{C}$**
- c) Adibatisk ickereversibel innebär  $dS > 0$ . Sluttemperaturen blir alltså högre,  **$T > 600^\circ\text{C}$**

### Uppgift 4

- a)  $P_j = (2j + 1)e^{-\beta\epsilon_j} / Z$  där  $Z = \sum_j (2j + 1)e^{-\beta\epsilon_j}$  och  $\beta = 1/kT$ .
- b) Maximum fås från  $\frac{dP_j}{dj} = 0$  eller  $\frac{d \ln P_j}{dj} = 0$  vilket ger ( $Z = Z(T)$  är oberoende av  $j$ )  
 $0 = \frac{2}{2j+1} - \beta k \theta_{\text{rot}} (2j + 1)$ . Vi får alltså  **$2j + 1 = \sqrt{2T/\theta_{\text{rot}}}$  vilket ger  $j=1$  och  $j=7$  vid 10K respektive 300K.**

### Uppgift 5

För adiabatisk förändring av idealgas gäller  $PV^\gamma = \text{konstant}$  eller  $TP^{-\delta} = \text{konstant}$  där  $\delta = (\gamma - 1)/\gamma > 0$ . För stationärt flöde har vi första lagen  $\Delta h = q + w$  där  $\Delta h$  är ändringen

i (specifik) entalpi,  $q$  är tillförd värme och  $w$  tillfört arbete. För klassisk idealgas gäller också  $\Delta h = c_p \Delta T$ .

a) Både expansionen och kompressionen sker adiabatiskt vilket ger  $T_4 P_4^{-\delta} = T_3 P_3^{-\delta}$  och  $T_2 P_2^{-\delta} = T_1 P_1^{-\delta}$ . Vi har dessutom givet  $P_4 = P_1$ ,  $P_3 = P_2$  och  $T_3 = T_2 - \alpha(T_2 - T_1)$ . Efter lite aritmetik fås  $T_4 = T_1(1 - \alpha + \alpha x^{-\delta})$ .

b)  $\Delta T/T_1 = \alpha(1 - x^{-\delta})$  vilket ger  $(\Delta T/T_1)_{\max} = \alpha$  för  $P_2 \rightarrow \infty$ .

c) Verkningsgraden ges av  $\beta = \frac{h_1 - h_4}{w_{in}}$  där  $h_1 - h_4 = c_p(T_1 - T_4)$  och  $w_{in} = w_{komp.} - w_e = c_p(T_2 - T_1) - c_p(T_3 - T_4)$ . Med hjälp av räkningarna från a) får vi  $c_p(T_1 - T_4) = c_p T_1 \alpha(1 - x^{-\delta})$  och  $w_{in} = \dots = c_p T_1 \alpha(x^\delta - 2 + x^{-\delta})$  vilket ger  $\beta = \frac{1 - x^{-\delta}}{x^\delta - 2 + x^{-\delta}} = \dots = \frac{1}{x^\delta - 1}$ .

## Uppgift 6

a) Fermienergin  $\epsilon_F$  fås från  $N = \int_0^{\epsilon_F} f(\epsilon) d\epsilon$  där  $f(\epsilon)$  är tillståndstätheten som vi alltså behöver beräkna. Tillståndstätheten i varje riktning i  $k$ -rummet och per spinpolarisation ges av  $\frac{L}{2\pi} dk$  vilket i två dimensioner ger  $f(k) d^2 k = 2 \frac{L^2}{4\pi^2} d^2 k = \frac{L^2}{\pi} k dk$ . Med  $\epsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$  och  $d\epsilon = \hbar^2 k dk / m$  får vi alltså  $f(\epsilon) d\epsilon = \frac{L^2 m}{\pi \hbar^2} d\epsilon$ . Vi kan då utföra integralen vilket ger  $\epsilon_F = n \frac{\pi \hbar^2}{m}$  där  $n = N/L^2$  är elektrontätheten.

b) Givet tätheten  $n = 10^{17} 1/m^2$  kan vi beräkna  $T_F = \epsilon_F / k = 2784 K$ . För att beskriva en Fermivätska som en klassisk idealgas krävs  $T \gg T_F$ , vilket alltså inte är fallet vid  $T = 1 K$ .