Chalmers Tekniska Högskola
Institutionen för Teknisk Fysik
Mats Granath

Tentamen i Termodynamik och statistisk för F3(FTF140)

Tid och plats: Onsdagen den 14 december 2005, kl. 8.30-12.30 i V-huset.
Examinator: Mats Granath, tel. 7723175, 0708938077
Hjälpmedel: BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, valfri räknedosa i fickformat.
Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.
Lösningar: Finns på kurshemsidan efter tentans slut.
Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast måndag 9/1 2006.
Rättningsgranskning: Måndag 16/1 kl 12.00-12.30 i rum O7109B (Mats Granath).

Uppgift 1

Svaren till dessa behöver inte motiveras. 2.5 poäng per uppgift.

A) En ideal gas expanderar adiabatiskt och kvasistatiskt mellan ett tillstånd i och ett tillstånd f. Vilket av följande påståenden är *falskt*:
a) Ingen värme flödar in eller ut från systemet
b) Gasens entropi är konstant, $S_i = S_f$
c) Ändringen av gasens inre energi ges av $-\int_i^f PdV$
d) Gasens temperatur är konstant, $T_i = T_f$

B) Givet ett system i termisk jämvikt vid temperatur T som har kvantillstånd i med energier E_i. Vad representerar följande uttryck: $\sum_i E_i e^{-E_i/kT} / \sum_i e^{-E_i/kT}$
a) Tillståndssumman
b) Sannolikhet att systemet har energi E_i
c) Väntevärdet av energin
d) Systemets entropi

C Den genomsnittliga kinetiska energin för ledningselektronerna i en metall är mycket större än kT. Varför?
a) Elektronerna har en extra spinn-frihetsgrad.
b) Elektronerna är inte i termisk jämvikt med gittret.
c) Elektronerna bildar en degenererad fermigas
d) Elektronerna har relativistiska hastigheter

D En mix av syrgas O_2 och kvävgas N_2 hålls vid konstant temperatur. Vad är förhållandet $\frac{|\vec{v}(O_2)|}{|\vec{v}(N_2)|}$ mellan genomsnitliga farten för molekylerna?
a) $8/7$ b) $\sqrt{8/7}$
c) $(8/7)^2$ d) $\sqrt{7/8}$

Uppgift 2

Ett kilo vatten i form av is vid 0^oC värms på en spis i ett vanligt kök där det är 20^oC. Vattnet förångas i kastrullen men någon har glömt sätta på spisfläkten så vattnet kondenseras på väggarna i köket. Hur mycket har entropin för vattnet ändrats ett par minuter efter att allt vatten kokat ur kastrullen? Man kan anta att vattnets värmekapacitet i vätskefasen är oberoende av temperatur. (10p)

Uppgift 3

En solpanel som utvinner värme från solstrålningen bör utformas så att den absorberar så mycket av solens strålning som möjligt samtidigt som värmeförlusterna på grund av strålning från panelen minimeras.

Den utstrålade effekten per areaenhet från panelen P_e kan skrivas

$$P_e(\omega, T) = \alpha(\omega, T) P_{s.k.}(\omega, T)$$

där $P_{s.k.}(\omega, T) = \frac{1}{4} c u_{s.k}(\omega, T)$ är effekten från en svartkroppstrålare och $u_{s.k}(\omega, T)$ är energitätheten enligt Planks strålningslag. Funktionen $0 \leq \alpha(\omega, T) \leq 1$ är absorbtionskoefficienten som bestämmer hur stor andel av infallande strålning med frekvensen ω som absorberas av panelen om denna har en temperatur T. Antag panelens temperatur $T = 300K$ och att solen kan approximeras som en svartkroppsstrålare vid $T_s = 6000K$

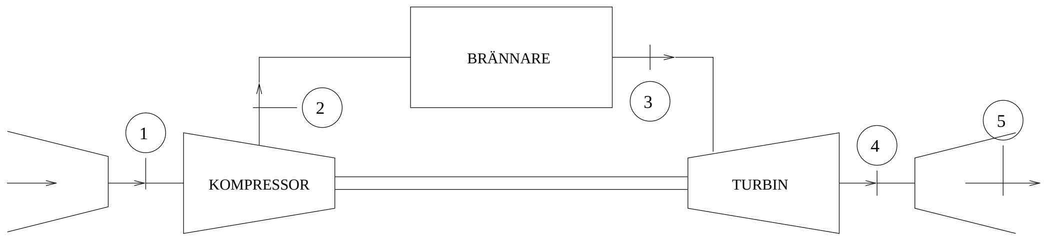
Beskriv kvalitativt hur absorbtionskoefficienten för panelen bör se ut som funktion av frekvensen? Beräkna vid vilka frekvenser α ska vara stor respektive liten. (10p)

Uppgift 4

En vit dvärg är ett extremt kompakt astronomiskt objekt som består i huvudsak av joniserade atomer och elektroner. Det termiska trycket är försumbart och istället är det trycket från den starkt degenererade elektrongasen som balanserar gravitationen. För en icke-relativistisk elektrongas där fermihastigheten är mycket lägre än ljushastigheten ($v_F << c$) gäller för trycket $P_e = 2/5(N/V)\epsilon_F \sim \rho^\Gamma$ med $\Gamma = 5/3$ och där $\rho = N/V$ är elektrongasens densitet. Man kan visa att för stabilitet krävs $\Gamma > 4/3$ vilket alltså innebär att dvärgen normalt är stabil. Dock ökar fermihastigheten med densiteten så att för tillräckligt höga densiteter blir elektronerna relativistiska, $v_F \approx c$

Härled trycket för en fullständigt degenererad ($T = 0$) fermigas i den extremt relativistiska gränsen där energin ges av $\epsilon = pc$. Är dvärgen stabil i denna gräns? (10p)

Uppgift 5



Figuren visar en skiss av en jetmotor. Luft flödar in vid atmosfärstryck ($P_1 = 0.1$MPa) i munstycket och komprimeras adabatiskt. Förbränningen sker vid konstant tryck varefter gasen expanderar adiabatiskt genom turbinen. Trycket (P_4) efter turbinen är just sådant att arbetet som fås ur turbinen är lika stort som arbetet som krävs för att driva kompressorn. Efter turbinen expanderar gasen igen adiabatiskt till atmosfärstryck ($P_5 = 0.1$MPa).

Antag att man kan behandla luften som en idealgas med värmekapaciteter $C_p = 1.0kJkg^{-1}K^{-1}$ och $C_v = C_p/1.4$, att gasen flödar långsamt in i kompressorn och att alla adiabatiska processer kan antas vara reversibla. Antag temperatur vid inflödet $T_1 = 15^oC$, tryck efter kompressorn $P_2 = P_3 = 1.0$MPa och maximal temperatur efter förbränningen $T_3 = 1100^oC$. (Tips: kom ihåg H=H(T) för ideal gas.)

a) Beräkna trycket efter generatorn (P_4). (7p)
b) Beräkna utgångshastigeten av luften efter expansion i munstycket (5). (3p)

Uppgift 6

Ett fast enatomigt ämne placeras in en vakuumbehållare vid en temperatur T. Efter ett tag uppnås jämvikt i behållaren då en viss del av ämnet är i gasform. Jämvikt ges som bekant av att Gibbs fria energi per atom ska vara lika i de båda faserna vilket för given temperatur T svarar mot ett visst tryck P.

a) Antag att varje atom i det fasta ämnet har en bindningsenergi ϵ_0 och har vibrationsfrihetsgrader som kan beskrivas som en 3-dimensionell harmonisk oscillator med frekvens ω_E. En atom har alltså energispektrum $\epsilon = -\epsilon_0 + \hbar\omega_E(n_x + n_y + n_z)$ där $n_x, n_y, n_z \geq 0$. Beräkna Gibbs fria energi per atom utryckt i ω_E, ϵ_0 och T givet att man kan försumma den specifika volymen i den fasta fasen. (5p)

b) Skriv ner Gibbs fria energi per atom för gasen i termer av atommassa, temperatur och tryck givet att den kan behandlas som en enatomig idealgas.(3p)

c) Med hjälp av (a) och (b) skriv ner ett utryck för ångtrycket P. (2p)

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för teknisk fysik
Göran Niklasson

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2005-12-14

Lösningar

Uppgift 1

(A): d

(B): c

(C): c

(D): d

Uppgift 2

Begynnelsetillstånd: is vid temperaturen $T_i = 273$ K.

Sluttillstånd: vatten vid temperaturen $T_f = 293$ K (förutsatt att temperaturen på väggytan är densamma som inuti köket).

Entropiändringen beror bara på begynnelsetillstånd och sluttillstånd. Vi behöver inte bry oss om hur processen i detalj har gått till utan kan räkna på en enklare process som tar oss direkt från begynnelsetillstånd till sluttillstånd. Entropiändringen kan då skrivas som

$$\Delta S = \frac{ml}{T_i} + \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc_p dT}{T} = \frac{ml}{T_i} + mc_p \ln \frac{T_f}{T_i}$$

där m är vattnets massa, l är smältentalpiteten och c_p är den isobariska värmekapacitiviteten för vatten.

Siffervärden: $m = 1$ kg, $l = 333 \cdot 10^3$ J/kg, $c_p = 4{,}19 \cdot 10^3$ J/kg·K, T_i och T_f enligt ovan. Insättning i formeln ovan visar att smältningen ger en entropiändring på 1,22 kJ/kg och uppvärmningen av vattnet ger 0,30 kJ/K, d.v.s. sammanlagt 1,52 kJ/K.

Svar: Entropiändringen är 1,52 kJ/K.

Uppgift 3

Panelen bör ha maximal absorbtionsförmåga i det frekvensområde där solstrålningens intensitet är större än utstrålningen och minimal absorbtionsförmåga (och därmed också minimal emissionsförmåga) i det område där utstrålningens intensitet är större. Enligt Wiens förskjutningslag gäller att funktionen $u_{s.k.}(\omega,T)$ har sitt maximum vid vinkelfrekvensen ω_m, given av uttrycket

$$\omega_m = 2{,}82144 \frac{k_B T}{\hbar}$$

Med $T = 6000$ K fås $\omega_m = 2{,}22 \cdot 10^{15}$ rad/s, och med $T = 300$ K fås $\omega_m = 1{,}11 \cdot 10^{14}$ rad/s. Absorbtionskoefficienten $\alpha(\omega)$ bör alltså om möjligt vara noll vid små vinkelfrekvenser (upp till 10^{14} eller 10^{15} rad/s) och 1 vid högre vinkelfrekvenser.

[Om man vill avgöra exakt var gränsen ω_C skall gå måste man först ta reda på intensiteten I_o hos den infallande solstrålningen och sedan numeriskt lösa ekvationen

$$\frac{I_o}{\sigma T_s^4} u_{s.k.}\left(\omega_C, T_s\right) = u_{s.k.}\left(\omega_C, T_p\right)$$

där σ är Stefan-Boltzmanns konstant, T_s är solens temperatur och T_p är panelens temperatur. Med $I_o = 1\cdot10^3$ J/m^2 fås $\omega_C = 4{,}3\cdot10^{14}$ rad/s.]

Förslag: $\alpha(\omega) = 0$ i området $\omega < 4\cdot10^{14}$ rad/s, och $\alpha(\omega) = 1$ i området $\omega > 4\cdot10^{14}$ rad/s.

Uppgift 4

Trycket p bestäms av formeln

$$p = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T,N}$$

Egentligen är det Helmholtz fria energi F som skall deriveras, men för en fullständigt degenererad fermigas gäller att $F = E$, eftersom entropin är noll.

Energin per partikel för en degenererad elektrongas ges av uttrycket

$$\frac{E}{N} = \frac{\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon f(\varepsilon)\, d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_F} f(\varepsilon)\, d\varepsilon}$$

där $f(\varepsilon)$ är tillståndstätheten för enpartikeltillstånden (orbitaltätheten). Denna är relaterad till tillståndstätheten f_p i p-rummet (p = rörelsemängdens belopp) genom sambandet

$$f(\varepsilon) = f_p \frac{dp}{d\varepsilon}$$

Funktionen f_p bestäms enbart av randvillkoren och de Broglies relation mellan våglängd och rörelsemängd. Villkoret är detsamma i den relativistiska gränsen som i den icke-relativistiska. Uttrycket för f_p är i båda fallen

$$f_p = 2V\frac{4\pi p^2}{h^3} = V\frac{8\pi p^2}{h^3}$$

där faktorn 2 kommer från antalet spinntillstånd. Med $p = \varepsilon/c$ ger detta

$$f(\varepsilon) = V\frac{8\pi\varepsilon^2}{c^3h^3}$$

Alltså finner vi att

$$\frac{E}{N} = \frac{\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^3 d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^2 d\varepsilon} = \frac{3}{4}\varepsilon_F \qquad \text{d.v.s.} \qquad E = \frac{3}{4}N\varepsilon_F$$

Fermienergin ε_F bestäms av villkoret

$$N = \int_0^{\varepsilon_F} f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{8\pi V}{c^3h^3}\int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{8\pi V}{3c^3h^3}\varepsilon_F^3$$

Slutsatsen är att ε_F är proportionell mot $(N/V)^{1/3}$. Trycket p kan därför skrivas som

$$p = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{E}{3V} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{V}}\varepsilon_{\mathrm{F}} = \frac{1}{8}\left(\frac{3c^3h^3}{\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}$$

Vi finner alltså att $\Gamma = 4/3$.

Svar: Den vita dvärgen är instabil i den extremt relativistiska gränsen.

Uppgift 5

Kompressorn: Här genomgår luften en adiabatisk process från begynnelsetillståndet (p_1 = 0,1 MPa, T_1 = 15°C = 288 K) till sluttillståndet (p_2 = 1,0 MPa, T_2 = ?). Ur sambandet mellan p och T vid en adiabatisk process finner vi att

$$T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-1/\gamma} = 288\cdot 10^{1-1/1,4}\ \text{K} = 556\ \text{K} = 283\ °\text{C}$$

Det arbete w_k som krävs för att driva kompressorn är lika med ökningen i entalpi för gasen. För en ideal gas gäller att ändringen i entalpi per grad temperaturhöjning är lika med den isobariska värmekapaciteten. Räknat per kg gas finner vi alltså att

$$w_k = c_p\left(T_2 - T_1\right) = 1,0\cdot 10^3\cdot\left(556-288\right)\ \text{J/kg} = 268\cdot 10^3\ \text{J/kg}$$

Brännaren: Här tillförs värme så att temperaturen stiger till T_3 = 1100°C = 1373 K. Trycket förblir oförändrat ($p_3 = p_2$ = 1,0 MPa).

Turbinen: Här expanderar gasen adiabatiskt från begynnelsetillståndet (p_3 = 1,0 MPa, T_3 = 1100°C = 1373 K) till sluttillståndet (p_4 = ?, T_4 = ?). Villkoret att turbinarbetet w_t skall vara lika med kompressorarbetet w_k bestämmer sluttemperaturen T_4:

$$w_t = c_p\left(T_3 - T_4\right) = w_k = c_p\left(T_2 - T_1\right)$$

$$T_4 = T_3 - T_2 + T_1 = \left(1373 - 556 + 288\right)\ \text{K} = 1105\ \text{K} = 832\ °\text{C}$$

Sluttrycket p_4 fås ur sambandet mellan p och T vid en adiabatisk process:

$$p_4 = p_3\left(\frac{T_4}{T_3}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1,0\cdot\left(\frac{1105}{1373}\right)^{\frac{1,4}{0,4}}\ \text{MPa} = 0,468\ \text{MPa}$$

Munstycket: Här expanderar gasen adiabatiskt från begynnelstillståndet (p_4 = 0,476 MPa, T_4 = 832°C = 1105 K) till sluttillståndet (p_5 = 0,1 MPa, T_5 = ?). Sluttemperaturen fås ur sambandet mellan p och T vid en adiabatisk process:

$$T_5 = T_4\left(\frac{p_5}{p_4}\right)^{1-1/\gamma} = 1105\cdot\left(\frac{0,1}{0,468}\right)^{1-1/1,4}\ \text{K} = 711\ \text{K} = 438\ °\text{C}$$

Den energi som frigörs i form av rörelseenergi för avgaserna är lika med minskningen i entalpi. Härur kan luftens utströmningshastighet v bestämmas:

$$\frac{1}{2}v^2 = c_p\left(T_4 - T_5\right)$$

$$v = \sqrt{2c_p\left(T_4 - T_5\right)} = \sqrt{2\cdot 1,0\cdot 10^3\cdot\left(1105-711\right)}\ \text{m/s} = 887\ \text{m/s}$$

Svar: (a) 0,47 MPa; (b) 0,89 km/s

Uppgift 6

(a) Om specifika volymen kan försummas blir Gibbs fria energi g per atom lika med Helmholtz fria energi f per atom, som vi kan bestämma ur tillståndssumman Z_1:

$$Z_1(T) = e^{\varepsilon_0/k_BT}\sum_{n_x=0}^{\infty}\sum_{n_y=0}^{\infty}\sum_{n_z=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega_E\left(n_x+n_y+n_z\right)/k_BT} = \frac{e^{\varepsilon_0/k_BT}}{\left(1-e^{-\hbar\omega_E/k_BT}\right)^3}$$

$$g\left(T\right) = f\left(T\right) = -k_BT\ln Z(T) = -\varepsilon_0 + 3k_BT\ln\left(1-e^{-\hbar\omega_E/k_BT}\right) \qquad (1)$$

(b) Gibbs fria energi per atom för gasen är

$$g(T,p) = e - Ts + pv = \frac{3}{2}k_B T - k_B T\left(\frac{5}{2} + \ln v + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) + pv$$

$$= -k_B T\left(\ln\frac{k_B T}{p} + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) = -k_B T\ln\left[\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{(k_B T)^{5/2}}{p}\right] \qquad (2)$$

där m är atommassan och där vi eliminerat volymen v med hjälp av ideala gaslagen $v = k_B T/p$.

(c) Jämviktsvillkoret är att Gibbs fria energi per atom g (som i enkomponentsystem är lika med kemiska potentialen μ) skall ha samma värde i båda faserna. Detta ger

$$-\varepsilon_0 + 3k_B T\ln\left(1 - e^{-\hbar\omega_E/k_B T}\right) = -k_B T\ln\left[\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{(k_B T)^{5/2}}{p}\right]$$

$$\ln\left[\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^{3/2}\frac{p}{(k_B T)^{5/2}\left(1 - e^{-\hbar\omega_E/k_B T}\right)^3}\right] = -\frac{\varepsilon_0}{k_B T}$$

$$p = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{5/2}\, e^{-\varepsilon_0/k_B T}\left(1 - e^{-\hbar\omega_E/k_B T}\right)^3 \qquad (3)$$

<u>Svar</u>: Se ekvationerna (1), (2) och (3) ovan.