

Chalmers Tekniska Högskola
och Göteborg Universitet
Sektionen för Fysik och Teknisk Fysik
Aleksandar Matic/Mats Granath

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)

Tid och plats: Onsdagen den 24 augusti 2005 8.30-12.30 i V-huset.

Examinatorer: Aleksandar Matic (0730-346294), Mats Granath (0708-938077).

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, Termodynamiska Tabeller (sålda via Cremona), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk Fördelning", egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift), valfri räknedosa i fickformat.

Bedömning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift adderas enligt tidigare offentliggjord formel. För godkänt krävs 30 poäng.

Lösningar: Lösningar finns på kurshemsidan efter tentans slut.

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast torsdagen 2:e september.

Rättningsgranskning: Måndagen 5:e september 12.00-12.30 i rum O7109B

1. I en Carnot-process tillförs värmemängden 2.70 kJ per cykel. Vid den adiabatiska expansionen fördubblas volymen. Den lägsta temperaturen under processen är 205 K och gasens tryck är som lägst 1.0 atm. Arbetsmediet är kvävgas som kan betraktas som idel.

- Rita in processen i ett PV- respektive TS-diagram. (2p)
- Beräkna kretsprocessens verkningsgrad. (2p)
- Hur stort är det utförda arbetet per cykel? (2p)
- Hur mycket värme avges per cykel? (2p)
- Hur mycket varierar temperaturen respektive entropin under processen? Räkna ut ΔT och ΔS . (2p)

2. En diatomär molekyl har rotationsnivåer med energin $\epsilon_J^{rot} = k_B T_r J(J+1)$ där T_r är en molekylspecifik konstant och där kvanttalet J är heltal. Tillstånden är $(2J+1)$ -faldigt degenererade. Betrakta en gas av sådana molekyler vid temperatur T .

- Hur stor andel, n_J , av molekylerna i gasen kommer i genomsnitt att befinna sig i rotationstillstånd J ? (5p)
- Vad är den relativa andelen molekyler i tillstånd J i förhållande till molekyler i grundtillståndet $J=0$, n_J/n_0 . (3p)
- Vad ska gälla för att denna kvot ska kunna förenklas till $n_J/n_0 \approx (2J+1)$. (2p)

3. Einsteinmodellen för värmekapaciteten hos en kristall beskriver varje atom som tre oberoende kvantmekaniska harmoniska oscillatorer med någon materialspecifik vibrationsfrekvens ω_E .

a) Härled värmekapaciteten från gittervibrationer som funktion av temperaturen enligt Einsteinmodellen. (Börja t.ex. genom att beräkna väntevärdet av energin och från denna värmekapacitet.) (7p)

b) Visa att för höga temperaturer återfås Dulong-Petits lag, $C_V=3Nk_B$. Hur kan man förstå denna utan en kvantmekanisk modell? (3p)

4. En vinter är teknologen Wille ute och åker skridskor på en sjö. Wille har hört, från en säker källa, att skridskorna glider lättare på isen av att isen smälter på grund av det höga trycket som skridskoeggen utövar på isen. Ute är det -4°C och Wille väger 80 kg efter all julmat. Hur stor får anläggningsytan på skridskon maximalt vara för att Wille lätt ska glida fram på en vattenfilm? Är det rimligt (motivera med rimliga antaganden)? (10 p)

5. Ledningselektronerna i koppar kan beskrivas som en ideal Fermivätska med Fermienergi $\varepsilon_F=7\text{eV}$ och dispersion $\varepsilon=m_e v^2/2$.

a) Vid $T=0$, vad är den maximala kinetiska energin för en elektron i koppar och motsvarande maximal hastighet $|\vec{v}|$? (2p)

b) Givet tillståndstätheten $f(p)dp=V8\pi p^2 dp/h^3$ beräkna den genomsnittliga kinetiska energin $\bar{\varepsilon}$ för en elektron. (6p)

c) Kommer resultaten i a) och b) förändras markant vid rumstemperatur? Förklara. (2p)

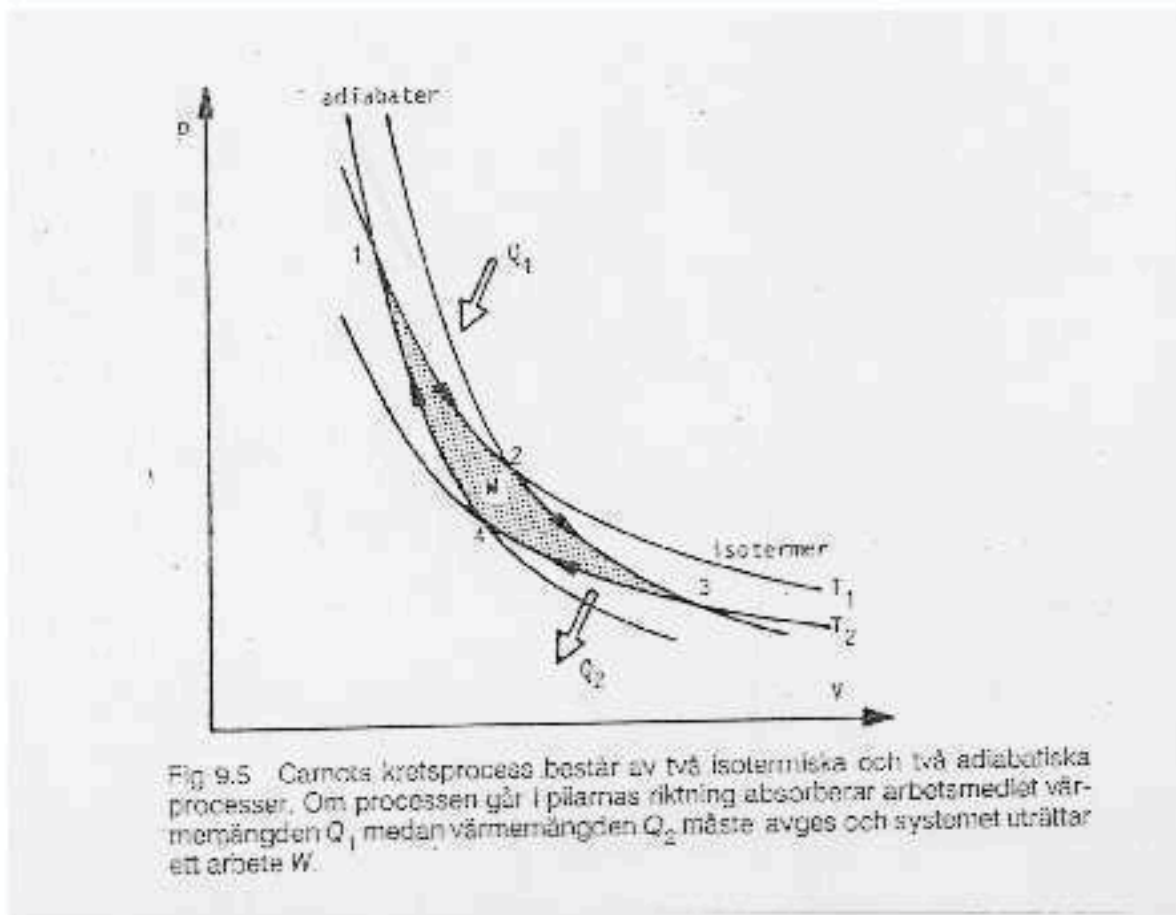
6. Vid förångning minskar ett ämnes densitet radikalt. Bestäm för vatten vid trycket 1 atm och 100°C :

a) Hur stor andel av ångbildningsentalpin som utgörs av arbete vid förångning av vatten. (5p)

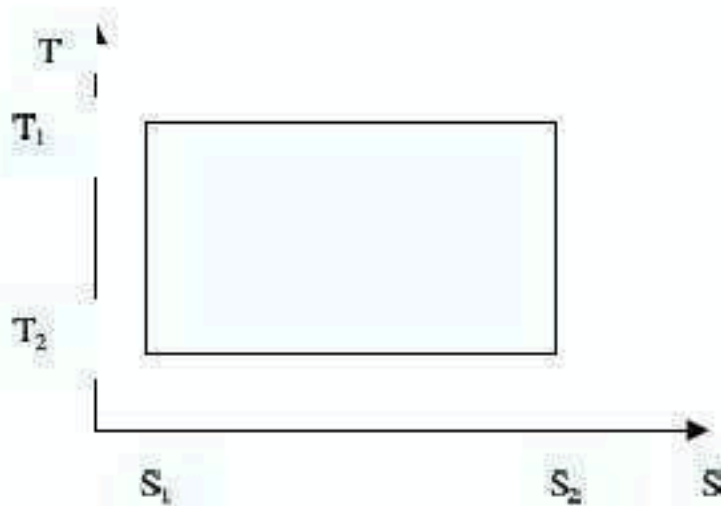
b) Hur mycket ökar inre energin i vatten vid förångning (uttryckt i kJ/kg). (5p)

Lösningar tenta 050824

1. a) PV-diagram för Carnotprocess, se exempelvis Fig. 9.5 i kursboken:



TS-diagram för Carnotprocess:



b) Beräkna kretsprocessens verkningsgrad.

Verkningsgraden för en Carnotprocess ges av:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|T_2|}{|T_1|}$$

Arbetsmediet kan betraktas som ideal gas och i process 2->3, se PV-diagram ovan, har vi en adiabatisk expansion. För en adiabatisk process och ideal gas gäller:

$pV^\gamma = \text{konst.}$ och $pV = nRT$ vilket ger

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \text{ dvs. } \eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \text{ givet i uppgiften är att}$$

$$V_2 = 2V_1 \text{ och } \gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1.4 \text{ för kvävgas}$$

vilket ger verkningsgraden $\eta = 0.24$

c) Hur stort är det utförda arbetet per cykel?

Verkningsgrad ges av $\eta = \frac{W}{Q_1}$ dvs arbetet ges av $W = Q_1 \eta$

$Q_1 = 2.70$ kJ är det tillförda värmets

vilket ger arbetet per cykel $W = 0.65$ kJ

d) Hur mycket värme avges per cykel?

I kretsprocessen gäller:

$$W = Q_1 - Q_2 \text{ vilket ger det bortförda värmets } Q_2 = Q_1 - W = 2.05 \text{ kJ}$$

e) Hur mycket varierar temperaturen respektive entropin under processen?
Räkna ut ΔT och ΔS .

Bestäm ΔT :

$$T_2 = 205 \text{ K och } \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \text{ för en adiabatisk process.}$$

$$T_1 = 270 \text{ K och } \Delta T = 65 \text{ K}$$

Bestäm ΔS :

Entropin ändras under isotermerna, se T-S diagram:

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = 10 \text{ J/K}$$

Uppgift 2

a) Rotationsnivåerna är besatta enligt kanonisk fördelning:

$$n_J = (2J + 1)e^{-\beta\epsilon_J^{\text{rot}}} / Z$$

där

$$Z = \sum_{J=0}^{\infty} (2J + 1)e^{-\beta\epsilon_J^{\text{rot}}}$$

och $\beta = 1/kT$

b) $n_J/n_0 = (2J + 1)e^{-\beta\epsilon_J^{\text{rot}}}$

c) $\beta\epsilon_J^{\text{rot}} \ll 1$, dvs $T \gg T_r J(J + 1)$

Uppgift 3

a) Energispektrat för en harmonisk oscillator ges av $\epsilon_r = \hbar\omega_E(\frac{1}{2} + r)$. Väntevärdet av energin för en oscillator ges av

$$\bar{\epsilon} = \sum_r \epsilon_r e^{-\beta\epsilon_r} / Z = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

där

$$Z = \sum_r e^{-\beta\hbar\omega_E(\frac{1}{2}+r)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_E}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_E}}$$

Energin blir alltså

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}\hbar\omega_E + \frac{\hbar\omega_E}{e^{\beta\hbar\omega_E} - 1}$$

och följaktligen för $3N$ oscillatorer

$$C_V = 3N \left(\frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial T} \right) = \dots = 3Nk \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

där $x = \hbar\omega_E/kT$.

b) Vid höga temperaturer $kT \gg \hbar\omega_E$ ($x \ll 1$) kan vi utveckla exponenterna och få Dulong Petit $C_V = 3Nk$. Detta resultat kan vi också få genom att betrakta $3N$ klassiska harmoniska oscillatorer med energi $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$. Enligt likafördelningslagen har dessa energi $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT$, vilket ger det förväntade resultatet för värmekapaciteten.

4. Ändringen av smältpunkten med ändrat tryck ges av Claussius-Clapeyrons ekvation:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta V} \text{ där}$$

$L=333 \cdot 10^3$ J/kg är smältentalpin för och ΔV är volymsändringen i fasomvandlingen.

Tryckändringen som behövs för att åstadkomma en ändring i smältpunkt med -4°C ges då av:

$$\Delta P = \frac{\Delta TL}{T\Delta V}$$

Densiteten för is är $\rho_1=917$ kgm⁻³ och för vatten $\rho_2=997$ kgm⁻³ vilket ger

$$\Delta V=(1/\rho_2-1/\rho_1)=-8.75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}, \Delta T=-4 \text{ K och } T=269 \text{ K.}$$

Detta ger nu $\Delta P=57$ MPa

Tyngdraften från Wille, som väger 80 kg, på isen är $F=786$ N vilket ger att för att isen ska smälta får anläggningsytan, A, vara maximalt

$$A_{\text{max}}=1.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2=14 \text{ mm}^2$$

Är detta rimligt? Antag att Wille glider fram på ett ben i taget och att skridskon är 25 cm lång. Ger att eggen inte får vara ner än $d_{\text{max}}=56$ μm bred. En skridskoskena är ju klart bredare än detta, 2 mm, men när den är nyslipad är profilen konkav och ligger bara an mot isen vid ytterkanterna varför 56 μm inte är orimligt.

Uppgift 5

a) Vid $T = 0$ är Fermi-Dirac fördelningen en steg funktion, alla tillstånd med $\epsilon < \epsilon_F$ är besatta, resten är tomma. Maximala energin är $\epsilon = \epsilon_F = 7\text{eV}$ och följaktligen $v_{max} = \sqrt{2\epsilon_F/m_e} = 1.6 \cdot 10^6 \text{m/s}$.

b) Medelenergi per elektron är

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon$$

Från $f(p)dp$ med $\epsilon = \frac{1}{2}p^2/m$ fås $f(\epsilon)d\epsilon = \dots = V4\pi(2m)^{3/2}\sqrt{\epsilon}d\epsilon/h^3$, vilket ger

$$\bar{\epsilon} = \frac{V4\pi(2m)^{3/2}}{Nh^3} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{V4\pi(2m)^{3/2}}{Nh^3} \frac{2}{5} \epsilon_F^{5/2}$$

För att få ut ett numerisk värde behöver vi V/N i termer av Fermi energin. Beräkna

$$N = \int_0^{\epsilon_F} f(\epsilon) d\epsilon = \dots = \frac{V4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2}$$

Slutligen fås alltså

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{5} \epsilon_F = 4.2\text{eV}$$

c) Resultatet b) kommer att ändras bara marginellt vid rumstemperatur. Anledningen är att $T \ll T_F = \epsilon_F/k = 81000\text{K}$ så att endast tillstånd mycket nära Fermi energin ($|\epsilon - \epsilon_F| \sim kT$) påverkas. Följaktligen ändras bara integralen över alla tillstånd mycket lite.

Däremot finns ju vid ändlig temperatur ingen maximal kinetisk energi som i a), men tillstånd med $\epsilon \gg \epsilon_F$ har mycket liten sannolikhet att vara besatta.

6. a) Hur stor andel av ångbildningsentalpin som utgörs av arbete vid förångning av vatten?

För att förånga en viss volym vatten, V_v , krävs ett tillfört värme, Q där

$Q = l_v m = \Delta H$ där l_v - ångbildningsvärmets, m är vattnets massa och ΔH är ångbildningsentalpin.

Arbetet som utförs vid förångning ges av

$$W = \int p dV = p_0 (V_g - V_v) \quad (\text{konstant tryck } p_0)$$

V_g -gasens volym, V_v -vätskans volym

Andelen arbete i ångbildningsentalpin är då:

$$\frac{|W|}{|\Delta H|} = \frac{p_0 (V_g - V_v)}{l_v m} = \frac{p_0 (V_g - V_v)}{l_v \rho_v V_v} = \frac{p_0 V_v \left(\frac{V_g}{V_v} - 1 \right)}{l_v \rho_v V_v} = \frac{p_0 \left(\frac{\rho_v}{\rho_g} - 1 \right)}{l_v \rho_v}$$

ur tabell A.1.1 får man:

ångbildningsvärmets $l_v = 2257 \text{ kJ/kg}$ samt specifika volymerna $v_v = 0.001044 \text{ m}^3/\text{kg}$ och $v_g = 1.6729 \text{ m}^3/\text{kg}$ vilket ger densiteten

$\rho_v = 957 \text{ kg/m}^3$ och $\rho_g = 0.5978 \text{ kg/m}^3$ och $p_0 = 0.10135 \text{ MPa}$ (1 atm) var givet

vilket ger $|W|/|\Delta H| = 0.075$

b) Hur mycket ökar inre energin i vatten vid förångning (uttryckt i kJ/kg)?

Ändringen i inre energin ges av $\Delta U = Q + W = Q(1 + W/Q) = Q(1 - 0.075)$

Värmet som krävs för att förånga vatten är $Q = 2257 \text{ kJ/kg}$ vilket ger

$\Delta U = 2090 \text{ kJ/kg}$