CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET
Teoretisk fysik och mekanik
Göran Niklasson

## Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)

**Tid och plats:** Onsdagen den 25 augusti 2004 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

**Examinatorer:** Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med ”Allmänna relationer för enkomponentsystem” och ”Kanonisk fördelning” (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 6 september.

**Rättningsgranskning:** Onsdagen den 8 september kl. 12.00-13.00 i rum 7112B i Origohusets norra flygel (Göran Niklassons tjänsterum).

1. På östra sidan av Klippiga Bergen uppträder ibland en stark, torr och varm vind som går under namnet ”Chinook”. Den kommer uppifrån bergen och blåser nedför sluttningarna mot Denver och angränsande områden. Fastän det är kallt uppe i bergen är vinden mycket varm när den når Denver (”chinook” är ett indianskt ord som betyder ”snö-ätare”). Liknade vindar uppträder bland annat i Alperna (”föhnvindar”) och i södra Kalifornien (”Santa Anas”).

   (a) Förklara varför vindens temperatur stiger när den blåser nedför sluttningarna! Varför är det väsentligt att vinden är stark (d.v.s. att luftströmmen är snabb)?

   (b) Anta att en vind börjar blåsa mot Denver (höjd 1630 m över havet) från Grays Peak (en bergstopp 80 km väster om Denver på höjden 4350 över havet). Luftrycket på Grays Peak är 56,0 kPa och lufttemperaturen är -15°C. I Denver är lufttrycket 81,2 kPa och temperaturen 2,0°C innan det börjar blåsa. Med hur många grader stiger temperaturen i Denver när chinooken anländer?

2. För en klassisk ideal gas bestående av ickeväxelverkande atomer i termisk jämvikt är de kartesiska komponenterna för hastigheten statistiskt oberoende variabler. I tre dimensioner gäller

   $$p(v_x, v_y, v_z) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-3/2} \exp\left[-\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)/\left(2\sigma^2\right)\right]$$

   där $\sigma^2 = kT/m$. Energin för en atom är $E = m|\mathbf{v}|^2/2$.

   (a) Vad är sannolikhetsfördelningen $p(E)$ för energin för en atom i en tredimensionell gas?

   (b) Antag att gasen är tvådimensionell. Vad är $p(E)$ i så fall?

   (c) Vad är $p(E)$ om gasen är endimensionell?

   (d) Beskriv skillnaderna mellan de tre fallen.

3. I en aluminiumbehållare som är dimensionerad för att tåla ett övertryck på 5 atm förvaras flytande dietyleter i jämvikt med tillhörande gasfas. Vilken är den maximala temperatur som behållaren får utsättas för, om det maximala trycket inte skall överskridas?

   Kokpunkten för dietyleter vid 1 atm är 34,5ºC. Ångbildningsentalpiteten kan sättas till 27,0 kJ/mol i det aktuella temperaturområdet. I avsaknad av ytterligare data är du tvungen att göra vissa förenklande approximationer och antaganden i beräkningen. Dessa skall tydligt förklaras.

4. $N$ stycken vätemolekyler $H_2$ i termisk jämvikt vid temperaturen $T$ har absorberats på en flat yta med arean $A$. På ytan beter molekylerna sig som en tvådimensionell icke växelverkande gas. Molekylernas rotationsrörelse är med andra ord helt bunden till ytans plan.

   Rotationsrörelsens kvanttillstånd beskrivs av ett rotationskvanttal $m$ som kan anta värdena $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ . Det finns ett kvanttillstånd för varje värde av $m$. Rotationsenergin skrivs $\varepsilon_m = m^2\hbar^2 / 2I$ där $I$ är tröghetsmomentet.

   (a) Skriv ned rotationsdelen av partitionsfunktionen för en molekyl!

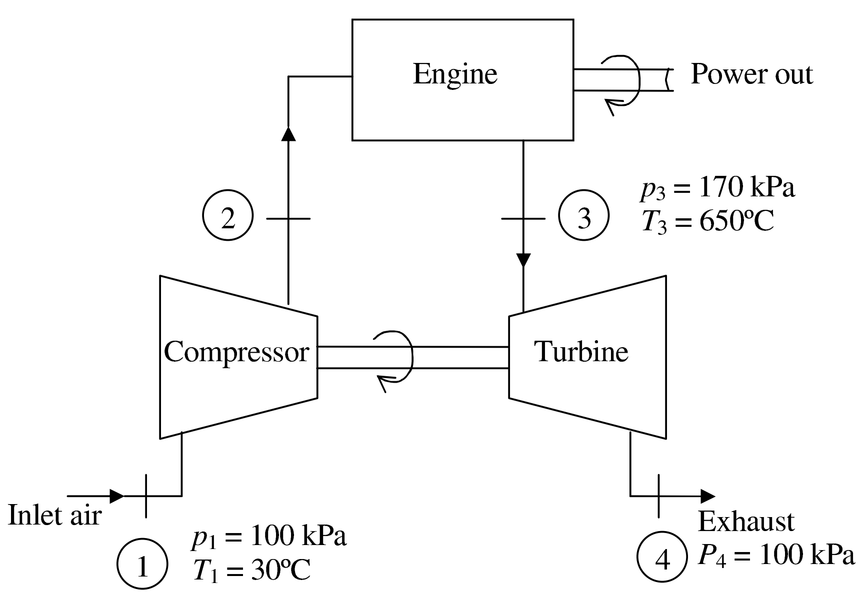
   (b) Vad är kvoten mellan sannolikheterna $p(m=3)$ och $p(m=2)$ ?

   (c) Vad är sannolikheten att $m = 3$ om energin är $\varepsilon = 9\hbar^2 / 2I$ ? Vad är sannolikheten att $m = 1$ om $\varepsilon \le \hbar^2 / 2I$ ?

   (d) Hur stort är rotationsenergins bidrag till gasens inre energi vid höga temperaturer, d.v.s. då $kT \gg \hbar^2 / 2I$ ?

5. Figuren visar principen för en turbo. Innan bränsleblandningen sprutas in i motorn komprimeras den i kompressorn, vilken drivs av en turbin som utnyttjar de varma avgaserna. Hur stort är trycket efter komprimeringen, om både kompressorn och turbinen antas arbeta reversibelt och adiabatiskt?

   Bränsleblandningen får antas bestå av enbart luft, och den får behandlas som en ideal gas med konstant värmekapacitet. Ändringen av antalet mol vid förbränningen i motorn får försummas, liksom den ändliga utströmningshastigheten. Siffervärden för tryck och temperatur tas från figuren.



6. En endimensionell kedja sätts ihop av $N$ identiska länkar med längden $l$. Vinkeln mellan två på varandra följande länkar kan vara 0° eller 180°. Inre energin är oberoende av vilken vinkeln är. Man kan för enkelhetens skull säga att om vinkeln är 0° så lägger vi till (+) längden $l$ till kedjans totala längd medan om vinkeln är 180° så subtraheras (-) längden $l$ från totala längden. Vi har totala antalet länkar $N = (n_+ + n_-)$ och totala längden av kedjan

$$L = l\left(n_+ - n_-\right) = l\left(2n_+ - N\right)$$

(a) Använd den mikrokanoniska ensemblen för att beräkna kedjans entropi som funktion av $N$ och $n_+$.

(b) Finn ett uttryck för spännkraften $\tau$ i kedjan. Detta uttryck blir en funktion av temperaturen $T$ samt av $N$ och $n_+$. Notera att spännkraften i en endimensionell kedja blir en motsvarighet till trycket i ett tredimensionellt system.

(c) Vad blir längden av kedjan uttryckt i $\tau$, $N$ och $T$ ?

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET
Teoretisk fysik och mekanik
Göran Niklasson

## Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2004-08-25

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 6 september.

**Rättningsgranskning:** Onsdagen den 8 september kl. 12.00-13.00 i rum 7112B i Origohusets norra flygel (Göran Niklassons tjänsterum).

# Lösningar

**Uppgift 1**

(a) Om luftrörelsen är snabb hinner det inte ske något nämnvärt värmeutbyte med omgivningen, d.v.s. processen blir adiabatisk. Eftersom trycket blir större på lägre höjd komprimeras luften. Vid adiabatisk kompression av en gas ökar temperaturen.

(b) Beteckningar:

$T_1$ = begynnelsetemperatur = (273 – 15) K = 258 K

$p_1$ = begynnelsetryck = 56,0 kPa

$T_2$ = sluttemperatur = ?

$p_2$ = sluttryck = 81,2 kPa

$\gamma = C_p/C_V$ = 1,4 för luft

Vid adiabatisk process gäller sambandet

$$p^{\gamma}T^{\gamma-1} = \text{ konstant}$$

vilket ger

$$T_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} T_1 = \left(\frac{81,2}{56,0}\right)^{\left(1-\frac{1}{1,4}\right)} 258 \text{ K} = 287 \text{ K} = 14°\text{C}$$

Temperaturen i Denver stiger alltså från 2°C till 14°C, d.v.s med 12 grader.

Svar: Temperaturen stiger med 12°C.

**Uppgift 2**

(a) Vi börjar med att bestämma sannolikheten $P(E)$ för att energin skall vara $\leq E$. Den finner vi genom att integrera $p(v_x, v_y, v_z)$ över det område där $v^2 \leq 2E/m$. Integrationen genomförs enkelt om vi inför de sfäriska koordinaterna $v$, $\theta$ och $\varphi$ i hastighetsrummet:

$$P(E) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2E/m}} v^2 \, \mathrm{e}^{-mv^2/2kT} \, dv$$

Med variabelsubstitutionen $\varepsilon = mv^2/2$ kan detta omformas till

$$P(E) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{E} \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{m^{3/2}} \mathrm{e}^{-\varepsilon/kT} \, d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}} \int_0^{E} \sqrt{\varepsilon} \, \mathrm{e}^{-\varepsilon/kT} \, d\varepsilon$$

Den sökta sannolikhetsfördelningen $p(E)$ fås genom derivering:

$$p(E) = \frac{dP(E)}{dE} = \frac{2\sqrt{E} \, \mathrm{e}^{-E/kT}}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}}$$

(b) I två dimensioner gäller att

$$p(v_x, v_y) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1} \exp\left[-\left(v_x^2 + v_y^2\right)/\left(2\sigma^2\right)\right]$$

Vi gör motsvarande omformningar som i tre dimensioner men med användning av polära koordinater $v$ och $\varphi$:

$$P(E) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2E/m}} v\,\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\,dv = 2\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)\int_0^E \frac{1}{m}\mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{kT}\int_0^E \mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon$$

$$p(E) = \frac{dP(E)}{dE} = \frac{\mathrm{e}^{-E/kT}}{kT}$$

(c) I en dimension gäller att

$$p(v_x) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left[-v_x^2/2\sigma^2\right]$$

vilket ger

$$P(E) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^{\sqrt{2E/m}} \mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\,dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\int_0^E \frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon}}\mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}\,d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi kT}}\int_0^E \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon/kT}}{\sqrt{\varepsilon}}\,d\varepsilon$$

$$p(E) = \frac{dP(E)}{dE} = \frac{\mathrm{e}^{-E/kT}}{2\sqrt{\pi kTE}}$$

(d) Den mest markanta skillnaden mellan de tre fallen ser man vid låga energier. I tre dimensioner fallet går p(E) mot noll som $\sqrt{E}$, i två dimensioner går p(E) mot ett konstant värde, och i en dimension går p(E) mot oändligheten som $1/\sqrt{E}$

Svar:

(a) $p(E) = \dfrac{2\sqrt{E}\,\mathrm{e}^{-E/kT}}{\sqrt{\pi}\,(kT)^{3/2}}$

(b) $p(E) = \dfrac{\mathrm{e}^{-E/kT}}{kT}$

(c) $p(E) = \dfrac{\mathrm{e}^{-E/kT}}{2\sqrt{\pi kTE}}$

(d) Se beskrivningen ovan.

**Uppgift 3**

Vi antar att mängden eter är sådan att behållaren hela tiden innehåller både vätske- och gasfas, d.v.s. vi rör oss längs ångkurvan. Då beror trycket $p$ av temperaturen $T$ enligt Clausius-Clapeyrons ekvation:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{T\left(v_g - v_v\right)}$$

där $l$ är ångbildningsentalpiteten, $v_g$ är gasfasens volym och $v_v$ är vätskefasens volym, allt räknat per mol.

Approximationer: vi försummar $v_v$ i jämförelse med $v_g$ och använder ideala gaslagen för att bestämma $v_g$:

$$v_g = \frac{RT}{p}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{Tv_g} = \frac{lp}{RT^2}$$

Om l antages vara konstant kan vi genom integration bestämma sambandet mellan $p$ och $T$. Som randvillkor använder vi $p_0$ = 1 atm och $T_0$ = (273,15+34,5) K = 307,65 K.

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \frac{l}{R} \int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T^2}$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{l}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$$

$$T = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{R}{l}\ln\frac{p}{p_0}\right)^{-1}$$

Insättning av $p$ = 5 atm, $R$ = 8,31 J/K·mol och $l$ = 27,0·10$^3$ J/mol ger $T$ = 363,0 K = 89,8ºC.

Svar: 90ºC

**Uppgift 4**

(a) Tillståndssumman (partitionsfunktionen) för en vätemolekyl är

$$Z_{rot}(T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-m^2\hbar^2/2IkT\right) = 1 + 2\sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(-j^2\hbar^2/2IkT\right)$$

(b) Den sökta kvoten är

$$\frac{p(m=3)}{p(m=2)} = \frac{\exp\left(-9\hbar^2/2IkT\right)}{\exp\left(-4\hbar^2/2IkT\right)} = \exp\left(-5\hbar^2/2IkT\right)$$

(c) Om energin är $9\hbar^2/2I$ så måste $m$ vara antingen +3 eller -3. Båda dessa möjligheter är lika sannolika och någon annan möjlighet finns inte. Alltså finner vi att den sökta sannolikheten är

$$p\left(m=3 \middle| \varepsilon = \frac{9\hbar^2}{2I}\right) = \frac{1}{2}$$

Om $\varepsilon \le \hbar^2/2I$ finns möjligheterna $m$ = -1, $m$ = 0 och $m$ = +1. Sannolikheten för $m$ = +1 blir då

$$p\left(m=1 \middle| \varepsilon \le \frac{\hbar^2}{2I}\right) = \frac{\exp\left(-\hbar^2/2IkT\right)}{1+2\exp\left(-\hbar^2/2IkT\right)} = \frac{1}{\exp\left(\hbar^2/2IkT\right)+2}$$

(d) I högtemperaturgränsen, d.v.s. om $kT \gg \hbar^2/2I$, kan tillståndssumman göras om till en integral:

$$Z_{rot}(T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-m^2\hbar^2/2IkT\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\hbar^2/2IkT\right)dx$$

$$= \sqrt{\frac{2IkT}{\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-z^2\right)dz = \sqrt{\frac{2IkT}{\hbar^2}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{2\pi IkT}{\hbar^2}}$$

Ur detta kan rotationsrörelsernas bidrag till Helmholtz fria energi, entropin och energin bestämmas:

$$F_{rot} = -kT \ln Z_{rot} = -kT \ln \sqrt{\frac{2\pi IkT}{\hbar^2}} = -\frac{kT}{2} \ln\left(\frac{2\pi IkT}{\hbar^2}\right)$$

$$S_{rot} = -\frac{dF_{rot}}{dT} = \frac{k}{2} \ln\left(\frac{2\pi IkT}{\hbar^2}\right) + \frac{k}{2}$$

$$E_{rot} = F_{rot} + TS_{rot} = \frac{1}{2}kT$$

För $N$ molekyler fås

$$E_{rot} = \frac{1}{2}NkT$$

Svar: Se formlerna ovan.

**Uppgift 5**

Det arbete $W$ som uträttas av turbinen är lika med minskningen i entalpi för gasen. För en mol av en ideal gas ger detta

$$W = C_p\left(T_3 - T_4\right)$$

där $C_p$ är den isobariska värmekapaciteten per mol. Temperaturen $T_4$ är inte given men kan beräknas ur givna data för trycket. Eftersom processen i turbinen är adiabatisk finner vi att

$$T_4 = \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} T_3$$

$$W = C_p T_3 \left[1 - \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\right]$$

där $\gamma$ är den adiabatiska koefficienten ($\gamma = C_p/C_V$).

Hela arbetet $W$ utnyttjas för att driva kompressorn. Den fungerar i princip på samma sätt som turbinen, fast baklänges. Vi finner följande samband:

$$W = C_p\left(T_2 - T_1\right)$$

$$T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} T_1$$

$$W = C_p T_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)} - 1\right]$$

Genom att jämföra de två uttrycken för $W$ får vi en ekvation ur vilken det obekanta trycket $p_2$ kan beräknas:

$$T_1\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}-1\right]=T_3\left[1-\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\right]$$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}=1+\frac{T_3}{T_1}\left[1-\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\right]$$

$$p_2=p_1\left\{1+\frac{T_3}{T_1}\left[1-\left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)}\right]\right\}^{\gamma/(\gamma-1)}$$

För luft gäller att $\gamma$= 1,40. Övriga siffervärden: $p_1 = p_4$ = 100 kPa, $p_3$ = 170 kPa, $T_1$ = 303 K, $T_3$ = 923 K. Insättning ger resultatet $p_2$ = 348 kPa.

Svar: 348 kPa

**Uppgift 6**

Utskriven lösning saknas. Notera analogin med det paramagnetiska spinnsystemet i kapitel 3 i kursboken!

Svar

(a) $S(N,n_+)=k\left[N\ln N-(N-n_+)\ln(N-n_+)-n_+\ln n_+\right]$

(b) $\tau(N,T,n_+)=\dfrac{kT}{2l}\ln\left(\dfrac{n_+}{N-n_+}\right)$

(c) $L=Nl\tanh\left(\dfrac{l\tau}{kT}\right)$

I gränsen $kT >> l\tau$ ger detta Hookes lag, d.v.s. att förlängningen blir proportionell mot spännkraften: $L=\dfrac{Nl^2}{kT}\tau$