CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET
Teoretisk fysik och mekanik
Göran Niklasson

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)

Tid och plats: Torsdagen den 15 april 2004 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

Examinatorer: Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

Hjälpmedel: Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med ”Allmänna relationer för enkomponentsystem” och ”Kanonisk fördelning” (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

Bedömning: Varje uppgift ger högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

Lösningar: Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast onsdagen den 28 april.

Rättningsgranskning: Torsdagen den 29 april kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

1. En enkel tillståndsekvation för ett fast ämne kan se ut så här:

$$V = V_0\left[1+\beta(T-T_0)-\kappa((p-p_0)\right]$$

Här är V_0 ämnets volym i ett visst referenstillstånd med trycket p_0 och temperaturen T_0. Konstanterna β och κ är volymutvidgningskoefficienten respektive kompressibiliteten i referenstillståndet. Som exempel väljer vi ett stycke koppar med volymen V_0 = 1,00 dm^3 vid temperaturen T_0 = 300 K och trycket p_0 = 100 kPa. Då gäller att $\beta = 50\cdot10^{-6}$ K^{-1} och $\kappa = 7{,}1\cdot10^{-12}$ Pa^{-1}.

(a) Hur stort tryck krävs för att vid temperaturen T_0 isotermiskt komprimera kopparstycket så att volymen minskar med 1 %?

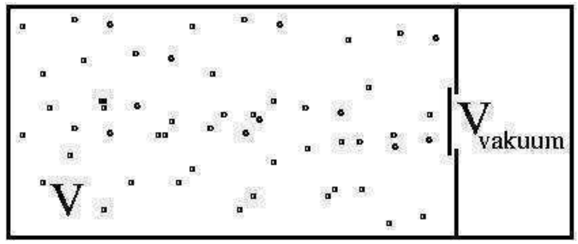
(b) Beräkna det arbete som uträttas på kopparstycket vid kompressionen!

(c) Beräkna entropiändringen hos kopparstycket vid kompressionen!

Tips: Den sista deluppgiften löses enklast med hjälp av en lämpligt vald maxwell-relation.

2. Anta att du har en icke-relativistisk ideal gas som existerar i en <u>två</u>-dimensionell värld. Vad är då hastighetsfördelningen, $P(v)$, för denna gas? Ge en grafisk representation av $P(v)$. Vilken hastighetsvektor är mest sannolik och vilken är den mest sannolika hastigheten? Ge ett utförligt svar där detaljerna i ditt resonemang klart framgår.

3. Heliumgas vid 300 K och vid normalt tryck fyller upp en volym V.



Volymen V står via en öppningsbar lucka i kontakt med en tom volym, V_{vakuum}. Luckan är till att börja med stängd. Volymen V är 1,4 liter och $V_{vakuum} = 0{,}2$ V.

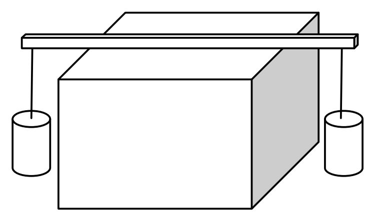
(a) Hur många heliumatomer fins det i volymen V?

(b) Öppna luckan och låt gasen expandera ut i V_{vakuum}. Hur har statistiska vikten Ω ändrats då jämvikt åter uppnåtts? Vilken är förändringen i gasens entropi?

(c) Om vi inte öppnar luckan, hur skall vi då göra för att få samma entropiändring? Ge både ett kvalitativt och ett kvantitativt svar.

4. En vattenkyld värmemotor är försedd med ett reglersystem som håller kylvattnet vid den konstanta temperaturen 70°C. För att systemet skall fungera får den värmeeffekt som motorn avger till kylvattnet inte överstiga 25 kW. Vilken är den högsta arbetseffekt som motorn kan tänkas leverera, om dess drivmedel avger värme vid temperaturen 950°C?

5. Två lika vikter hänger i ändarna av en lätt stång som ligger tvärs över ett isblock. Stången har bredden 2 mm, och längden av den del som är i kontakt med isen är 25 cm. Trycket i omgivningen är 100 kPa och isens temperatur är -2°C. Hur stor massa skall vardera vikten ha för att isen under stången skall smälta så att stången så småningom gräver sig ner genom isblocket?



Isens densitet vid den aktuella temperaturen är 917 kg/m^3 och densiteten för vatten vid samma temperatur är 1000 kg/m^3. Smältentalpiteten för is är 333 kJ/kg.

6. En Isingmodell har två spinn med växelverkansenergin $U = -\varepsilon \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$. Ange alla tillstånd samt deras Boltzmann-faktorer. Beräkna systemets partitionsfunktion. Vad är sannolikheten att spinnen är parallella respektive anti-parallella? Rita en graf för dessa sannolikheter som funktion av ε/kT. Beräkna och visualisera även systemets medelenergi. Vid vilken temperatur, given i enheten ε/k, blir det mer sannolikt att båda spinnen pekar upp än att bara ett spinn gör det?

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET
Teoretisk fysik och mekanik
Göran Niklasson

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2004-04-15

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 28 april.

Rättningsgranskning: Torsdagen den 29 april kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

Lösningar

Uppgift 1

(a) Om temperaturen hålls konstant gäller att

$$V = V_0\left[1-\kappa\left(p-p_0\right)\right]$$

vilket ger

$$p = p_0 + \frac{V_0 - V}{\kappa V_0} = 100\cdot 10^3 + \frac{0,01}{7,1\cdot 10^{-12}}\ \text{Pa} = 1,41\cdot 10^9\ \text{Pa}$$

(b) Det uträttade arbetet är

$$W = -\int_{V_0}^{V} p\,dV = -\int_{V_0}^{V}\left(p_0 + \frac{V_0 - V}{\kappa V_0}\right)dV = -p_0\left(V - V_0\right) + \frac{\left(V_0 - V\right)^2}{2\kappa V_0}$$

$$= -0,01 p_0 V_0 + \frac{0,01^2 V_0}{2\kappa} = \left(\frac{0,01^2}{2\kappa} - 0,01 p_0\right)V_0$$

$$= \left(\frac{0,01^2}{2\cdot 7,1\cdot 10^{-12}} - 0,01\cdot 10^5\right)\cdot 10^{-3}\ \text{J} = 7,04\ \text{kJ}$$

(c) Den maxwellrelation som är lämplig i detta fall är

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

Ur tillståndsekvationen följer att

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{\kappa}$$

Vi finner alltså att

$$\Delta S = \int_{V_0}^{V}\frac{\beta}{\kappa}dV = \frac{\beta}{\kappa}\left(V - V_0\right) = -\frac{V_0 - V}{V_0}\cdot\frac{\beta V_0}{\kappa}$$

$$= -0,01\cdot\frac{50\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-3}}{7,1\cdot 10^{-12}}\ \text{J/K} = 70,4\ \text{J/K}$$

Svar: (a) 1,4 GPa, (b) 7,0 kJ, (c) 70 J/K

Uppgift 2

Sannolikheten för att en partikel med massan m vid temperaturen T skall ha en fart mellan v och $v+dv$ kan skrivas som $P(v)dv$, där $P(v)$ har formen

$$P(v) = f(v)e^{-mv^2/2k_BT}$$

d.v.s. boltzmannfaktorn multiplicerad med tillståndstätheten $f(v)$ i v-rummet. I tre dimensioner är $f(v)$ proportionell mot ytan av en sfär med radien v i det tredimensionella hastighetsrummet, d.v.s. $4\pi v^2$. Detta ger den vanliga Maxwellfördelningen. I två dimensioner blir $f(v)$ i stället proportionell mot omkretsen av en cirkel med radien v, d.v.s. $2\pi v$. Vi kan dås skriva

$$P(v) = Cve^{-mv^2/2k_BT}$$

där C är en konstant. Denna kan bestämmas ur normeringsvillkoret

$$\int_0^\infty P(v)dv = 1$$

vilket ger

$$C\int_0^\infty ve^{-mv^2/2k_BT}dv = C\left(\frac{2k_BT}{m}\right)\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = C\left(\frac{2k_BT}{m}\right)\frac{1}{2} = 1$$

$$C = \frac{m}{k_BT}$$

Den mest sannolika farten v_m bestäms av att $P(v)$ skall vara maximal. Villkoret att derivatan av $P(v)$ skall vara noll för $v = v_m$ ger

$$e^{-mv_m^2/2k_BT} - \frac{mv_m^2}{k_BT}e^{-mv_m^2/2k_BT} = 0$$

$$v_m = \sqrt{\frac{k_BT}{m}}$$

Den mest sannolika hastighetsvektorn bestäms däremot inte av maximum i $P(v)$ utan enbart av att boltzmannfaktorn skall vara maximal. Därav följer att den mest sannolika hastigheten är noll.

<u>Svar</u>: Hastighetsfördelningen bestäms av funktionen $P(v) = \frac{mv}{k_BT}e^{-mv^2/2k_BT}$. Den mest sannolika hastigheten är noll, men den mest sannolika farten är $\sqrt{\frac{k_BT}{m}}$

Uppgift 3

(a) Helium vid normalt tryck och normal temperatur kan med mycket god approximation betraktas som en ideal gas. Ideala gaslagen ger att antalet atomer är

$$N = \frac{pV}{k_BT} = \frac{1{,}01\cdot 10^5\cdot 1{,}4\cdot 10^{-3}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300} = 3{,}42\cdot 10^{22}$$

(b) Vid expansionen tillförs ingen energi, varken i form av arbete eller värme. För en idela gas innebär det att gasens temperatur inte ändras. Ändringen i antalet tillgängliga mikrotillstånd, d.v.s. den statistiska vikten Ω, bestäms då enbart av ändringen i volym. Eftersom antalet tillgängliga mikrotillstånd för varje enskild atom är proportionellt mot den tillgängliga volymen gäller att förhållandet mellan den statistiska vikten Ω_f i sluttillståndet och den statistiska vikten Ω_i i begynnelsetillståndet är

$$\frac{\Omega_f}{\Omega_i} = \left(\frac{V + V_{vacuum}}{V}\right)^N = 1,2^{3,42\cdot 10^{21}} = 10^{2,71\cdot 10^{21}}$$

Detta är ett ofattbart stort tal, vilket innebär att sannolikheten för att gasen spontant skall återvända till begynnelsetillståndet i praktiken är helt obefintlig. Makroskopiska processer är enkelriktade.

Entropiändringen är

$$\Delta S = k_B \ln \Omega_f - k_B \ln \Omega_i = k_B \ln \frac{\Omega_f}{\Omega_i}$$

$$= 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3,42 \cdot 10^{22} \cdot \ln 1,2 \text{ J/K} = 0,086 \text{ J/K}$$

(c) Vi kan öka entropin genom att värma upp gasen. Entropiökningen vid uppvärmning från en begynnelsetemperatur T_i till en sluttemperatur T_f är

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_V}{T} dT$$

där värmekapaciteten C_V i detta fall är $3Nk_B/2$. Härur fås

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_V}{T} dT = \frac{3}{2} N k_B \ln \frac{T_f}{T_i} = k_B \ln \frac{\Omega_f}{\Omega_i} = N k_B \ln 1,2$$

$$T_f = 1,2^{2/3} T_i = 1,2^{2/3} \cdot 300 \text{ K} = 339 \text{ K}$$

Gasens temperatur skall alltså höjas med 39 K för att entropiändringen skall bli densamma som vid expansionen. Den värmetillförsel som krävs är

$$Q = C_V \left(T_f - T_i\right) = \frac{3}{2} N k_B \left(T_f - T_i\right) = 1,5 \cdot 3,42 \cdot 10^{22} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 39 \text{ J} = 27,6 \text{ J}$$

<u>Svar</u>: (a) $3,42\cdot 10^{22}$ atomer, (b) Den statistisk vikten ökar med faktorn $10^{2,71\cdot 10^{21}}$ och entropin ökar med 0,086 J/K, (c) Man kan åstadkomma samma entropiändring genom att tillföra 27,6 J värme.

Uppgift 4

Beteckningar:

T_H = värmekällans temperatur = (950+273) K = 1223 K

T_L = kylvattnets temperatur = (70 + 273) K = 343 K

q_{in} = tillförd värmeeffekt från drivmedlet

q_{ut} = till kylvattnet avgiven värmeeffekt = 25 kW

w_{ut} = av motorn levererad arbetseffekt.

Den högsta möjliga effekten får man om motorn fungerar som en carnotmaskin. Då gäller att

$$\frac{q_{in}}{T_H} = \frac{q_{ut}}{T_L}$$

Den avlevererade effekten fås ur första huvudsatsen:

$$w_{ut} = q_{in} - q_{ut} = \left(\frac{q_{in}}{q_{ut}} - 1\right) q_{ut} = \left(\frac{T_H}{T_L} - 1\right) q_{ut} = \left(\frac{1223}{343} - 1\right) \cdot 25 = 64 \text{ kW}$$

<u>Svar</u>: 64 kW

Uppgift 5

Villkoret är att isen under stången skall smälta, d.v.s. att övertrycket Δp under stången är så stort att det ger en fryspunktsnedsättning ΔT = -2 K. Sambandet mellan trycket p och smälttemperaturen T ges av Clausius- Clapeyrons ekvation,

$$\frac{dp}{dT}=\frac{l}{T\left(v_2-v_1\right)}$$

där l är smältenetalpiteten, v_2 är specifika volymen (= inversa densiteten) för vatten och v_1 är specifika volymen för is. Dessa kan antas vara konstanta i det aktuella intervallet, vilket ger

$$\Delta p=\frac{l}{T\left(v_2-v_1\right)}\Delta T$$

Övertrycket beror på vikternas massor och stångens dimensioner enligt formeln

$$\Delta p=\frac{2mg}{BL}$$

där m är massan hos vardera vikten, L är stångens längd (den del som är i kontakt med isen) och B är stångens bredd. Ur dessa ekvationer kan m bestämmas:

$$m=\frac{BL}{2g}\Delta p=\frac{BLl\Delta T}{2gT\left(v_2-v_1\right)}=\frac{0{,}002\cdot 0{,}25\cdot 333\cdot 10^3\cdot(-2)}{2\cdot 9{,}8\cdot 271\cdot\left(\frac{1}{1000}-\frac{1}{917}\right)}\text{ kg}=692\text{ kg}$$

Anmärkning: Det sägs ibland att skridskor glider lätt på isen därför att trycket under skridskorna smälter isen. Resultatet ovan antyder att det påståendet knappast kan vara hela sanningen. Det krävs som synes mycket stora tyngder för att smälta isen. Skulle temperaturen dessutom råka vara t.ex. -20°C i stället för -2°C krävs en tio gånger större tyngd.

Svar: 0,7 ton

Uppgift 6

Vi förutsätter att spinnen har längden 1 och bara kan peka ”upp” eller ”ner”. Produkten $\mathbf{s}_1\cdot\mathbf{s}_2$ bara kan då bara anta värdena +1 (parallella spinn) och -1 (antiparallella spinn). Vi får fyra möjliga tillstånd som vi symboliskt kan beteckna med ↑↑, ↑↓, ↓↑ och ↓↓. Boltzmannfaktorerern för dessa tillstånd blir följande:

$$\uparrow\uparrow:\ e^{\varepsilon/kT}\qquad \uparrow\downarrow:\ e^{-\varepsilon/kT}\qquad \downarrow\uparrow:\ e^{-\varepsilon/kT}\qquad \downarrow\downarrow:\ e^{\varepsilon/kT}$$

Tillståndssumman (=partitionsfunktionen) är alltså

$$Z=2e^{\varepsilon/kT}+2e^{-\varepsilon/kT}=4\cosh\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

Sannolikheterna för de fyra olika tillstånden är följande:

$$P_{\uparrow\uparrow}=P_{\downarrow\downarrow}=\frac{e^{\varepsilon/kT}}{2e^{\varepsilon/kT}+2e^{-\varepsilon/kT}}=\frac{1}{2\left(1+e^{-2\varepsilon/kT}\right)}$$

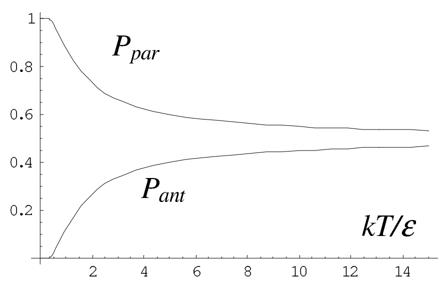
$$P_{\uparrow\downarrow}=P_{\uparrow\downarrow}=\frac{e^{-\varepsilon/kT}}{2e^{\varepsilon/kT}+2e^{-\varepsilon/kT}}=\frac{1}{2\left(1+e^{2\varepsilon/kT}\right)}$$

Sannolikheterna för parallella respektive antiparallella spinn är

$$P_{par}=P_{\uparrow\uparrow}+P_{\downarrow\downarrow}=\frac{1}{1+e^{-2\varepsilon/kT}}$$

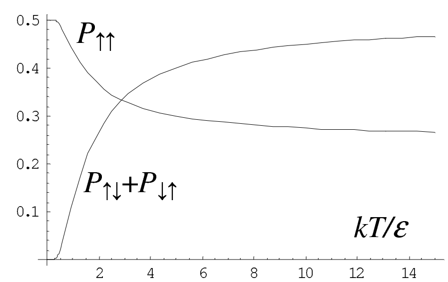
$$P_{ant}=P_{\uparrow\downarrow}+P_{\uparrow\downarrow}=\frac{1}{1+e^{2\varepsilon/kT}}$$

Dessa funktioner illustreras i nedanstående diagram.



Vid höga temperaturer blir alla tillstånd lika sannolika. I lågtemperaturgränsen går sannolikheten för de antiparallella tillstånden mot noll.

Vid låga temperaturer är $P_{\uparrow\uparrow}$ alltså större än $P_{\uparrow\downarrow}+P_{\uparrow\downarrow}$, d.v.s. det är sannolikare att båda spinnen pekar upp än att bara ett gör det. Vid höga temperaturer gäller det motsatta. Detta illustreras i nedanstående diagram.



Den temperatur då dessa båda sannolikheter är lika stora kan beräknas ur ekvationen $P_{\uparrow\uparrow} = P_{\uparrow\downarrow}+P_{\uparrow\downarrow}$. Med lite eftertanke inser man att när detta inträffar måste det gälla att $P_{\uparrow\downarrow}+P_{\uparrow\downarrow}= 1/3$ och $P_{\uparrow\uparrow} = P_{\downarrow\downarrow} = 1/3$. Härur fås

$$\frac{1}{1+e^{2\varepsilon/kT}} = \frac{1}{3}$$

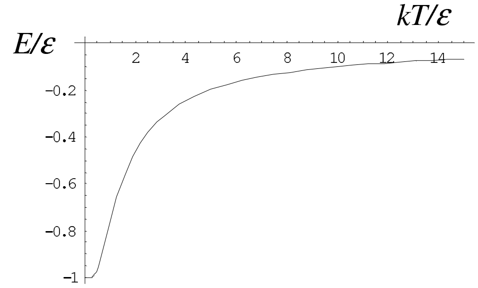
vilket ger

$$T = \frac{2\varepsilon}{k\ln 2} = 2{,}89\frac{\varepsilon}{k}$$

Medelenergin är

$$E = \frac{2(-\varepsilon)e^{\varepsilon/kT} + 2\varepsilon e^{-\varepsilon/kT}}{2e^{\varepsilon/kT} + 2e^{-\varepsilon/kT}} = -\varepsilon\tanh\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

Dess temperaturberoende illustreras i nedanstående diagram.



Energin är $-\varepsilon$ vid $T = 0$ och går mot noll vid höga temperaturer.

Svar: Tillståndssumman är $Z = 4\cosh\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)$. Sannolikheten för parallella spinn är $P_{par} = \frac{1}{1+e^{-2\varepsilon/kT}}$ och sannolikheten för antparallella spinn är $P_{ant} = \frac{1}{1+e^{2\varepsilon/kT}}$. Medelenergin är $E = -\varepsilon\tanh\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)$. Vid temperaturer lägre än $2{,}89\frac{\varepsilon}{k}$ blir det mer sannolikt att båda spinnen pekar upp än att bara ett spinn gör det.

.