CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET
Teoretisk fysik och mekanik
Göran Niklasson

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)

Tid och plats: Torsdagen den 24 april 2003 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

Examinatorer: Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

Hjälpmedel för uppgifterna 1–4: Inga.

Hjälpmedel för uppgifterna 5–8: Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med ”Allmänna relationer för enkomponentsystem” och ”Kanonisk fördelning” (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

Bedömning: Uppgifterna 1–3 ger högst 2 poäng vardera, uppgift 4 ger högst 6 poäng och uppgifterna 5–8 högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter och duggor adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

Lösningar: Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 12 maj.

Rättningsgranskning: Tisdagen den 13 maj kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

1. För en ideal gas gäller att energin U enbart beror av temperaturen. Använd detta för att visa att C_p-$C_v = R$.

2. Vilka tillståndsfunktioner är konstanta i följande processer:

   (a) Reversibel adiabatisk expansion,

   (b) Fri expansion ut i vacuum,

   (c) Passage genom en strypventil (Joule-Thomson-effekten).

3. Skissera ett fasdiagram för vatten i pT-planet. Markera de olika faserna och särskilt två viktiga punkter i diagrammet. Diagrammets utseende kan bestämmas i detalj om man känner en viss tillståndsfunktion. Vilken?

4. Gör en principskiss över metallers värmekapacitet, $c_v(T)$, där temperaturberoendet över hela temperaturskalan framkommer. Dela in skissen i olika regimer och beskriv den temperatur som bestämmer övergången mellan varje regim. Ge en kort redovisning för varför $c_v(T)$ har det T-beroende det har i varje regim.

5. James W. Stevens, som är biträdande professor i Mechanical Engineering vid Mississippi State University, har ansökt om medel för ”Development of a Ground-source Heat Engine”. Här följer några meningar ur ansökan:

   The objective of this proposal is to design and construct a ground-source heat engine operating on the temperature difference between the ground and the atmosphere that will produce a daily average of 100 mW of electrical energy.

   At most locations outside the tropics, the diurnal temperature changes in the air near ground level are large compared with the temperature changes even a very short distance below the surface of the ground. In concept, these daily temperature differences are of the order of 1–10 K in surroundings close to 300 K.

   As with many natural power sources, there is an enormous amount of energy, but very little availability.

   (a) Antag att luftens temperatur är 5°C och att temperaturen strax under jordytan är 10°C. Hur mycket värmeenergi per tidsenhet måste minst extraheras från jorden om man skall producera en elektrisk effekt på 100 mW?

   (b) Förklara vad Stevens menar med att denna och andra naturliga energikällor karakteriseras av ”very little availability”?

6. Som motor i en höghastighetsborr används en liten turbin, som drivs av komprimerad luft. Luften kommer in i turbinen med trycket 500 kPa och temperaturen 30 °C. När luften lämnar turbinen har dess tryck sjunkit till 180 kPa.

   (a) Beräkna det uträttade arbetet per mol luft om processen i turbinen kan anses reversibel och adiabatisk.

   (b) Borren kräver effekten 746 W (en hästkraft). Luftslangen till turbinen har diametern 1 cm. Beräkna luftens hastighet i slangen under antagandet att dess kinetiska energi är försumbar i jämförelse med andra för problemet relevanta energier!

   (c) Kontrollera att antagandet om försumbar kinetisk energi var rimligt!

7. En en-atomig gas befinner sig i en cylinder med höjden h i jordens gravitationsfält, g. Gasen består av N stycken atomer, var och en med massan m, i termisk jämvikt vid temperaturen T.

   (a) Bestäm sannolikhetsfördelningen $P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p})$ för en atom i gasen. Kom ihåg att sanno-likheten för att finna atomen inom cylindern måste vara normerad till ett.

   (b) Beräkna medelenergin $\langle E\rangle/N$.

   (c) Rita en graf för kvoten $\langle E\rangle/Nmgh$ som funktion av kT/mgh.

   (d) Bestäm med hjälp av grafen det värde på kT/mgh som ger högst värmekapacitet.

   (e) Vad är gränsvärdet för $\langle E\rangle/N$ då kvoten kT/mgh är stor resp. liten jämfört 1?

8. En atom har tre tillstånd i ett yttre magnetfält givna av dess spinn: spinn upp $s_z=1$ med energin $E=E_0$, inget spinn $s_z=0$ med $E=0$, och spinn ner $s_z=-1$ med energin $E= E_0$.

   (a) Givet att atomen är i termisk jämvikt, vad är sannolikheten för att atomen befinner sig i tillståndet $s_z=1$? I vilken temperaturgräns är denna sannolikhet 1/3. Motivera ditt svar i detalj.

   (b) Vad blir medelenergin $\langle E\rangle$ uttryckt i E_0, T....Visa grafiskt hur $\langle E\rangle$ beror av T. Gör det samma för värmekapaciteten.

   (c) Vad är medelvärdet $\langle s_z\rangle$? Motivera ditt svar kvalitativt.

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET
Teoretisk fysik och mekanik
Göran Niklasson

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2003-04-24

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 12 maj.

Rättningsgranskning: Tisdagen den 13 maj kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

Lösningar

Uppgift 1

Första huvudsatsen på differentialform: $\delta Q = dE + pdV$

Om energin E bara beror av T gäller att $dE = \frac{dE}{dT} dT$

och alltså $\delta Q = \frac{dE}{dT} dT + pdV$

Ovanstående samband gäller vid alla reversibla processer.

Om vi specialiserar till processer vid konstant volym blir $dV = 0$ och alltså finner vi att

$$\delta Q = \frac{dE}{dT} dT$$

Det innebär att den isokora värmekapaciteten C_V är lika med derivatan av E:

$$C_V = \frac{dE}{dT}$$

Om vi i stället specialiserar till processer vid konstant tryck gäller enligt idela gaslagen för en mol gas att $pdV = RdT$, vilket ger

$$\delta Q = \frac{dE}{dT} dT + RdT$$

Den isobariska värmekapaciteten C_p kan alltså skrivas som

$$C_p = \frac{dE}{dT} + R$$

Ur detta följer att $C_p - C_V = R$, vilket skulle visas.

Uppgift 2

(a) Entropin

(b) Energin

(c) Entalpin

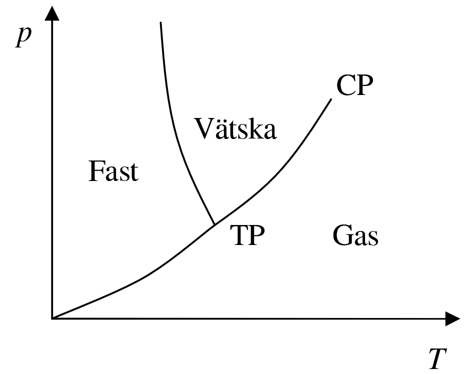
Uppgift 3

CP = Kritiska punkten

TP = Trippelpunkten

Den tillståndsfunktion som bestämmer fasdiagrammet är Gibbs fria energi G.

Också svaret ”Kemiska potentialen μ” kan godkännas (kemiska potentialen är Gibbs fria energi per molekyl)



Uppgift 4

Se kursboken.

Uppgift 5

Temperatur i jorden: $T_1 = 283$ K

Temperatur i luften: $T_2 = 278$ K

Maximal verkningsgrad för en värmemotor: $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{278}{283} = 0{,}018 = 1{,}8\ \%$

Uteffekt: $w = 0{,}10$ W

Ingående värmeflöde: $q_1 = \frac{w}{\eta} = \frac{w}{(1 - T_2 / T_1)} = 5{,}66$ W

Att energikällan har ”very little availability” innebär helt enkelt att bara en mycket liten andel av värmeflödet kan utvinnas som arbete. Ett annat sätt att säga samma sak är att exergin för systemet är liten.

Svar: (a) 5,7 W (b) Se ovan

Kommentar: Värmeledningsförmågan för mark (sten) är ungefär 2,5 W/m·K. Om vi antar att en sådan här apparat får ta upp en area på 1 m^2 så skulle alltså värmeflödet leda till en temperaturgradient i marken på 5,66/(1·2,5) °C/m ≈ 2 °C/m, vilket inte verkar otänkbart. Om arean i stället är 1 dm^2 blir motsvarande siffra 200 °C/m, vilket verkar klart orimligt. Slutsatsen är att apparaten behöver uppta ganska stor yta för att generera en förhållandevis liten effekt. Vad den skulle kunna användas till vet jag inte. Nattbelysning där elnät saknas? Fast det finns ju redan lyktor som laddar upp sina batterier under dagen med hjälp av solceller.

Uppgift 6

Ingångstryck: $p_1 = 500 \cdot 10^3$ Pa

Utgångstryck: $p_2 = 180 \cdot 10^3$ Pa

Ingångstemperatur: $T_1 = 303$ K

Utgångstemperatur: $T_2 = ?$

Utgångstemperaturen kan beräknas ur de samband som gäller vid adiabatiska processer (luften kan med god approximation behandlas som en ideal gas med adiabatiska koefficienten $\gamma = 1{,}4$):

$$p_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma}$$

$$T_2 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\frac{1}{\gamma}} T_1 = 226 \text{ K} = -47 °\text{C}$$

Det av turbinen uträttade nyttiga arbetet W är lika med minskningen i entalpi. Per mol gas får vi

$$W = C_p\left(T_1 - T_2\right) = \frac{7}{2}RT_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] = 2232 \text{ J}$$

Luftens molvolym på ingångssidan: $v_1 = \dfrac{RT_1}{p_1}$

Luftens hastighet i slangen: $u = ?$

Slangens diameter: $d = 1 \cdot 10^{-2}$ m

Slangens tvärsnittsarea: $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$

Antal mol luft som per tidsenhet passerar genom turbinen:

$$n = \frac{uA}{v_1} = \frac{\pi p_1 d^2 u}{4RT_1}$$

Avgiven effekt:

$$P = nW = \frac{7\pi u p_1 d^2}{8}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] = 746 \text{ W}$$

Ur detta kan den sökta hastigheten beräknas:

$$u = \frac{8P}{7\pi p_1 d^2}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]^{-1} = 21{,}4 \text{ m/s}$$

Kinetisk energi för en mol luft (molekylvikten för luft är ungefär 29)

$$K = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 10^{-3} 21{,}4^2 \text{ J} = 7 \text{ J}$$

Detta är betydligt mindre än det uträttade arbetet per mol, så antagandet att kinetiska energin kan försummas är hållbart.

Svar: (a) 2,2 kJ (b) 21 m/s (c) Antagandet stämmer bra

Uppgift 7

(a) Sannolikhetsfördelningen kan bara bero på rörelsemängdens belopp p och höjden z över botten. Den bestäms av Boltzmannfaktorn och har formen.

$$P(z, p) = \frac{1}{Z_z(T, H) Z_p(T)} \exp\left[-\frac{mgz + p^2/2m}{kT}\right]$$

där $Z_z(T,H)$ och $Z_p(T)$ är normeringsfaktorer som kan skrivas

$$Z_z(T, H) = A\int_0^h \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) dz = \frac{AkT}{mg}\left[1 - \exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right)\right]$$

$$Z_p(T) = 4\pi\int_0^\infty \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) p^2 dp = \left(2\pi mkT\right)^{3/2}$$

Sannolikhetsfördelningen är alltså

$$P(z,p) = \frac{\exp\left[-\frac{mgz + p^2/2m}{kT}\right]}{(2\pi mkT)^{3/2}\left(\frac{AkT}{mg}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right)\right]}$$

(b) Medelvärdet av den kinetiska energin per molekyl är

$$< \frac{p^2}{2m} >= \frac{4\pi}{Z_p(T)}\int_0^\infty p^2 \frac{p^2}{2m}\exp\left[-\frac{p^2}{2mkT}\right] = kT^2 \frac{d\ln Z_p(T)}{dT} = \frac{3}{2}kT$$

Medelvärdet av den potentiella energin per molekyl är

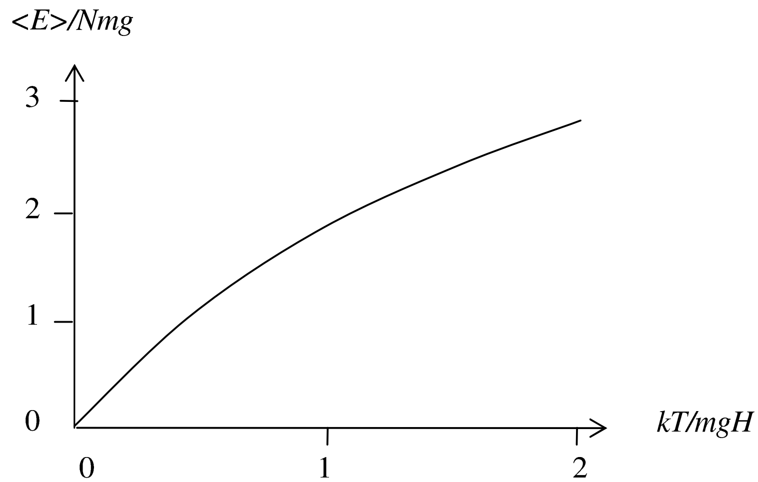
$$< mgz >= \frac{1}{Z_z(T,H)}\int_0^\infty mgz\exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right] = kT^2\frac{\partial \ln Z_z(T,H)}{\partial T}$$

$$= kT\left[1 - \frac{mgH}{kT\left(e^{mgH/kT}-1\right)}\right]$$

Den sammanlagda medelenergin per molekyl blir alltså

$$\frac{< E >}{N} = \frac{3}{2}kT + kT\left[1 - \frac{mgH}{kT\left(e^{mgH/kT}-1\right)}\right]$$

(c)



(d) Kurvans lutning minskar när T ökar. Den högsta värmekapaciteten fås alltså vid låga temperaturer.

(e) I lågtemperaturgränsen gäller att

$$\frac{< E >}{N} \to \frac{5}{2}kT$$

och i högtemperaturgränsen gäller

$$\frac{< E >}{N} \to \frac{3}{2}kT$$

Uppgift 8

Tillståndssumman är

$$Z(T) = e^{-E_0/kT} + 1 + e^{-E_0/kT} = 1 + 2e^{-E_0/kT}$$

(a) Sannolikheten för tillståndet $s_z = 1$ är

$$P_1 = \frac{e^{-E_0/kT}}{1+2e^{-E_0/kT}} = \frac{1}{e^{E_0/kT}+2}$$

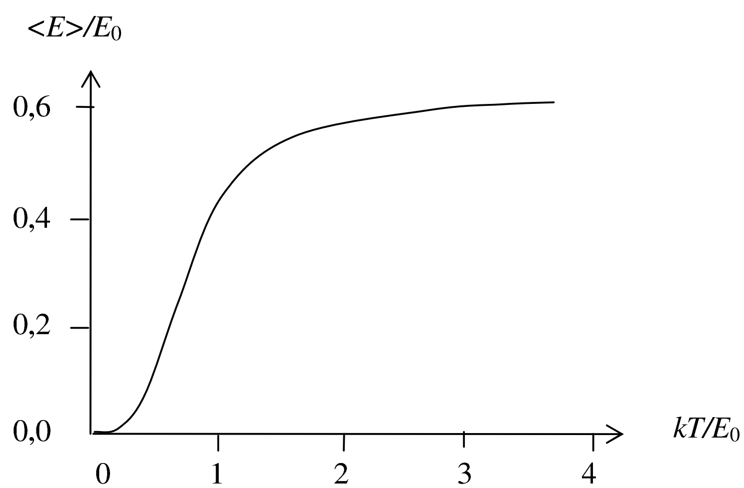
P_1 blir lika med 1/3 i gränsen $kT >> E_0$. I denna gräns är alla tre tillstånden lika sannolika.

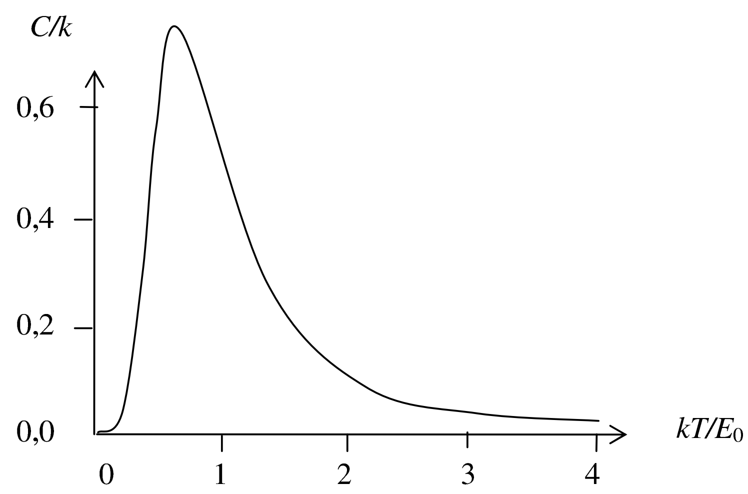
(b) Medelenergin är

$$< E >= \frac{2E_0 e^{-E_0/kT}}{1+2e^{-E_0/kT}} = \frac{2E_0}{e^{E_0/kT}+2}$$

och värmekapaciteten är

$$C(T) = \frac{d < E >}{dT} = 2k\left(\frac{E_0}{kT}\right)^2 \frac{e^{E_0/kT}}{\left(2+e^{E_0/kT}\right)^2}$$





(c) Eftersom s_z =1 och s_z = -1 är lika sannolika är det uppenbart att $\langle s_z \rangle = 0$.