CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET
Teoretisk fysik och mekanik
Göran Niklasson

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)

Tid och plats: Onsdagen den 18 december 2002 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

Examinatorer: Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

Hjälpmedel för uppgifterna 1–6: Inga.

Hjälpmedel för uppgifterna 7–10: Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med ”Allmänna relationer för enkomponentsystem” och ”Kanonisk fördelning” (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

Bedömning: Uppgifterna 1–6 ger högst 2 poäng vardera och uppgifterna 7–10 högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter och duggor adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

Lösningar: Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 10 januari.

Rättningsgranskning: Måndagen den 20 januari kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

1. Entropin för ett system i ett jämviktstillstånd, karakteriserat av t.ex. tillstånds-variablerna T och V, kan enligt termodynamiken definieras som

$$S(T,V) = S(T_0,V_0) + \int_{(T_0,V_0)}^{(T,V)} \frac{\delta Q}{T}$$

där δQ representerar tillförd värme och där $S(T_0,V_0)$ är entropin i ett godtyckligt valt referenstillstånd. Det förutsätts dock att integralen från tillståndet (T_0,V_0) till tillståndet (T,V) beräknas över en reversibel process. Detta kan synas vara en allvarlig begränsning, eftersom alla verkliga processer är mer eller mindre irreversibla. I själva verket innebär det ingen begränsning alls. Förklara!

2. I termodynamiken har man anledning att introducera olika ”termodynamiska potentialer”. Ur det faktum att dessa är tillståndsfunktioner följer ett antal exakta samband som kallas Maxwell-relationer.

En av de termodynamiska potentialerna är Gibbs fria energi G. Den beror av tillståndsvariablerna T, p och N enligt formeln

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$

Vilken Maxwell-relation följer ur detta?

3. Gör en principskiss som visar kretsloppet i ett vanligt kylskåp! Markera med pilar var värme avges eller tas upp, och ange särskilt vilken fysikalisk process som ger upphov till temperatursänkningen!

4. Betrakta ett system bestående av två identiska partiklar med tre tillgängliga energinivåer:

$$\varepsilon_n = n\varepsilon, \qquad n = 0,1,2.$$

Den lägsta energinivån är tvåfalt degenererad, de andra är icke-degenererade. Systemet är i jämvikt vid en temperatur T. Bestäm partitionsfunktionen Z och medelenergin $\bar{E}$ samt numrera (visualisera) alla möjliga konfigurationer för vart och ett av nedanstående fall:

(a) Partiklarna är fermioner,

(b) Partiklarna är bosoner.

5. Under vilka förhållanden kan ett system av icke växelverkande fermioner respektive bosoner beskrivas med Boltzmann-statistik?

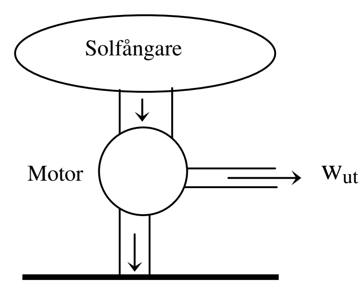
6. Gör en uppskattning av specifika värmet vid låga temperaturer för

(a) en fermigas,

(b) en bosegas.

(c) Vad är det som i dessa båda fall avgör om temperaturen kan anses vara låg?

7. En soldriven motor kan konstrueras genom att man använder en solfångare som värmekälla och den omgivande marken som kylare. Intensiteten hos den solstrålning som träffar jordytan är ungefär 1,0 kW/m^2, men det är inte möjligt att utnyttja hela den effekten eftersom solfångarens yta med nödvändighet återutsänder en del av strålningen i enlighet med Stefan-Boltzmanns lag. Ytan får alltså inte vara alltför het, för då förlorar man en stor del av strålningseffekten. Den får å andra sidan inte heller vara alltför kall, för då blir värmemotorns verkningsgrad alltför dålig.



(a) Vid vilken temperatur återutsänds all inkommande trålning?

(b) Bestäm den optimala temperaturen för ytan utgående från villkoret att motorns uteffekt skall vara så stor som möjligt! Det får antas att motorn har samma verkningsgrad som en carnotmaskin. Marktemperaturen antages vara 10°C.

Anm: Deluppgift b leder till en ekvation som inte kan lösas analytiskt. Någon mycket precist siffervärde efterfrågas inte, utan det räcker med en enkel numerisk uppskattning.

8. Stjärnor bildas genom att interstellära gasmoln dras samman av gravitationen. Låt oss för enkelhets skull anta att ett sådant moln har formen av en sfär med radien R och enbart består av fria väteatomer, vardera med massan m. En termodynamisk modell för molnets kollaps kan konstrueras genom att man utgår från Helmholtz fria energi för en ideal gas och tillfogar en ”självenergi” F_G som representerar den potentiella energin för gravitationskrafterna. Om molnets densitet antages konstant kan självenergin beräknas enligt formeln

$$F_G = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

där M är molnets sammanlagda massa och G är gravitationskonstanten.

(a) Finn molnets tillståndsekvation, d.v.s. trycket p som funktion av temperaturen T och radien R!

(b) Ett stabilitetsvillkor för gasen är att kompressibiliteten skall vara positiv (jämför van der Waals tillståndsekvation, där teckenbyte hos isotermernas lutning signalerar en fasomvandling till vätska). Använd detta för att härleda ett villkor som T och V måste uppfylla för att molnet skall vara stabilt.

(c) Antag att modellen är tillämplig på solen, som har massan $2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg och radien $7{,}0 \cdot 10^{8}$ m. Hur hög måste temperaturen vara för att solen skall vara stabil?

Anm: Modellen förutsätter att såväl temperatur som densitet är desamma i hela molnet. Det stämmer naturligtvis inte för solen, och den består inte heller enbart av väteatomer, men modellen ger ändå en hyfsad bild av verkligheten.

9. Ett material bestående av N stycken fria partiklar befinner sig i svagt yttre magnetfält med flödestätheten B. Varje partikel har ett magnetiskt moment vars komponent längs fältet kan skrivas som $m\mu$, där μ är en konstant och där heltalet m kan anta värdena $-J$, $-J+1$, ….. , $J-1$, J. Materialet befinner sig vid temperaturen T.

(a) Bestäm materialets partitionsfunktion Z.

(b) Beräkna medelmagnetiseringen $\bar{M}$.

(c) Hur ser uttrycket för $\bar{M}$ ut vid höga temperaturer?

10. Ett gummibands elasticitet kan beskrivas genom att betrakta det som en endimensionell polymer bestående av N molekyler, vardera med längd d och hoplänkade ända vid ända. Vinkeln mellan två angränsande molekyler kan antingen vara 0° eller 180°. När gummibandet är obelastat kan båda vinklarna antas ha samma sannolikhet.

(a) Gummibandets längd kan i denna modell skrivas som $L = 2md$, där m är ett positivt heltal. Visa att antalet konfigurationer som polymermolekylerna kan anta är.

$$g(N,m) = \frac{2N!}{\left(\frac{N}{2}+m\right)!\left(\frac{N}{2}-m\right)!}$$

Redogör tydligt för hur du resonerar dig fram till detta resultat!

(b) Om $N >> 1$ och $m << N$ kan uttrycket ovan förenklas till

$$g(N,m) \approx g(N,0)\exp\left(-2m^2/N\right)$$

Vad är då entropin för gummibandet som funktion av längden L ?

(c) Hur stor kraft F krävs för att hålla gummibandet sträckt till längden L, om $N >> 1$ och $m << N$?

(d) Hur ser sambandet mellan kraft och längd ut om endast villkoret $N >> 1$ är uppfyllt?

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
OCH GÖTEBORGS UNIVERSITET
Teoretisk fysik och mekanik
Göran Niklasson

Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2002-12-18

Rättningsprotokoll: Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 10 januari.

Rättningsgranskning: Måndagen den 20 januari kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

Lösningar

Uppgift 1

Termodynamikens andra huvudsats säger oss att entropin är en tillståndsfunktion, d.v.s. entropiändringen vid en process från ett jämviktstillstånd till ett annat beror inte av hur processen går till. Man kan därför alltid välja att beräkna ändringen via en reversible process och vara säker på att resultatet är detsamma som man skulle få i vilken annan process som helst, reversibel eller ej.

Uppgift 2

Gibbs fria energi G kan betraktas som en funktion av de oberoende tillståndsvariablerna T, p och N. Ur matematikens flervariabelanalys följer att de blandade andra ordningens partialderivatorna är symmetriska i den meningen att t. ex.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p} = \frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T}$$

vilket leder till Maxwellrelationen

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N}$$

Anmärkning: På samma sätt finner man också att

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,p} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,N}$$

och

$$\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_{T,p} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{T,N}$$

som också är Maxwellrelationer, fast mindre ofta använda.

Uppgift 3

Se figuren på sidan 19 i Göran Wahnströms ”Sammanfattning av delar av kursen Termodynamik och statistisk fysik för F3”.

Den fysikaliska process som åstadkommer temperatursänkningen är Joule-Kelvin-processen (även kallad Joule-Thomson-processen), som innebär att det cirkulerande mediet pressas genom en strypventil.

Uppgift 4

Vi gör först en omnumrering och betecknar de fyra tillgängliga enpartikeltillstånden (orbitalerna) med index r = 1,2,3,4. Energierna är alltså

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$

$\varepsilon_3 = \varepsilon$

$\varepsilon_4 = 2\varepsilon$

(a) Fermioner lyder Paulis uteslutningsprincip. Vi får följande 6 möjligheter, där siffrorna 0 eller 1 anger om respektive tillstånd är besatt eller inte:

	Orbital nr			
1	2	3	4	Total energi
1	1	0	0	0
1	0	1	0	ε
0	1	1	0	ε
1	0	0	1	2ε
0	1	0	1	2ε
0	0	1	1	3ε

Tillståndssumman blir

$$Z(T) = 1 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT}$$

och medelenergin blir

$$\bar{E}(T) = \frac{2\varepsilon e^{-\varepsilon/kT} + 2\cdot 2\varepsilon e^{-2\varepsilon/kT} + 3\varepsilon e^{-3\varepsilon/kT}}{1 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT}} = \frac{2e^{-\varepsilon/kT} + 4e^{-2\varepsilon/kT} + 3e^{-3\varepsilon/kT}}{1 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT}}\varepsilon$$

(b) Bosoner kan i motsats till fermioner sitta fler än en i varje orbital. Vi får följande 10 möjligheter:

	Orbital nr			
1	2	3	4	Total energi
2	0	0	0	0
1	1	0	0	0
0	2	0	0	0
1	0	1	0	ε
0	1	1	0	ε
1	0	0	1	2ε
0	1	0	1	2ε
0	0	2	0	2ε
0	0	1	1	3ε
0	0	0	2	4ε

Tillståndssumman blir

$$Z(T) = 3 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 3e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT} + e^{-4\varepsilon/kT}$$

och medelenergin blir

$$\bar{E}(T) = \frac{2\varepsilon e^{-\varepsilon/kT} + 3\cdot 2\varepsilon e^{-2\varepsilon/kT} + 3\varepsilon e^{-3\varepsilon/kT} + 4\varepsilon e^{-4\varepsilon/kT}}{3 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 3e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT} + e^{-4\varepsilon/kT}} = \frac{2e^{-\varepsilon/kT} + 6e^{-2\varepsilon/kT} + 3e^{-3\varepsilon/kT} + 4e^{-4\varepsilon/kT}}{3 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 3e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT} + e^{-4\varepsilon/kT}}\varepsilon$$

Uppgift 5

Boltzmann-statistik gäller när kvantmekaniska effekter är försumbara. Det betyder att partikeltätheten skall vara liten, så att medelantalet partiklar per orbital är litet. Ett annat sätt att formulera kriteriet är att medelavståndet mellan partiklarna skall vara stort jämfört med de Broglie-våglängden. Medelenergin E per partikel är av storleksordningen kT, energin är relaterad till rörelsemängden p och partikelmassan m genom sambandet $E = p^2/2m$, och de Broglievåglängden λ är h/p. Alltså finner vi att

$$\lambda \sim h\sqrt{mE} \sim h\sqrt{mkT}$$

Eftersom vi endast talar om storleksordningar kastar vi bort numeriska faktorer som 2 3/2 eller π.

Medelavståndet mellan partiklarna är av storleksordningen $(V/N)^{1/3}$, där N är antalet partiklar och V är volymen. Härur finner vi att villkoret för Boltzmann-statistik kan skrivas

$$\frac{N}{V} << \left(\frac{mkT}{h^2}\right)^{3/2}$$

Uppgift 6

Se kursboken.

Uppgift 7

Beteckna solfångarens temperatur med T och den inkommande strålningsintensiteten med q_0. Den värmeeffekt per ytenhet som solfångaren kan vidarebefordra till motorn blir då

$$q = q_0 - \sigma T^4$$

där σ är Stefan-Boltzmanns konstant. Siffervärden: $q_0 = 1000$ W/m^2, $\sigma = 5{,}6708 \cdot 108$ W/m$^2 \cdot$K^4.

(a) Den tillförda nettoeffekten blir noll om

$$T = \sqrt[4]{\frac{q_0}{\sigma}} = 364 \text{ K} = 91°\text{C}$$

(b) Om motorn har samma verkningsgrad som en carnotmaskin blir det per ytenhet och tidsenhet uträttade arbetet

$$w_{ut} = \left(q_0 - \sigma T^4\right)\left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$$

där $T_0 = 283$ K är marktemperaturen. Vi söker T så att w_{ut} blir maximal. Alltså bildar vi derivatan av w_{ut} m.a.p. T och sätter den lika med noll:

$$\frac{dw_{ut}}{dT} = -4\sigma T^3\left(1 - \frac{T_0}{T}\right) + \left(q_0 - \sigma T^4\right)\frac{T_0}{T^2} = -4\sigma T^3 + 3\sigma T^2 T_0 + \frac{q_0 T_0}{T^2} = 0$$

Efter omformning ger detta ekvationen

$$T^5 - \frac{3T_0}{4}T^4 - \frac{q_0 T_0}{4\sigma} = 0$$

Numerisk lösning ger $T = 325$ K = 52°C.

Svar: (a) 91°C, (b) 52°C

Uppgift 8

(a) Helmholtz fria energi för gasen är

$$F(T,V) = F_0(T,V) - \frac{3GM^2}{5R} = F_0(T,V) - \frac{3}{5}GN^2m^2\left(\frac{4\pi}{3V}\right)^{1/3}$$

där $F_0(T,V)$ är fria energin för en ideal gas och där vi i sista ledet använt relationen mellan volym och radie för en sfär, $V = 4\pi R^3/3$:

Vi kan nu bestämma trycket ur partialderivatan av F med avseende på V. Eftersom vi vet att derivering av $F_0(T,V)$ leder till ideala gaslagen finner vi att

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{GN^2m^2}{V^{4/3}} = \frac{MkT}{mV} - \frac{1}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{GM^2}{V^{4/3}}$$

där vi i sista ledet använt att partikelantalet N är bestämt av den totala massan M och molekylmassan m genom sambandet $N = M/m$.

(b) Vi är intresserade av lutningen hos isotermerna i ett p-V-diagram och bildar därför partialderivatan av p med avseende på V:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{NkT}{V^2} + \frac{4}{15}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{GN^2m^2}{V^{7/3}}$$

Denna partialderivata måste vara negativ (volymen skall minska när trycket ökar), annars är systemet instabilt. Stabilitetsvillkoret blir alltså att

$$kT > \frac{4}{15}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{GMm}{V^{1/3}}$$

vilket med användning av sambandet mellan V och R kan omformas till

$$T > \frac{4}{15}\frac{GMm}{kR}$$

(c) Siffervärden: $k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ J/K, $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $N\cdot m^2/kg^2$, $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg (väteatomens massa), $M = 2{,}00\cdot10^{30}$ kg (solens massa), $R = 7\cdot10^8$ m (solens radie). Insättning av dessa värden ger villkoret $T > 6{,}16\cdot10^6$ K.

Svar: (a) $p = \frac{MkT}{mV} - \frac{1}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{GM^2}{V^{4/3}}$ där $V = \frac{4\pi}{3}R^3$

(b) $T > \frac{4}{15}\frac{GMm}{kR}$ (c) $T > 6{,}2\cdot10^6$ K

Anmärkning: Ovanstående är inte hela sanningen. Instabiliteter och kollapser är komplicerade fenomen. Ett annat villkor får man ur det så kallade ”virialteoremet”, som för ett system av gravitationellt växelverkande partiklar i jämvikt säger att

$$U = -2K$$

där U är medelvärdet av den potentiella energin och K är medelvärdet av den kinetiska energin (som i detta fall är $3kT/2$). Härur kan man härleda att

$$T > \frac{3}{15}\frac{GMm}{kR}$$

vilket visades av Jeans någon gång i början av 1900-talet. Vi noterar att det i huvudsak är samma villkor som vi fick fram utgående från tillståndsekvationen, men att det skiljer sig med en faktor ¾.

Uppgift 9

Energin i tillståndet m är $-m\mu B$.

(a) Tillståndssumman (”the partition function”) är

$$Z(T,B) = \sum_{m=-J}^{m=J} e^{m\mu B/kT} = \sinh\left[(2J+1)\mu B/2kT\right]/\sinh\left[\mu B/2kT\right]$$

(b) Medelmagnetiseringen är

$$\bar{M} = N\frac{1}{Z}\sum_{m=-J}^{m=J} m\mu e^{m\mu B/kT} = NkT\left(\frac{\partial}{\partial B}\ln Z\right)_T$$
$$= \frac{N\mu}{2}\left\{(2J+1)\coth\left[(2J+1)\frac{\mu B}{2kT}\right] - \coth\frac{\mu B}{2kT}\right\}$$

(c) Vid höga temperaturer ($kT >> \mu B$) kan vi serieutveckla coth-funktionen:

$$\coth x = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^3}{3} + \ldots\right)$$

vilket ger

$$\bar{M} \approx \tfrac{1}{3} NJ(J+1)\frac{\mu^2 B}{kT}$$

Uppgift 10

(a) Antag att antalet länkar med vinkeln 0° är N_+ och antalet länkar med vinkeln 180° är N_-. Kedjans hela längd blir då

$$L = 2md = (N_+ - N_-)d$$

Eftersom $N_+ + N_-$ måste vara lika med N kan vi skriva

$$N_+ = \frac{N}{2} + m$$
$$N_- = \frac{N}{2} - m$$

Antalet olika konfigurationer för givna värden på N_+ och N_- är $N!/(N_+!\,N_-!)$. Antalet konfigurationer $g(N,m)$ som ger längden $2md$ är dubbelt så stort, eftersom en omkastning av N_+ och N_- ger samma längd:

$$g(N,m) = \frac{2N!}{\left(\frac{N}{2}+m\right)!\left(\frac{N}{2}-m\right)!}$$

(b) Om $N>>1$ och $m<<N$ finner man med hjälp av Stirlings formel att

$$g(N,m) \approx g(N,0)\exp\left(-\frac{2m^2}{N}\right)$$

Entropin är då

$$S = k\ln g = k\ln g(N,0) - \frac{kL^2}{2Nd^2}$$

(c) Sambandet mellan kraften f, längden L och temperaturen T är tillståndsekvationen för gummibandet och kan bestämmas enligt termodynamikens standardmetoder med den modifikationen att kraft och längd ersätter tryck och volym. Enligt termodynamikens första huvudsats gäller att

$$dE = \delta Q + \delta W = TdS + fdL$$

där f är kraften på gummibandet. Helmholts fria energi defineras som F = E-TS, och dess differential blir

$$dF = -SdT + fdL$$

Motsvarande Maxwellrelation är

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L = -\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = \frac{kL}{Nd^2}$$

Genom att integrera denna ekvation och använda randvillkoret $f = 0$ när $L = 0$ finner vi att

$$f = \frac{kTL}{Nd^2}$$

(d) Betrakta bara en av länkarna. I närvaro av en yttre kraft f har länken energin $-fd$ om den är riktad längs kraften och energin fd om den är motriktad. Medellängden per länk är därför

$$\bar{l} = \frac{e^{fd/kt} - e^{-fd/kt}}{e^{fd/kt} + e^{-fd/kt}} d = d \tanh \frac{fd}{kT}$$

Kedjans sammanlagda längd blir då

$$L = n\bar{l} = Nd \tanh \frac{fd}{kT}$$

I fallet $kT << fd$ återfinner vi resultatet från deluppgift c.