

# Termodynamik och Statistisk Fysik F3

FTF 140  
TENTAKIT

Datum	Tenta	Lösning	Svar
2002-12-18	x	x	
2003-04-24	x	x	
2003-08-27	x	x	
2003-12-17	x	x	
2004-04-15	x	x	
2004-08-25	x	x	
2004-12-15	x	x	
2005-03-31	x	x	
2005-08-24	x	x	
2005-12-14	x	x	
2006-04-20	x	x	
2006-08-30	x	x	

19 oktober 2006

## Tentamen i Termodynamik och statistisk för F3(FTF140)

**Tid och plats:** Onsdagen den 30 augusti 2006, kl. 8.30-12.30 i V-huset.

**Examinator:** Mats Granath, 7723175, 0708938077, mgranath@fy.chalmers.se

**Hjälpmedel:** BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller, ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Finns på kurshemsidan efter tentans slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås *senast* måndag 18/9 2006.

**Rättningsgranskning:** Efter överenskommelse med examinator, rum O7109B.

### Uppgift 1

En värmeisolerad behållare med en rörlig vägg innehåller en gas (inte nödvändigtvis ideal). Väggen hålls fixerad så att gasen har ett tryck  $P_1$  och volym  $V_1$ . Då väggen släpps fri expanderar gasen spontant till en volym  $V_2$  och ett tryck  $P_2$  som är detsamma som omgivningens. Hur stor är ändringen i gasens inre energi? (Väggens massa och friktion då väggen rör sig kan försummas) (10p)

### Uppgift 2

Ett fast mne innehåller fixerade orenheter i form av joner som uppträder som magnetiska dipoler med spinn 1. I ett magnetfält  $B$  kan dessa alltså ta kvantal  $m = -1, 0, 1$  med energi  $\epsilon(m) = -B\mu m$  där dipolmomentet  $\mu$  är en konstant. Jonerna är utspridda i materialet på så sätt att dom kan betraktas som oberoende. Vad är jonernas bidrag till värmekapaciteten  $C_v$  per mol som funktion av temperaturen vid låga temperaturer  $kT \ll \mu B$  om materialet innehåller 1% orenheter? (10p)

### Uppgift 3

En behållare innehåller en viss mängd vatten i jämvikt vid ett tryck och temperatur sådant att vattnet befinner sig i den kritiska punkten. Behållaren som är tät och har konstant volym lämnas sedan för sig själv i ett normaltempererat rum ( $25^{\circ}\text{C}$ ) tills dess att jämvikt uppnås. Hur stor volymandel av vattnet är då gas respektive vätska? (10p)

### Uppgift 4

I jämvikt mellan två faser av ett ämne vid givet tryck och temperatur gäller att Gibbs fria energi för respektive fas ska vara lika. Härled med hjälp av detta den så kallade Clausius-

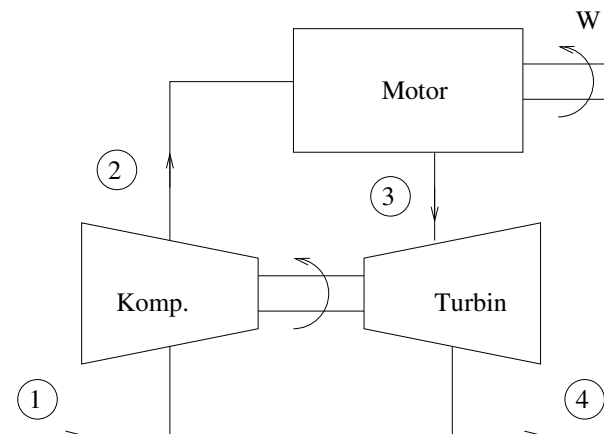
Clapeyrons ekvation som beskriver lutningen på koexistenskurvan mellan två faser. (5p)

I jämvikt mellan vätska och gas kan man ofta försumma vätskans specifika volym i förhållande till gasens. Om man dessutom antar att gasen kan betraktas som ideal och att ångbildningsvärmets  $L$  (uttryckt i J/mol) är oberoende av temperaturen (över betraktat temperaturintervall) kan man härleda ett uttryck för tryck som funktion av temperatur. Härled detta uttryck givet en punkt  $P_0, T_0$  på koexistenskurvan. (5p)

## Uppgift 5

Ett experiment görs på en utspädd lösning av  $^3\text{He}$  i flytande  $^4\text{He}$ .  $^3\text{He}$  är en fermion medan  $^4\text{He}$  är en boson. Tätheten för lösningen är  $145\text{kgm}^{-3}$  och den består av 1 massprocent  $^3\text{He}$ . Värmekapaciteten mäts och genom att man vet bidraget från  $^4\text{He}$  vätskan finner man att bidraget från  $^3\text{He}$  atomerna kan beskrivas som en ideal Fermigas med Fermitemperaturen  $T_F = 0.14\text{K}$ . Dock måste man ersätta massan  $m$  för  $^3\text{He}$  atomer med en effektiv massa  $m^*$  som tar hänsyn till växelverkan mellan atomerna. Bestäm kvoten mellan den effektiva massan  $m^*$  och den verkliga massan  $m$ . ( $^3\text{He}$  har spinn  $\frac{1}{2}$ ) (10p)

## Uppgift 6



Figuren visar principen för en turbo, där de varma avgasarna utnyttjas för att driva en kompressor som komprimerar bränsleblandningen in i motorn. Vi kan behandla bränsleblandningen som en ideal gas med värmekapaciteter  $C_p = 1\text{kJ/kgK}$  och  $C_v = C_p/1.4$ . Följande värden är givna:  $P_1 = 100\text{kPa}$ ,  $T_1 = 30^\circ\text{C}$ ,  $P_3 = 170\text{kPa}$ ,  $T_3 = 650^\circ\text{C}$  och  $P_4 = 100\text{kPa}$ .

a) Beräkna tryck och temperatur efter kompressorn,  $P_2$  och  $T_2$ . Antag att både turbinen och kompressorn arbetar adiabatiskt och reversibelt och att turbinen överför arbete till kompressorn utan förluster. (5p)

b) Om effekten ut ur motorn  $\dot{W}$  är 100hk (74kW) och verkningsgraden för motorn (utan turbo) är 30%, hur stort är då massflödet  $\dot{m}$ , dvs hur många kg luft per sekund strömmar genom motorn. (Flödet kan betraktas som långsamt.) (5p)

*OBS! Denna tentalösning är preliminär och kan innehålla fel.*

## Uppgift 1

Eftersom ingen värme utbyts får vi från första lagen:  $\Delta E = W$ , där  $W$  är arbetet på gasen från omgivningen.

Arbetet som gasen utför då väggen förflyttas mot ett det yttre trycket  $P_2$  är  $P_2\Delta V = P_2(V_2 - V_1)$

Vi får alltså ändring i inre energi  $\Delta E = -P_2(V_2 - V_1)$

## Uppgift 2

Eftersom jonerna är oberoende kan vi beräkna värmekapaciteten för en jon ur  $C_v = \frac{dE}{dT}$  och  $E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$  där  $Z$  är tillståndssumman för en jon.

$Z = e^{-x} + 1 + e^x$  där  $x = \beta\mu B$  vilket ger  $(\frac{\partial}{\partial \beta} = \mu B \frac{\partial}{\partial x}) E = -\mu B(e^x - e^{-x})/(e^{-x} + 1 + e^x)$ .  
Låga temperaturer  $kT \ll \mu B$  svarar mot  $x \gg 1$  vilket ger  $E \approx -\mu B/(1 + e^{-x})$  och  $C_v = \dots = k(\frac{\mu B}{kT})^2 e^{-\mu B/kT}$

Med en täthet av 1% fås då per mol:

$$C_v = 0.01R \left(\frac{\mu B}{kT}\right)^2 e^{-\mu B/kT}$$

## Uppgift 3

Massan är bevarad liksom volymen. Ur tabell fås specifika volymer: i kritiska punkten  $v_c = 0.003155 m^3/kg$  och vid  $25^\circ C$   $v_f = 0.001003 m^3/kg$  och  $v_g = 43.36 m^3/kg$ . Massan för en fas ges av  $m = V/v$ , alltså för masskonservering  $V/v_c = V_g/v_g + V_f/v_f = V_g/v_g + (V - V_g)/v_f$  där  $V$  är totala volymen. Vi söker volymandelen  $V_g/V$  vilket kan lösas ut som

$$V_g/V = \frac{1/v_c - 1/v_f}{1/v_g - 1/v_f} = 0.68$$

## Uppgift 4

Se Mandl Kap. 8.4 och 8.5

## Uppgift 5

Fermitemperaturen ges idealt av  $T_F = \frac{h^2}{2mk} (\frac{3}{4\pi g} n)^{2/3}$  där  $n$  är tätheten i antal per volymenhet,  $m$  massan och  $g = 2$  för spinn  $-\frac{1}{2}$ .

Vi har total täthet (densitet)  $145\text{kgm}^{-3}$  och 1 massprocent  ${}^3\text{He}$  med massa  $m = 3\mu = 5.1 \cdot 10^{-27}\text{kg}$ . Detta ger  $n = 0.01145/5 \cdot 10^{-27} = 3 \cdot 10^{26}\text{m}^{-3}$

Vi kan då beräkna den ideala Fermitemperaturen  $T_F = 0.34\text{K}$ , för att få  $T_F = 0.14\text{K}$  krävs alltså en större effektiv massa sådan att  $\mathbf{m}^*/\mathbf{m} = \mathbf{0.34}/\mathbf{0.14} = \mathbf{2.42}$

## Uppgift 6

a) För adiabatisk och reversibla processer för idealgas kan vi använda  $TP^{(1-\gamma)/\gamma}$ . Dessutom har vi entalpiändring för idealgas  $\Delta h = C_p\Delta T$ .

Vi kan då beräkna  $T_4 = 793\text{K}$  och från första lagen för stationärt flöde fås arbetet ur turbinen  $W_t = C_p(T_3 - T_4)$  Turbinen driver kompressorn  $W_k = W_t$  och vi får  $T_2$  från  $W_k = C_p(T_2 - T_1)$ , vilket ger  $\mathbf{T}_2 = \mathbf{433\text{K}}$ . Vi kan beräkna trycket  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{349\text{kPa}}$

b) Verkningsgraden för motorn är  $\eta = \dot{W}/(\dot{m}h_2) = 0.3$ , Vilket ger  $\mathbf{\dot{m}} = \mathbf{\dot{W}}/(\mathbf{0.3C_pT_2}) = \mathbf{0.57\text{kg/s}}$

## Tentamen i Termodynamik och statistisk för F3(FTF140)

**Tid och plats:** Torsdagen den 20 april 2006, kl. 8.30-12.30 i V-huset.

**Examinator:** Mats Granath, 7723175, 0708938077, mgranath@fy.chalmers.se

**Hjälpmedel:** BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Finns på kurshemsidan efter tentans slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås senast onsdag 3/5 2006.

**Rättningsgranskning:** Efter överenskommelse med examinator, rum O7109B.

### Uppgift 1

Svaren till dessa behöver inte motiveras. 2.5 poäng per uppgift.

**A)** Ett system har energinivåer  $E_r$  med motsvarande magnetisering  $M_r$  och är i jämvikt med ett värmebad vid temperatur  $T$ . Vad är väntevärdet av systemets magnetisering?

a)  $\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$

b)  $\sum_r M_r e^{-E_r/kT} / \sum_r e^{-E_r/kT}$

c)  $-\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

d)  $\sum_r M_r$

**B)** Vilket ord saknas i följande formulering av termodynamikens andra lag: Entropin för ett "...” system kan inte minska.

a) expanderande

b) idealt

c) isolerat

d) verkligt

**C)** Vilket bidrag till värmekapaciteten per molekyl av en diatomär ideal gas fås från rotationer runt molekylens masscentrum i gränsen  $T \rightarrow \infty$  ?

a)  $2k_B$

b)  $k_B$

c)  $C_p$

d)  $\beta$

**C)** Einsteins modell för värmekapaciteten hos ett fast ämne ger inte rätt temperaturberoende vid låga temperaturer. Varför?

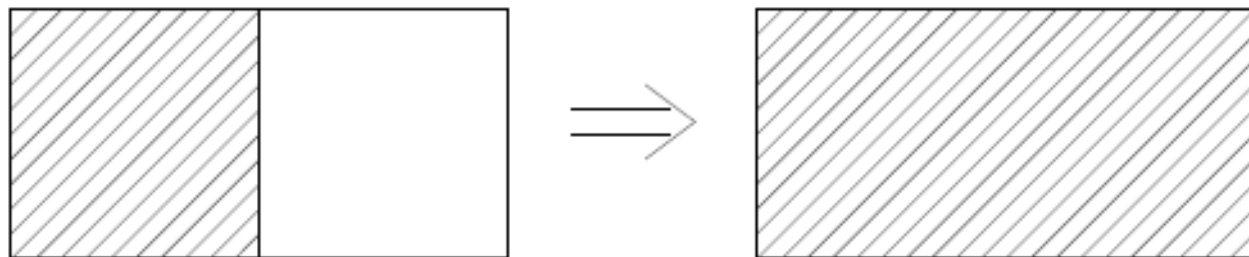
a) gittervibrationer med låga energier tas inte hänsyn till

b) modellen innehåller inte en korrekt kvantmekanisk formulering

c) modellen tar inte hänsyn till ekvipartitionsprincipen

d) den så kallade Einsteintemperaturen är fel

## Uppgift 2



Figuren illustrerar ett klassiskt exempel på en adabatisk men ickereversibel process. En värmeisolerad låda är partitionerad i två lika stora delar som båda har volymen  $V_0$ . Den ena halvan innehåller en mol ideal gas vid trycket  $P_0$  och den andra är tom. Partitionen tas bort plötsligt och gasen är slutligen i jämvikt i hela lådan.

- Beräkna gasens temperatur och tryck i sluttillståndet. (5p)
- Antag istället att gasen kan utbyta värme med omgivningen och att partitionen förflyttas långsamt så att gasen hela tiden är i jämvikt, men att sluttillståndet är det samma som ovan. Hur mycket arbete får man då ut ur expansionen? (5p)

## Uppgift 3

En värmeisolerad cylinder innehåller 1 liter mättad vattenånga vid temperatur  $T_0=30^\circ\text{C}$ .

- Vad är trycket i cylindern? (2p)

Trycket i kolven ökas långsamt (reversibelt) till  $P_1=400\text{kPa}$ .

- Vad är vattnets temperatur  $T_1$ . (6p)
- Antag att kompressionen sker snabbt så att den inte kan beskrivas som reversibel. Vad kan man då säga om temperaturen  $T_1$  vid trycket  $P_1$ ? (2p)

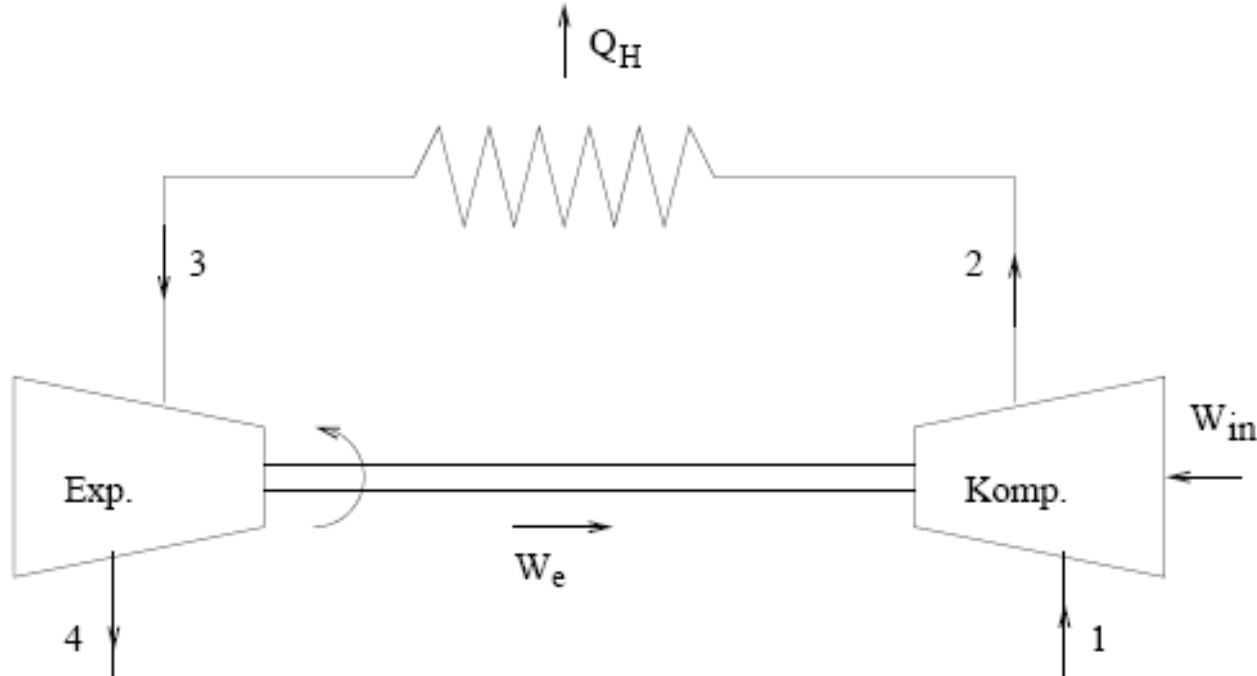
## Uppgift 4

En diatomär molekyl har  $(2j + 1)$ -faldigt degenererade rotationsenerginiivåer

$$\epsilon_j = k_B \theta_{\text{rot}} j(j + 1), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

där  $\theta_{\text{rot}}$  är en molekylspecifik konstant.

- Skriv ner ett uttryck för sannolikheten,  $P_j$ , att molekylen finns i ett tillstånd med energin  $\epsilon_j$ . (4p)
- För kolmonoxid CO gäller  $\theta_{\text{rot}} = 2.77\text{K}$ . Bestäm den mest sannolika rotationsenergin för en CO-molekyl vid 10K respektive 300K. (6p)



### Uppgift 5

En luftkonditioneringsapparat kan fungera enligt ovan figur. Varm luft vid temperatur  $T_1$  och tryck  $P_1$  komprimeras adiabatiskt till ett tryck  $P_2 > P_1$ . Luften kyls av vid konstant tryck,  $P_3 = P_2$ , till en temperatur  $T_3 = T_2 - \alpha(T_2 - T_1)$ , där  $\alpha$  är en konstant  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Därefter expanderar luften adiabatiskt till atmosfärstryck ( $P_4 = P_1$ ) genom en rotor som hjälper till att driva kompressorn utan energiförluster. Luften kan behandlas som en ideal gas med konstant  $\gamma = C_p/C_v = 1.4$  och alla adiabatiska processer kan antas reversibla.

- a) Härled ett uttryck för sluttemperaturen  $T_4$  i termer av  $T_1$  och kvoten  $x = P_2/P_1$ . (4p)
- b) Vad är den maximala relativa temperatursänkningen  $\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{T_1 - T_4}{T_1}$  som kan uppnås? (2p)
- c) Härled uttrycket  $\beta = \frac{1}{x^\gamma - 1}$  där  $\beta$  är verkningsgraden för kylprocessen och  $\delta = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ . ( $\beta$  är alltså kvoten mellan förändringen i luftens "värmeinhåll" och tillfört arbete  $W_{in}$ ) (4p)

### Uppgift 6

Med hjälp av halvledarteknik kan man skapa system där elektroner begränsas till att röra sig på ett två-dimensionellt plan. Elektronerna bildar då en så kallad två-dimensionell elektrongas (2DEG). Typiska tätheter för elektronerna i en sådan 2DEG kan vara  $10^{17}$  elektroner/m<sup>2</sup>.

- a) Härled Fermienergin för en 2DEG uttryckt i elektrontätheten, givet fria icke-relativistiska elektroner ( $\epsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$ ). (8p)
- b) Beräkna Fermitemperaturen givet elektrontäthet enligt ovan. Om man bortser från växelverkan, kan då elektrongasen beskrivas som en klassisk idealgas om systemets temperatur är 1K? (2p)



## Lösningar, Tentamen FTF140, 20060420

### Uppgift 1

- a) b
- b) c
- c) b
- d) a

### Uppgift 2

- a) För ett isolerat system gäller  $E = \text{konstant}$  och för idealgas  $E = E(T)$ . Alltså sluttemperatur  $\mathbf{T_1 = T_0 = P_0 V_0 / R}$ .
- b) Reversibel isoterm process för idealgas, arbetet på gasen  $dW = -PdV = -RT_0 dV/V$ . Alltså fås arbete  $\mathbf{W_{ut} = \int_{V_0}^{2V_0} RT_0 dV/V = RT_0 \ln 2}$

### Uppgift 3

Använd tabell för vatten.

- a) Mättad ånga vid  $30^\circ\text{C}$  svara mot ett tryck på **4.25kPa**
- b) Reversibel adiabatisk process, dvs entropin bevarad. Ur tabell fås  $s_0 = 8.45 \text{kJ/kgK}$ . För att få samma entropi för samma mängd vatten vid 400kPa krävs överhettad ånga. Ur tabell fås  **$T \approx 600^\circ\text{C}$**
- c) Adibatisk ickereversibel innebär  $dS > 0$ . Sluttemperaturen blir alltså högre,  **$T > 600^\circ\text{C}$**

### Uppgift 4

- a)  $\mathbf{P_j = (2j + 1)e^{-\beta\epsilon_j} / Z}$  där  $Z = \sum_j (2j + 1)e^{-\beta\epsilon_j}$  och  $\beta = 1/kT$ .
- b) Maximum fås från  $\frac{dP_j}{dj} = 0$  eller  $\frac{d \ln P_j}{dj} = 0$  vilket ger ( $Z = Z(T)$  är oberoende av  $j$ )  
 $0 = \frac{2}{2j+1} - \beta k \theta_{rot} (2j + 1)$ . Vi får alltså  **$2j + 1 = \sqrt{2T/\theta_{rot}}$**  vilket ger  **$j=1$  och  $j=7$  vid 10K respektive 300K.**

### Uppgift 5

För adiabatisk förändring av idealgas gäller  $PV^\gamma = \text{konstant}$  eller  $TP^{-\delta} = \text{konstant}$  där  $\delta = (\gamma - 1)/\gamma > 0$ . För stationärt flöde har vi första lagen  $\Delta h = q + w$  där  $\Delta h$  är ändringen

i (specifik) entalpi,  $q$  är tillförd värme och  $w$  tillfört arbete. För klassisk idealgas gäller också  $\Delta h = c_p \Delta T$ .

a) Både expansionen och kompressionen sker adiabatiskt vilket ger  $T_4 P_4^{-\delta} = T_3 P_3^{-\delta}$  och  $T_2 P_2^{-\delta} = T_1 P_1^{-\delta}$ . Vi har dessutom givet  $P_4 = P_1$ ,  $P_3 = P_2$  och  $T_3 = T_2 - \alpha(T_2 - T_1)$ . Efter lite aritmetik fås  $T_4 = T_1(1 - \alpha + \alpha x^{-\delta})$ .

b)  $\Delta T/T_1 = \alpha(1 - x^{-\delta})$  vilket ger  $(\Delta T/T_1)_{\max} = \alpha$  för  $P_2 \rightarrow \infty$ .

c) Verkningsgraden ges av  $\beta = \frac{h_1 - h_4}{w_{in}}$  där  $h_1 - h_4 = c_p(T_1 - T_4)$  och  $w_{in} = w_{komp.} - w_e = c_p(T_2 - T_1) - c_p(T_3 - T_4)$ . Med hjälp av räkningarna från a) får vi  $c_p(T_1 - T_4) = c_p T_1 \alpha(1 - x^{-\delta})$  och  $w_{in} = \dots = c_p T_1 \alpha(x^\delta - 2 + x^{-\delta})$  vilket ger  $\beta = \frac{1 - x^{-\delta}}{x^\delta - 2 + x^{-\delta}} = \dots = \frac{1}{x^\delta - 1}$ .

## Uppgift 6

a) Fermienergin  $\epsilon_F$  fås från  $N = \int_0^{\epsilon_F} f(\epsilon) d\epsilon$  där  $f(\epsilon)$  är tillståndstätheten som vi alltså behöver beräkna. Tillståndstätheten i varje riktning i  $k$ -rummet och per spinpolarisation ges av  $\frac{L}{2\pi} dk$  vilket i två dimensioner ger  $f(k) d^2 k = 2 \frac{L^2}{4\pi^2} d^2 k = \frac{L^2}{\pi} k dk$ . Med  $\epsilon = \hbar^2 k^2 / 2m$  och  $d\epsilon = \hbar^2 k dk / m$  får vi alltså  $f(\epsilon) d\epsilon = \frac{L^2 m}{\pi \hbar^2} d\epsilon$ . Vi kan då utföra integralen vilket ger  $\epsilon_F = n \frac{\pi \hbar^2}{m}$  där  $n = N/L^2$  är elektrontätheten.

b) Givet tätheten  $n = 10^{17} / m^3$  kan vi beräkna  $T_F = \epsilon_F / k = 2784 K$ . För att beskriva en Fermivätska som en klassisk idealgas krävs  $T \gg T_F$ , vilket alltså inte är fallet vid  $T = 1 K$ .

## Tentamen i Termodynamik och statistisk för F3(FTF140)

**Tid och plats:** Onsdagen den 14 december 2005, kl. 8.30-12.30 i V-huset.

**Examinator:** Mats Granath, tel. 7723175, 0708938077

**Hjälpmedel:** BETA, Physics Handbook, Termodynamiska tabeller (utdelade), ett A4 blad (2 sidor) med egna anteckningar, valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift kan ge maximalt 8 extra poäng. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Finns på kurshemsidan efter tentans slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndag 9/1 2006.

**Rättningsgranskning:** Måndag 16/1 kl 12.00-12.30 i rum O7109B (Mats Granath).

### Uppgift 1

Svaren till dessa behöver inte motiveras. 2.5 poäng per uppgift.

**A)** En ideal gas expanderar adiabatiskt och kvasistatiskt mellan ett tillstånd  $i$  och ett tillstånd  $f$ . Vilket av följande påståenden är *falskt*:

- a) Ingen värme flödar in eller ut från systemet
- b) Gasens entropi är konstant,  $S_i = S_f$
- c) Ändringen av gasens inre energi ges av  $-\int_i^f P dV$
- d) Gasens temperatur är konstant,  $T_i = T_f$

**B)** Givet ett system i termisk jämvikt vid temperatur  $T$  som har kvanttillstånd  $i$  med energier  $E_i$ . Vad representerar följande uttryck:  $\sum_i E_i e^{-E_i/kT} / \sum_i e^{-E_i/kT}$

- a) Tillståndssumman
- b) Sannolikhet att systemet har energi  $E_i$
- c) Väntevärdet av energin
- d) Systemets entropi

**C)** Den genomsnittliga kinetiska energin för ledningselektronerna i en metall är mycket större än  $kT$ . Varför?

- a) Elektronerna har en extra spinn-frihetsgrad.
- b) Elektronerna är inte i termisk jämvikt med gittret.
- c) Elektronerna bildar en degenererad fermigas
- d) Elektronerna har relativistiska hastigheter

**D)** En mix av syrgas  $O_2$  och kvävgas  $N_2$  hålls vid konstant temperatur. Vad är förhållandet  $\frac{|\bar{v}(O_2)|}{|\bar{v}(N_2)|}$  mellan genomsnittliga farten för molekylerna?

- a)  $8/7$
- b)  $\sqrt{8/7}$
- c)  $(8/7)^2$
- d)  $\sqrt{7/8}$

## Uppgift 2

Ett kilo vatten i form av is vid  $0^\circ\text{C}$  värms på en spis i ett vanligt kök där det är  $20^\circ\text{C}$ . Vattnet förångas i kastrullen men någon har glömt sätta på spisfläkten så vattnet kondenseras på väggarna i köket. Hur mycket har entropin för vattnet ändrats ett par minuter efter att allt vatten kokat ur kastrullen? Man kan anta att vattnets värmekapacitet i vätskefasen är oberoende av temperatur. (10p)

## Uppgift 3

En solpanel som utvinnet värme från solstrålningen bör utformas så att den absorberar så mycket av solens strålning som möjligt samtidigt som värmeförlusterna på grund av strålning från panelen minimeras.

Den utstrålade effekten per areaenhet från panelen  $P_e$  kan skrivas

$$P_e(\omega, T) = \alpha(\omega, T)P_{s,k}(\omega, T)$$

där  $P_{s,k}(\omega, T) = \frac{1}{4}cu_{s,k}(\omega, T)$  är effekten från en svartkroppstrålar och  $u_{s,k}(\omega, T)$  är energitätheten enligt Planks strålningslag. Funktionen  $0 \leq \alpha(\omega, T) \leq 1$  är absorbtionskoefficienten som bestämmer hur stor andel av infallande strålning med frekvensen  $\omega$  som absorberas av panelen om denna har en temperatur  $T$ . Antag panelens temperatur  $T = 300\text{K}$  och att solen kan approximeras som en svartkroppstrålar vid  $T_s = 6000\text{K}$

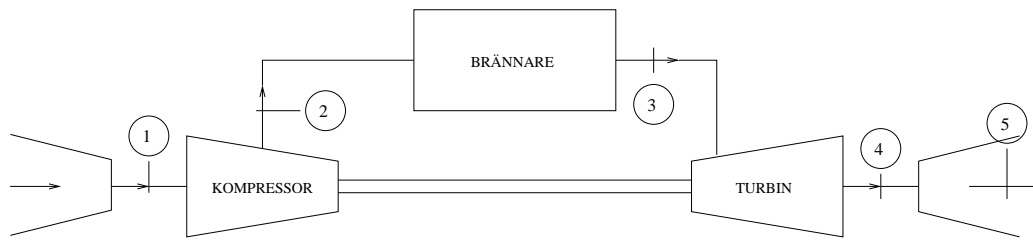
Beskriv kvalitativt hur absorbtionskoefficienten för panelen bör se ut som funktion av frekvensen? Beräkna vid vilka frekvenser  $\alpha$  ska vara stor respektive liten. (10p)

## Uppgift 4

En vit dvärg är ett extremt kompakt astronomiskt objekt som består i huvudsak av joniserade atomer och elektroner. Det termiska trycket är försumbart och istället är det trycket från den starkt degenererade elektrongasen som balanserar gravitationen. För en icke-relativistisk elektrongas där fermihastigheten är mycket lägre än ljushastigheten ( $v_F \ll c$ ) gäller för trycket  $P_e = 2/5(N/V)\epsilon_F \sim \rho^\Gamma$  med  $\Gamma = 5/3$  och där  $\rho = N/V$  är elektrongasens densitet. Man kan visa att för stabilitet krävs  $\Gamma > 4/3$  vilket alltså innebär att dvärgen normalt är stabil. Dock ökar fermihastigheten med densiteten så att för tillräckligt höga densiteter blir elektronerna relativistiska,  $v_F \approx c$

Härled trycket för en fullständigt degenererad ( $T = 0$ ) fermigas i den extremt relativistiska gränsen där energin ges av  $\epsilon = pc$ . Är dvärgen stabil i denna gräns? (10p)

## Uppgift 5



Figuren visar en skiss av en jetmotor. Luft flödar in vid atmosfärstryck ( $P_1 = 0.1\text{MPa}$ ) i munstycket och komprimeras adiabatskt. Förbränningen sker vid konstant tryck varefter gasen expanderar adiabatiskt genom turbinen. Trycket ( $P_4$ ) efter turbinen är just sådant att arbetet som fås ur turbinen är lika stort som arbetet som krävs för att driva kompressorn. Efter turbinen expanderar gasen igen adiabatiskt till atmosfärstryck ( $P_5 = 0.1\text{MPa}$ ).

Antag att man kan behandla luften som en idealgas med värmekapaciteter  $C_p = 1.0\text{kJkg}^{-1}\text{K}^{-1}$  och  $C_v = C_p/1.4$ , att gasen flödar långsamt in i kompressorn och att alla adiabatiska processer kan antas vara reversibla. Antag temperatur vid inflödet  $T_1 = 15^\circ\text{C}$ , tryck efter kompressorn  $P_2 = P_3 = 1.0\text{MPa}$  och maximal temperatur efter förbränningen  $T_3 = 1100^\circ\text{C}$ . (Tips: kom ihåg  $H=H(T)$  för ideal gas.)

- Beräkna trycket efter generatorm ( $P_4$ ). (7p)
- Beräkna utgångshastigheten av luften efter expansion i munstycket (5). (3p)

## Uppgift 6

Ett fast enatomigt ämne placeras in en vakuumbehållare vid en temperatur  $T$ . Efter ett tag uppnås jämvikt i behållaren då en viss del av ämnet är i gasform. Jämvikt ges som bekant av att Gibbs fria energi per atom ska vara lika i de båda faserna vilket för given temperatur  $T$  svarar mot ett visst tryck  $P$ .

- Antag att varje atom i det fasta ämnet har en bindningsenergi  $\epsilon_0$  och har vibrationsfrihetsgrader som kan beskrivas som en 3-dimensionell harmonisk oscillator med frekvens  $\omega_E$ . En atom har alltså energispektrum  $\epsilon = -\epsilon_0 + \hbar\omega_E(n_x + n_y + n_z)$  där  $n_x, n_y, n_z \geq 0$ . Beräkna Gibbs fria energi per atom uttryckt i  $\omega_E$ ,  $\epsilon_0$  och  $T$  givet att man kan försumma den specifika volymen i den fasta fasen. (5p)
- Skriv ner Gibbs fria energi per atom för gasen i termer av atommassa, temperatur och tryck givet att den kan behandlas som en enatomig idealgas. (3p)
- Med hjälp av (a) och (b) skriv ner ett uttryck för ångtrycket  $P$ . (2p)

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2005-12-14**

**Lösningar**

**Uppgift 1**

- (A): d  
(B): c  
(C): c  
(D): d

**Uppgift 2**

Begynnelsestillstånd: is vid temperaturen  $T_i = 273$  K.

Sluttillstånd: vatten vid temperaturen  $T_f = 293$  K (förutsatt att temperaturen på väggytan är densamma som inuti köket).

Entropiändringen beror bara på begynnelsestillstånd och sluttillstånd. Vi behöver inte bry oss om hur processen i detalj har gått till utan kan räkna på en enklare process som tar oss direkt från begynnelsestillstånd till sluttillstånd. Entropiändringen kan då skrivas som

$$\Delta S = \frac{ml}{T_i} + \int_{T_i}^{T_f} \frac{mc_p dT}{T} = \frac{ml}{T_i} + mc_p \ln \frac{T_f}{T_i}$$

där  $m$  är vattnets massa,  $l$  är smältentalpiteten och  $c_p$  är den isobariska värmekapacitiveteten för vatten.

Siffervärden:  $m = 1$  kg,  $l = 333 \cdot 10^3$  J/kg,  $c_p = 4,19 \cdot 10^3$  J/kg·K,  $T_i$  och  $T_f$  enligt ovan.

Insättning i formeln ovan visar att smältningen ger en entropiändring på 1,22 kJ/kg och uppvärmningen av vattnet ger 0,30 kJ/K, d.v.s. sammanlagt 1,52 kJ/K.

Svar: Entropiändringen är 1,52 kJ/K.

**Uppgift 3**

Panelen bör ha maximal absorptionsförmåga i det frekvensområde där solstrålningens intensitet är större än utstrålningen och minimal absorptionsförmåga (och därmed också minimal emissionsförmåga) i det område där utstrålningens intensitet är större. Enligt Wiens förskjutningslag gäller att funktionen  $u_{s,k}(\omega, T)$  har sitt maximum vid vinkelfrekvensen  $\omega_m$ , given av uttrycket

$$\omega_m = 2,82144 \frac{k_B T}{\hbar}$$

Med  $T = 6000$  K fås  $\omega_m = 2,22 \cdot 10^{15}$  rad/s, och med  $T = 300$  K fås  $\omega_m = 1,11 \cdot 10^{14}$  rad/s.

Absorptionskoefficienten  $\alpha(\omega)$  bör alltså om möjligt vara noll vid små vinkelfrekvenser (upp till  $10^{14}$  eller  $10^{15}$  rad/s) och 1 vid högre vinkelfrekvenser.

[Om man vill avgöra exakt var gränsen  $\omega_c$  skall gå måste man först ta reda på intensiteten  $I_o$  hos den infallande solstrålningen och sedan numeriskt lösa ekvationen

$$\frac{I_o}{\sigma T_s^4} u_{s,k}(\omega_c, T_s) = u_{s,k}(\omega_c, T_p)$$

där  $\sigma$  är Stefan-Boltzmanns konstant,  $T_s$  är solens temperatur och  $T_p$  är panelens temperatur. Med  $I_o = 1 \cdot 10^3 \text{ J/m}^2$  fås  $\omega_c = 4,3 \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$ .]

Förslag:  $\alpha(\omega) = 0$  i området  $\omega < 4 \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$ , och  $\alpha(\omega) = 1$  i området  $\omega > 4 \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$ .

#### Uppgift 4

Trycket  $p$  bestäms av formeln

$$p = \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{T,N}$$

Egentligen är det Helmholtz fria energi  $F$  som skall deriveras, men för en fullständigt degenererad fermigas gäller att  $F = E$ , eftersom entropin är noll.

Energien per partikel för en degenererad elektrongas ges av uttrycket

$$\frac{E}{N} = \frac{\int_0^{\epsilon_F} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_F} f(\epsilon) d\epsilon}$$

där  $f(\epsilon)$  är tillståndstätheten för enpartikeltillstånden (orbitaltätheten). Denna är relaterad till tillståndstätheten  $f_p$  i  $p$ -rummet ( $p =$  rörelsemängdens belopp) genom sambandet

$$f(\epsilon) = f_p \frac{dp}{d\epsilon}$$

Funktionen  $f_p$  bestäms enbart av randvillkoren och de Broglies relation mellan våglängd och rörelsemängd. Villkoret är detsamma i den relativistiska gränsen som i den icke-relativistiska. Uttrycket för  $f_p$  är i båda fallen

$$f_p = 2V \frac{4\pi p^2}{h^3} = V \frac{8\pi p^2}{h^3}$$

där faktorn 2 kommer från antalet spintillstånd. Med  $p = \epsilon/c$  ger detta

$$f(\epsilon) = V \frac{8\pi \epsilon^2}{c^3 h^3}$$

Alltså finner vi att

$$\frac{E}{N} = \frac{\int_0^{\epsilon_F} \epsilon^3 d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_F} \epsilon^2 d\epsilon} = \frac{3}{4} \epsilon_F \quad \text{d.v.s.} \quad E = \frac{3}{4} N \epsilon_F$$

Fermienergin  $\epsilon_F$  bestäms av villkoret

$$N = \int_0^{\epsilon_F} f(\epsilon) d\epsilon = \frac{8\pi V}{c^3 h^3} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{8\pi V}{3c^3 h^3} \epsilon_F^3$$

Slutsatsen är att  $\epsilon_F$  är proportionell mot  $(N/V)^{1/3}$ . Trycket  $p$  kan därför skrivas som

$$p = \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right)_{T,N} = \frac{E}{3V} = \frac{1}{4} \frac{N}{V} \epsilon_F = \frac{1}{8} \left( \frac{3c^3 h^3}{\pi} \right)^{1/3} \left( \frac{N}{V} \right)^{4/3}$$

Vi finner alltså att  $\Gamma = 4/3$ .

Svar: Den vita dvärgen är instabil i den extremt relativistiska gränsen.

## Uppgift 5

**Kompressorn:** Här genomgår luften en adiabatisk process från begynnelsestillståndet ( $p_1 = 0,1 \text{ MPa}$ ,  $T_1 = 15^\circ\text{C} = 288 \text{ K}$ ) till sluttillståndet ( $p_2 = 1,0 \text{ MPa}$ ,  $T_2 = ?$ ). Ur sambandet mellan  $p$  och  $T$  vid en adiabatisk process finner vi att

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-1/\gamma} = 288 \cdot 10^{1-1/1,4} \text{ K} = 556 \text{ K} = 283^\circ\text{C}$$

Det arbete  $w_k$  som krävs för att driva kompressorn är lika med ökningen i entalpi för gasen. För en ideal gas gäller att ändringen i entalpi per grad temperaturhöjning är lika med den isobariska värmekapaciteten. Räknat per kg gas finner vi alltså att

$$w_k = c_p (T_2 - T_1) = 1,0 \cdot 10^3 \cdot (556 - 288) \text{ J/kg} = 268 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

**Brännaren:** Här tillförs värme så att temperaturen stiger till  $T_3 = 1100^\circ\text{C} = 1373 \text{ K}$ . Trycket förblir oförändrat ( $p_3 = p_2 = 1,0 \text{ MPa}$ ).

**Turbinen:** Här expanderar gasen adiabatiskt från begynnelsestillståndet ( $p_3 = 1,0 \text{ MPa}$ ,  $T_3 = 1100^\circ\text{C} = 1373 \text{ K}$ ) till sluttillståndet ( $p_4 = ?$ ,  $T_4 = ?$ ). Villkoret att turbinarbetet  $w_t$  skall vara lika med kompressorarbetet  $w_k$  bestämmer sluttemperaturen  $T_4$ :

$$w_t = c_p (T_3 - T_4) = w_k = c_p (T_2 - T_1)$$

$$T_4 = T_3 - T_2 + T_1 = (1373 - 556 + 288) \text{ K} = 1105 \text{ K} = 832^\circ\text{C}$$

Sluttrycket  $p_4$  fås ur sambandet mellan  $p$  och  $T$  vid en adiabatisk process:

$$p_4 = p_3 \left( \frac{T_4}{T_3} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1,0 \cdot \left( \frac{1105}{1373} \right)^{1,4} \text{ MPa} = 0,468 \text{ MPa}$$

**Munstycket:** Här expanderar gasen adiabatiskt från begynnelsestillståndet ( $p_4 = 0,476 \text{ MPa}$ ,  $T_4 = 832^\circ\text{C} = 1105 \text{ K}$ ) till sluttillståndet ( $p_5 = 0,1 \text{ MPa}$ ,  $T_5 = ?$ ). Sluttemperaturen fås ur sambandet mellan  $p$  och  $T$  vid en adiabatisk process:

$$T_5 = T_4 \left( \frac{p_5}{p_4} \right)^{1-1/\gamma} = 1105 \cdot \left( \frac{0,1}{0,468} \right)^{1-1/1,4} \text{ K} = 711 \text{ K} = 438^\circ\text{C}$$

Den energi som frigörs i form av rörelseenergi för avgaserna är lika med minskningen i entalpi. Härur kan luftens utströmingshastighet  $v$  bestämmas:

$$\frac{1}{2} v^2 = c_p (T_4 - T_5)$$

$$v = \sqrt{2c_p (T_4 - T_5)} = \sqrt{2 \cdot 1,0 \cdot 10^3 \cdot (1105 - 711)} \text{ m/s} = 887 \text{ m/s}$$

**Svar:** (a) 0,47 MPa; (b) 0,89 km/s

## Uppgift 6

(a) Om specifika volymen kan försummas blir Gibbs fria energi  $g$  per atom lika med Helmholtz fria energi  $f$  per atom, som vi kan bestämma ur tillståndssumman  $Z_1$ :

$$Z_1(T) = e^{\epsilon_0/k_B T} \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} e^{-\hbar\omega_E(n_x+n_y+n_z)/k_B T} = \frac{e^{\epsilon_0/k_B T}}{(1 - e^{-\hbar\omega_E/k_B T})^3}$$

$$g(T) = f(T) = -k_B T \ln Z(T) = -\epsilon_0 + 3k_B T \ln(1 - e^{-\hbar\omega_E/k_B T}) \quad (1)$$

(b) Gibbs fria energi per atom för gasen är



$$\begin{aligned}
g(T, p) &= e - Ts + pv = \frac{3}{2}k_B T - k_B T \left( \frac{5}{2} + \ln v + \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right) + pv \\
&= -k_B T \left( \ln \frac{k_B T}{p} + \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right) = -k_B T \ln \left[ \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} \frac{(k_B T)^{5/2}}{p} \right] \quad (2)
\end{aligned}$$

där  $m$  är atommassan och där vi eliminerat volymen  $v$  med hjälp av ideala gaslagen  $v = k_B T/p$ .

(c) Jämviktsvillkoret är att Gibbs fria energi per atom  $g$  (som i enkomponentsystem är lika med kemiska potentialen  $\mu$ ) skall ha samma värde i båda faserna. Detta ger

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_0 + 3k_B T \ln(1 - e^{-\hbar\omega_E/k_B T}) &= -k_B T \ln \left[ \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} \frac{(k_B T)^{5/2}}{p} \right] \\
\ln \left[ \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m} \right)^{3/2} \frac{p}{(k_B T)^{5/2} (1 - e^{-\hbar\omega_E/k_B T})^3} \right] &= -\frac{\varepsilon_0}{k_B T} \\
p &= \left( \frac{m}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{5/2} e^{-\varepsilon_0/k_B T} (1 - e^{-\hbar\omega_E/k_B T})^3 \quad (3)
\end{aligned}$$

Svar: Se ekvationerna (1), (2) och (3) ovan.

Chalmers Tekniska Högskola  
och Göteborg Universitet  
Sektionen för Fysik och Teknisk Fysik  
Aleksandar Matic/Mats Granath

### **Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Onsdagen den 24 augusti 2005 8.30-12.30 i V-huset.

**Examinatorer:** Aleksandar Matic (0730-346294), Mats Granath (0708-938077).

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska Tabeller (sålda via Cremona), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk Fördelning", egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift), valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift adderas enligt tidigare offentliggjord formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Lösningar finns på kurshemsidan efter tentans slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast torsdagen 2:e september.

**Rättningsgranskning:** Måndagen 5:e september 12.00-12.30 i rum O7109B

1. I en Carnot-process tillförs värmemängden 2.70 kJ per cykel. Vid den adiabatiska expansionen fördubblas volymen. Den lägsta temperaturen under processen är 205 K och gasens tryck är som lägst 1.0 atm. Arbetsmediet är kvävgas som kan betraktas som idel.

- Rita in processen i ett PV- respektive TS-diagram. (2p)
- Beräkna kretsprocessens verkningsgrad. (2p)
- Hur stort är det utförda arbetet per cykel? (2p)
- Hur mycket värme avges per cykel? (2p)
- Hur mycket varierar temperaturen respektive entropin under processen? Räkna ut  $\Delta T$  och  $\Delta S$ . (2p)

2. En diatomär molekyl har rotationsnivåer med energin  $\epsilon_J^{rot} = k_B T_r J(J+1)$  där  $T_r$  är en molekylspecifik konstant och där kvanttalet  $J$  är heltal. Tillstånden är  $(2J+1)$ -faldigt degenererade. Betrakta en gas av sådana molekyler vid temperatur  $T$ .

- Hur stor andel,  $n_J$ , av molekylerna i gasen kommer i genomsnitt att befinna sig i rotationstillstånd  $J$ ? (5p)
- Vad är den relativa andelen molekyler i tillstånd  $J$  i förhållande till molekyler i grundtillståndet  $J=0$ ,  $n_J/n_0$ . (3p)
- Vad ska gälla för att denna kvot ska kunna förenklas till  $n_J/n_0 \approx (2J+1)$ . (2p)

3. Einsteinmodellen för värmekapaciteten hos en kristall beskriver varje atom som tre oberoende kvantmekaniska harmoniska oscillatorer med någon materialspecifik vibrationsfrekvens  $\omega_E$ .

a) Härled värmekapaciteten från gittervibrationer som funktion av temperaturen enligt Einsteinmodellen. (Börja t.ex. genom att beräkna väntevärdet av energin och från denna värmekapacitet.) (7p)

b) Visa att för höga temperaturer återfås Dulong-Petits lag,  $C_V=3Nk_B$ . Hur kan man förstå denna utan en kvantmekanisk modell? (3p)

4. En vinter är teknologen Wille ute och åker skridskor på en sjö. Wille har hört, från en säker källa, att skridskorna glider lättare på isen av att isen smälter på grund av det höga trycket som skridskoeggen utövar på isen. Ute är det  $-4^\circ\text{C}$  och Wille väger 80 kg efter all julmat. Hur stor får anläggningsytan på skridskon maximalt vara för att Wille lätt ska glida fram på en vattenfilm? Är det rimligt (motivera med rimliga antaganden)? (10 p)

5. Ledningselektronerna i koppar kan beskrivas som en ideal Fermivätska med Fermienergi  $\varepsilon_F=7\text{eV}$  och dispersion  $\varepsilon=m_e v^2/2$ .

a) Vid  $T=0$ , vad är den maximala kinetiska energin för en elektron i koppar och motsvarande maximal hastighet  $|\vec{v}|$ ? (2p)

b) Givet tillståndstätheten  $f(p)dp=V8\pi p^2 dp/h^3$  beräkna den genomsnittliga kinetiska energin  $\bar{\varepsilon}$  för en elektron. (6p)

c) Kommer resultaten i a) och b) förändras markant vid rumstemperatur? Förklara. (2p)

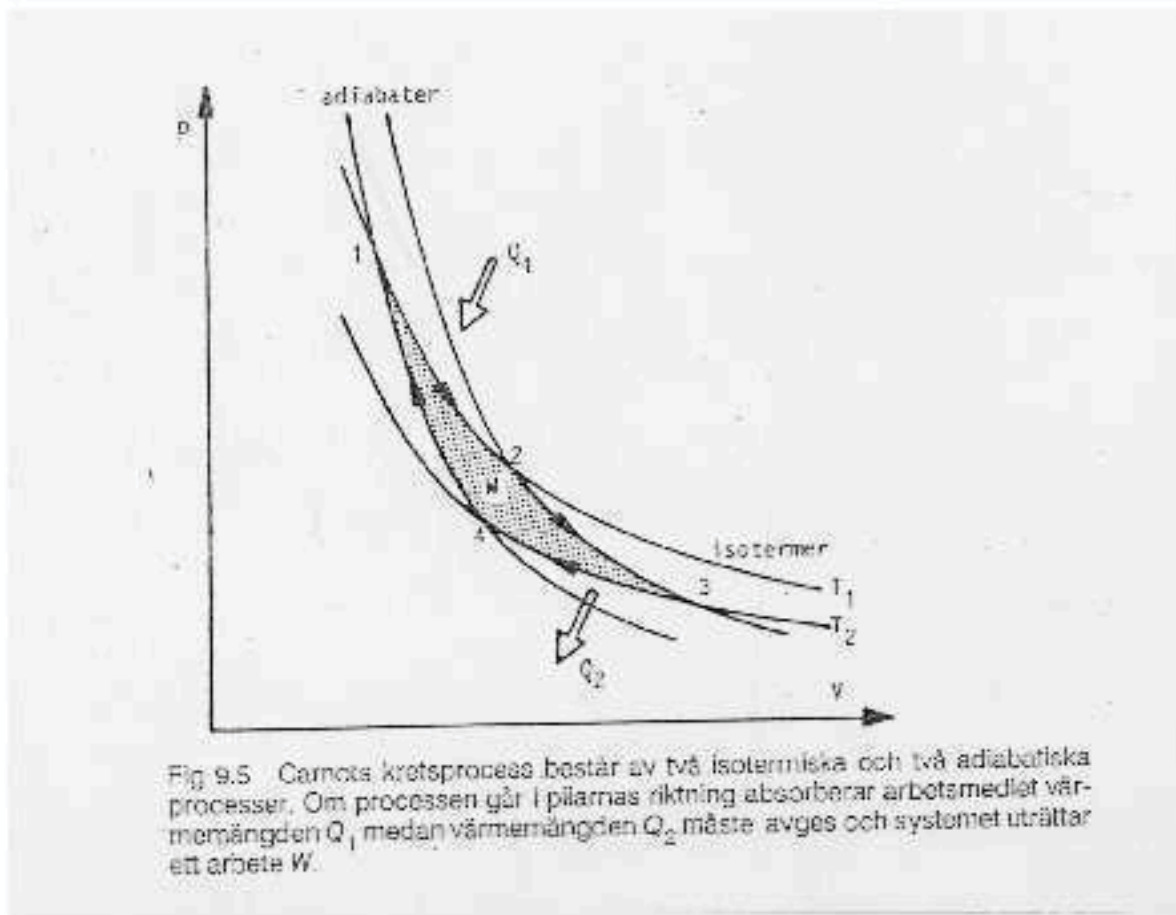
6. Vid förångning minskar ett ämnes densitet radikalt. Bestäm för vatten vid trycket 1 atm och  $100^\circ\text{C}$ :

a) Hur stor andel av ångbildningsentalpin som utgörs av arbete vid förångning av vatten. (5p)

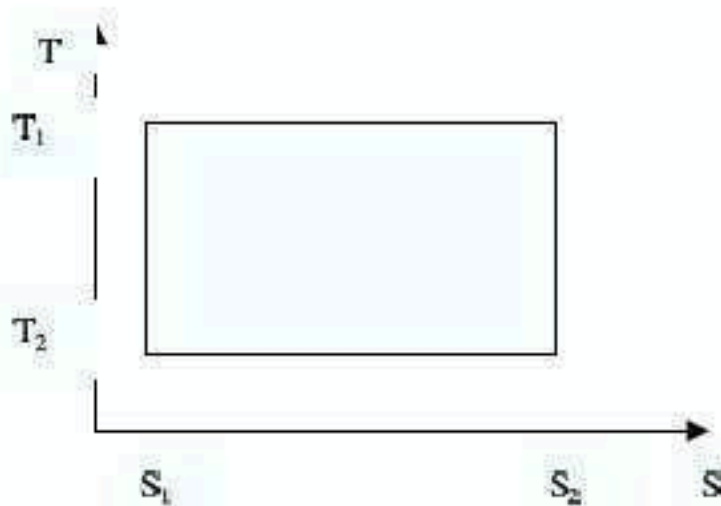
b) Hur mycket ökar inre energin i vatten vid förångning (uttryckt i kJ/kg). (5p)

## Lösningar tenta 050824

1. a) PV-diagram för Carnotprocess, se exempelvis Fig. 9.5 i kursboken:



TS-diagram för Carnotprocess:



b) Beräkna kretsprocessens verkningsgrad.

Verkningsgraden för en Carnotprocess ges av:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|T_2|}{|T_1|}$$

Arbetsmediet kan betraktas som ideal gas och i process 2->3, se PV-diagram ovan, har vi en adiabatisk expansion. För en adiabatisk process och ideal gas gäller:

$pV^\gamma = \text{konst.}$  och  $pV = nRT$  vilket ger

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma \quad \text{dvs. } \eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \quad \text{givet i uppgiften är att}$$

$$V_2 = 2V_1 \quad \text{och } \gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1.4 \quad \text{för kvävgas}$$

vilket ger verkningsgraden  $\eta = 0.24$

c) Hur stort är det utförda arbetet per cykel?

Verkningsgrad ges av  $\eta = \frac{W}{Q_1}$  dvs arbetet ges av  $W = Q_1 \eta$

$Q_1 = 2.70 \text{ kJ}$  är det tillförda värmnet

vilket ger arbetet per cykel  $W = 0.65 \text{ kJ}$

d) Hur mycket värme avges per cykel?

I kretsprocessen gäller:

$W = Q_1 - Q_2$  vilket ger det bortförda värmnet  $Q_2 = Q_1 - W = 2.05 \text{ kJ}$

e) Hur mycket varierar temperaturen respektive entropin under processen?  
Räkna ut  $\Delta T$  och  $\Delta S$ .

Bestäm  $\Delta T$ :

$T_2 = 205 \text{ K}$  och  $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma$  för en adiabatisk process.

$T_1 = 270 \text{ K}$  och  $\Delta T = 65 \text{ K}$

Bestäm  $\Delta S$ :

Entropin ändras under isotermerna, se T-S diagram:

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} = 10 \text{ J/K}$$

## Uppgift 2

a) Rotationsnivåerna är besatta enligt kanonisk fördelning:

$$n_J = (2J + 1)e^{-\beta\epsilon_J^{rot}} / Z$$

där

$$Z = \sum_{J=0}^{\infty} (2J + 1)e^{-\beta\epsilon_J^{rot}}$$

och  $\beta = 1/kT$

b)  $n_J/n_0 = (2J + 1)e^{-\beta\epsilon_J^{rot}}$

c)  $\beta\epsilon_J^{rot} \ll 1$ , dvs  $T \gg T_r J(J + 1)$

## Uppgift 3

a) Energispektrat för en harmonisk oscillator ges av  $\epsilon_r = \hbar\omega_E(\frac{1}{2} + r)$ . Väntevärdet av energin för en oscillator ges av

$$\bar{\epsilon} = \sum_r \epsilon_r e^{-\beta\epsilon_r} / Z = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

där

$$Z = \sum_r e^{-\beta\hbar\omega_E(\frac{1}{2}+r)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega_E}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_E}}$$

Energin blir alltså

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}\hbar\omega_E + \frac{\hbar\omega_E}{e^{\beta\hbar\omega_E} - 1}$$

och följaktligen för  $3N$  oscillatorer

$$C_V = 3N \left( \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial T} \right) = \dots = 3Nk \frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

där  $x = \hbar\omega_E/kT$ .

b) Vid höga temperaturer  $kT \gg \hbar\omega_E$  ( $x \ll 1$ ) kan vi utveckla exponenterna och få Dulong Petit  $C_V = 3Nk$ . Detta resultat kan vi också få genom att betrakta  $3N$  klassiska harmoniska oscillatorer med energi  $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$ . Enligt likafördelningslagen har dessa energi  $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT$ , vilket ger det förväntade resultatet för värmekapaciteten.

4. Ändringen av smältpunkten med ändrat tryck ges av Claussius-Clapeyrons ekvation:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{L}{T\Delta V} \text{ där}$$

$L=333 \cdot 10^3$  J/kg är smältentalpin för och  $\Delta V$  är volymsändringen i fasomvandlingen.

Tryckändringen som behövs för att åstadkomma en ändring i smältpunkt med  $-4^\circ\text{C}$  ges då av:

$$\Delta P = \frac{\Delta TL}{T\Delta V}$$

Densiteten för is är  $\rho_1=917$  kgm<sup>-3</sup> och för vatten  $\rho_2=997$  kgm<sup>-3</sup> vilket ger

$$\Delta V=(1/\rho_2-1/\rho_1)=-8.75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}, \Delta T=-4 \text{ K och } T=269 \text{ K.}$$

Detta ger nu  $\Delta P=57$  MPa

Tyngdraften från Wille, som väger 80 kg, på isen är  $F=786$  N vilket ger att för att isen ska smälta får anläggningsytan, A, vara maximalt

$$A_{\text{max}}=1.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2=14 \text{ mm}^2$$

Är detta rimligt? Antag att Wille glider fram på ett ben i taget och att skridskon är 25 cm lång. Ger att eggen inte får vara ner än  $d_{\text{max}}=56$   $\mu\text{m}$  bred. En skridskoskena är ju klart bredare än detta, 2 mm, men när den är nyslipad är profilen konkav och ligger bara an mot isen vid ytterkanterna varför 56  $\mu\text{m}$  inte är orimligt.

## Uppgift 5

a) Vid  $T = 0$  är Fermi-Dirac fördelningen en steg funktion, alla tillstånd med  $\epsilon < \epsilon_F$  är besatta, resten är tomma. Maximala energin är  $\epsilon = \epsilon_F = 7\text{eV}$  och följaktligen  $v_{max} = \sqrt{2\epsilon_F/m_e} = 1.6 \cdot 10^6\text{m/s}$ .

b) Medelenergi per elektron är

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon$$

Från  $f(p)dp$  med  $\epsilon = \frac{1}{2}p^2/m$  fås  $f(\epsilon)d\epsilon = \dots = V4\pi(2m)^{3/2}\sqrt{\epsilon}d\epsilon/h^3$ , vilket ger

$$\bar{\epsilon} = \frac{V4\pi(2m)^{3/2}}{Nh^3} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{V4\pi(2m)^{3/2}}{Nh^3} \frac{2}{5} \epsilon_F^{5/2}$$

För att få ut ett numerisk värde behöver vi  $V/N$  i termer av Fermi energin. Beräkna

$$N = \int_0^{\epsilon_F} f(\epsilon) d\epsilon = \dots = \frac{V4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2}$$

Slutligen fås alltså

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{5} \epsilon_F = 4.2\text{eV}$$

c) Resultatet b) kommer att ändras bara marginellt vid rumstemperatur. Anledningen är att  $T \ll T_F = \epsilon_F/k = 81000\text{K}$  så att endast tillstånd mycket nära Fermi energin ( $|\epsilon - \epsilon_F| \sim kT$ ) påverkas. Följaktligen ändras bara integralen över alla tillstånd mycket lite.

Däremot finns ju vid ändlig temperatur ingen maximal kinetisk energi som i a), men tillstånd med  $\epsilon \gg \epsilon_F$  har mycket liten sannolikhet att vara besatta.



6. a) Hur stor andel av ångbildningsentalpin som utgörs av arbete vid förångning av vatten?

För att förånga en viss volym vatten,  $V_v$ , krävs ett tillfört värme,  $Q$  där

$Q = l_v m = \Delta H$  där  $l_v$  - ångbildningsvärmets,  $m$  är vattnets massa och  $\Delta H$  är ångbildningsentalpin.

Arbetet som utförs vid förångning ges av

$$W = \int p dV = p_0 (V_g - V_v) \quad (\text{konstant tryck } p_0)$$

$V_g$ -gasens volym,  $V_v$ -vätskans volym

Andelen arbete i ångbildningsentalpin är då:

$$\frac{|W|}{|\Delta H|} = \frac{p_0 (V_g - V_v)}{l_v m} = \frac{p_0 (V_g - V_v)}{l_v \rho_v V_v} = \frac{p_0 V_v \left( \frac{V_g}{V_v} - 1 \right)}{l_v \rho_v V_v} = \frac{p_0 \left( \frac{\rho_v}{\rho_g} - 1 \right)}{l_v \rho_v}$$

ur tabell A.1.1 får man:

ångbildningsvärmets  $l_v = 2257 \text{ kJ/kg}$  samt specifika volymerna  $v_v = 0.001044 \text{ m}^3/\text{kg}$  och  $v_g = 1.6729 \text{ m}^3/\text{kg}$  vilket ger densiteten

$\rho_v = 957 \text{ kg/m}^3$  och  $\rho_g = 0.5978 \text{ kg/m}^3$  och  $p_0 = 0.10135 \text{ MPa}$  (1 atm) var givet

vilket ger  $|W|/|\Delta H| = 0.075$

b) Hur mycket ökar inre energin i vatten vid förångning (uttryckt i kJ/kg)?

Ändringen i inre energin ges av  $\Delta U = Q + W = Q(1 + W/Q) = Q(1 - 0.075)$

Värmet som krävs för att förånga vatten är  $Q = 2257 \text{ kJ/kg}$  vilket ger

$\Delta U = 2090 \text{ kJ/kg}$

Chalmers Tekniska Högskola  
och Göteborg Universitet  
Sektionen för Fysik och Teknisk Fysik  
Aleksandar Matic/Mats Granath

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Torsdagen den 31 mars 2005 8.30-12.30 i V-huset.

**Examinatorer:** Aleksandar Matic (0730-346294), Mats Granath (0708-938077).

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska Tabeller (sålda via Cremona), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk Fördelning", egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift), valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift adderas enligt tidigare offentliggjord formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Lösningar finns på kurshemsidan efter tentans slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast torsdagen 14:e april.

**Rättningsgranskning:** Måndagen 25:e april 12.00-12.30 i rum O7109B

1. För att smälta 2 kg is, som har temperaturen  $0^\circ\text{C}$ , tillför man vattenånga, som har temperaturen  $100^\circ\text{C}$ . Sluttillståndet man vill uppnå är vatten vid  $0^\circ\text{C}$ .

- a) Beräkna hur stor mängd ånga man behöver. (5p)
- b) Beräkna den totala entropiförändringen i systemet. (5p)

2. I en kretsprocess genomgår 1 mol kvävgas följande fyra steg:

- 1) En isoterm kompression till  $1/3$  av ursprungsvolymen
- 2) En isobar expansion där volymen fördubblas
- 3) En adiabatisk expansion tillbaka till begynnelsevolymen
- 4) En isokor process tillbaka till begynnelsestillståndet.

I begynnelsestillståndet är temperaturen för kvävgasen 300 K.

- a) Beräkna värmeflödet i varje delprocess (7p)
- b) Beräkna kretsprocessens verkningsgrad (3p)

3. En kropp med massa  $m$  sitter i en fjäder med fjäderkonstant  $K$  och kan vibrera runt ett jämviktsläge  $x=0$ . Kroppen befinner sig i en gas vid temperatur  $T$ .

a) Beräkna kvadratiska medelavvikelsen,  $\langle x^2 \rangle$ , från jämviktsläget om kroppen kan betraktas som klassisk.

b) Kvantmekaniskt kan vibrationerna beskrivas som en harmonisk oscillator med frekvens  $\omega = \sqrt{K/m}$  kvanttal  $n=0,1,2,\dots$  och energier  $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ .

Kvadratiska medelavvikelsen ges då av  $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \langle n \rangle$ .

Beräkna  $\langle x^2 \rangle$  i detta fall. Härled från detta villkoret för att oscillatoren ska kunna beskrivas som klassisk? (10 p)

4. Ett system består av ett stort antal,  $N$ , särskiljbara svagt växelverkande partiklar. Varje partikel har två tillgängliga tillstånd med energier  $0$  och  $\varepsilon$ .

a) Antag att systemet är slutet och att totala energin är  $E=n\varepsilon$ , där  $0 \leq n \leq N$ . Vad är då sannolikheten att en specifik partikel (säg partikel nummer 1) har energi  $\varepsilon$ ?

b) Om samma systemet i stället är i kontakt med ett värmebad vid temperatur  $T$ . Vad är temperaturen om väntevärdet av energin för systemet är  $\langle E \rangle = n\varepsilon$ ?

Finns det några begränsningar på  $n$  i detta fall? Vad är sannolikheten att en specifik partikel har energi  $\varepsilon$ ?

(10p)

5. I en värmemaskin har man två värmereservoarer om vardera massan  $1$  kg och specifika värmekapaciteten  $2 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Reservoarerna har initialt temperaturerna  $-10^\circ\text{C}$  respektive  $70^\circ\text{C}$ . Hur stort arbete kan en sådan maskin maximalt uträtta? (10 p)

6. En jonfälla för att fånga en ensam jon ur en gas består av en liten box med ett elektriskt fält som kan binda joner. Energin för en bunden jon är  $-\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) relativt energin då ingen jon är fångad.

Det visar sig att fällan i bland fångar två joner. På grund av den elektrostatiska repulsionen mellan jonerna fås då energin  $-2\varepsilon + \Delta$  ( $\Delta > 0$ ). Sannolikheten att fler än två joner fångas kan försummas. Jongsen har temperatur  $T$  och kemisk potential  $\mu$ .

Hur ska man justera det elektriska fältet, dvs. välja energin  $\varepsilon$ , för att maximera sannolikheten att man fångar  $en$  jon i fällan? (Dvs. inte noll eller två.) (10 p)

## Lösningar tenta 050331

1. I processen att smälta 2 kg is vid 0° C genom att tillföra vattenånga som håller 100°C behöver vi betrakta tre värmetermer för att nå sluttillståndet vatten vid 0°C:

$Q_1$  - Omvandlingen av is vid 0°C till vatten vid 0°C

$Q_2$  - Omvandlingen av ånga vid 100°C till vatten 100°C

$Q_3$  - Avsvalningen av vatten 100°C till 0°C

Vi kan betrakta systemet med is och vattenånga som ett slutet system och då måste energin bevaras:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

De tre värmetermerna kan skrivas som:

$Q_1 = m_i l_f$  där  $m_i$  = mängden is och  $l_f$  = specifika smältsentalpin

$Q_2 = m_a l_v$  där  $m_a$  = mängden ånga och  $l_v$  = specifika ångbildningsentalpin

$Q_3 = \int m_a c_p dT = m_a c_p \Delta T$  där  $c_p$  = specifika värmekapaciteten för vatten

man får här anta att  $c_p$  är oberoende av T

a) Mängden ånga som man behöver ges nu direkt ur bevarandet av energin:

$$m_i l_f = m_a l_v + \Delta T m_a c_p$$

$$m_a = \frac{m_i l_f}{l_v + \Delta T c_p}$$

$$c_p = 4.18 \text{ kJ/kgK}$$

$$l_v = 2260 \text{ kJ/kg}$$

$$l_f = 334 \text{ kJ/kg}$$

detta ger att  $m_a = 0.25 \text{ kg}$

b) För att beräkna entropiförändringen betraktar dels ändringen i entropi vid smältningen av is och dels entropiändringen för omvandlingen från ånga till vatten och avsvalning av vatten:

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1(is \rightarrow vatten) + \Delta S_2(ång \rightarrow vatten) + \Delta S_3(vatten 100^\circ \rightarrow 0^\circ C)$$

Vid en fasövergång ges entropiändringen av

$$\Delta S = \frac{ml}{T} \text{ dvs}$$

$$\Delta S_1 = \frac{m_i l_f}{T_{smält}} = 2.45 \text{ kJ/K entropin ökar vid smältning}$$

$$\Delta S_2 = -\frac{m_d l_v}{T_{kond}} = -1.51 \text{ kJ/K}$$

Vid avsvälning av vatten från 100°C till 0°C ges entropiändringen av:

$$\Delta S_3 = \int_{373}^{273} \frac{m_d c_p}{T} dT = m_d c_p \ln \frac{273}{373} = -0.33 \text{ kJ/K}$$

$$\Delta S_{\text{tot}} = 0.61 \text{ kJ/K}$$

dvs entropin ökar i processen vilket vi förväntar oss eftersom det är en spontan process.

2. Vi har 4 delprocesser in en kretsprocess och ska beräkna värmeflödet för var och en och verkningsgraden för kretsprocessen. (1 mol N<sub>2</sub> med T<sub>start</sub>=300 K)

1) Vid en isoterm kompression till 1/3 av ursprungsvolymen ges värmeflödet av:

$$Q_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT_{\text{start}} \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_{\text{start}} \ln \frac{1}{3} = -2.74 \text{ kJ}$$

(vi kan betrakta kvävgas som en ideal gas och använder här ideala gaslagen)

2) Vid en isobar expansion där volymen fördubblas ges värmeflödet av:

$$Q_{23} = nC_p(T_3 - T_2) \text{ där } C_p \text{ är den molära värmekapaciteten.}$$

$T_2 = T_1 = 300 \text{ K}$  (första processen isoterm) och  $T_3$  kan vi beräkna mha ideala gaslagen:

$$T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = 600 \text{ K (isobar process där volymen fördubblas)}$$

$$C_p = 1.0416 \text{ kJ/kgK} = 29.3 \text{ J/molK}$$

$$Q_{23} = 8.79 \text{ kJ}$$

3) Vid adiabatisk expansion tillbaka till begynnelsevolymen sker inget värmeutbyte:

$$Q_{34} = 0$$

4) Vid en isokor process tillbaka till begynnelsestillståndet ges värmeflödet av:

$Q_{41} = nC_V(T_1 - T_4)$  där  $C_V$  är den molära värmekapaciteten.

$T_1 = 300 \text{ K}$  och  $T_4$ , som är temperaturen efter process 3,

kan vi beräkna mha sambandet för adiabatiska processer :

$pV^\gamma = \text{konst}$  och ideala gaslagen,

$$T_4 = T_3 \left( \frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} = T_3 \left( \frac{V_3}{V_1} \right)^{\gamma-1} \quad \text{där } \gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1.4 \text{ (ur tabellsamling)}$$

$$\text{och } V_3 = 2V_2 = \frac{2}{3}V_1$$

$$\Rightarrow T_4 = 510 \text{ K}$$

$$C_V = C_p / 1.4 = 20.9 \text{ J/molK}$$

$$Q_{41} = -4.39 \text{ kJ}$$

Verkningsgraden för processen ges av  $\eta = \frac{W}{Q_{in}}$

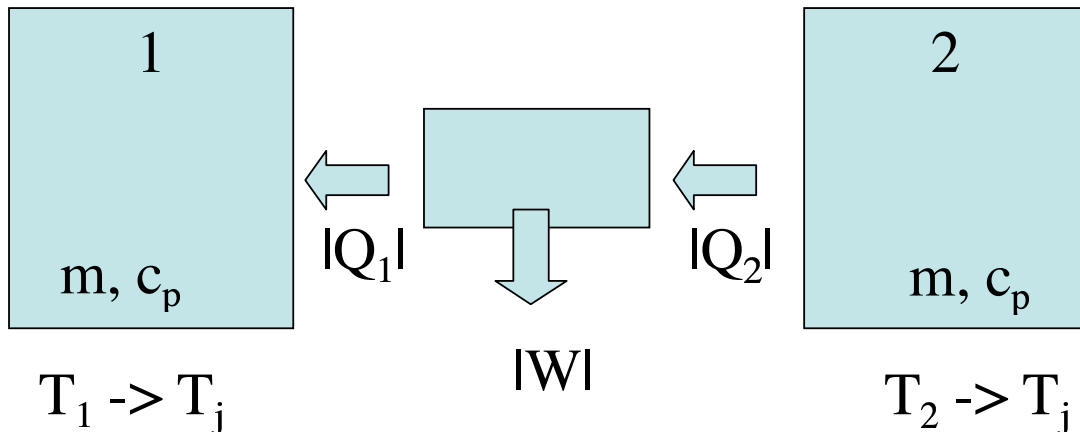
Där  $W$  är det totala nyttiga arbetet som utförs och  $Q_{in}$  den värme som tillförs.

I kretsprocessen tillförs endast värme i steg 2 dvs  $Q_{in} = Q_{23} = 8.79 \text{ kJ}$ .

Arbete utförs i steg 1,2 och 4 (inget arbete vid adiabatisk expansion av ideal gas). Det totala arbetet som utförs i kretsprocessen ges då av:  $W = Q_{12} + Q_{23} + Q_{41} = 1.66 \text{ kJ}$

$$\eta = \frac{W}{Q_{in}} = 0.19$$

5.



I värmemaskinen har vi två kroppar om vardera 1 kg och  $c_p = 2 \text{ kJ/kgK}$ . Under det att maskinen arbetar kommer temperaturen i vardera kropp att ändras tills det att vi når jämvikt,  $T = T_j$ . Det arbete som vi får ut under en sådan process ges av:

$$W = Q_2 - Q_1 = mc_p(T_2 - T_j) - mc_p(T_j - T_1) = mc_p(T_1 + T_2 - 2T_j)$$

Maximalt arbete får vi ut om processen är reversibel dvs att  $\Delta S = 0$ . Vi behöver alltså bestämma det  $T_j$  för vilket processen är reversibel.

Entropiändringen för varje del ges av:

$$dS_i = \frac{dQ_i}{T} = \frac{mc_p dT}{T}, \quad i=1,2$$

vi får då att:

$$\Delta S_1 = mc_p \ln \frac{T_j}{T_1} \quad \text{och} \quad \Delta S_2 = mc_p \ln \frac{T_j}{T_2}$$

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = mc_p \left( \ln \frac{T_j}{T_1} + \ln \frac{T_j}{T_2} \right) = mc_p \ln \frac{T_j^2}{T_1 T_2} = 0$$

$$\text{vilket ger att } T_j = \sqrt{T_1 T_2}$$

och vi får det maximala arbetet till:

$$W = mc_p(T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2}) = 10,6 \text{ kJ}$$

### Uppgift 3

a) Energin för fjädern ges av  $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$ . Eftersom den kan betraktas som klassisk kan vi använda ekvipartitionsteoremet som ger

$$\langle \frac{1}{2}Kx^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T,$$

dvs,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{K}.$$

b) Givet  $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \langle n \rangle$  där  $\omega = \sqrt{K/m}$ . Beräkna alltså  $\langle n \rangle$  för en harmonisk oscillator.

$$\langle n \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} = \frac{\sum n e^{-\beta \hbar \omega n}}{\sum e^{-\beta \hbar \omega n}} = -\frac{1}{\hbar \omega} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z',$$

där

$$Z' = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega n} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}.$$

Vi får alltså

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega} \langle n \rangle = \dots = \frac{\hbar}{m\omega} \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}$$

Klassiska gränsen svarar rimligtvis mot höga temperaturer, dvs  $k_B T \gg \hbar \omega$  eller  $\beta \hbar \omega \ll 1$ . I denna gränsen har vi

$$\langle x^2 \rangle \approx \frac{\hbar}{m\omega} \frac{1}{\beta \hbar \omega} = \frac{k_B T}{m\omega^2} = \frac{k_B T}{K}$$

vilket är samma som i uppgift a).



## Uppgift 4

a) Vi använder mikrokanonisk fördelning där alla tillgängliga tillstånd är lika sannolika. Antalet tillstånd med energin  $n\epsilon$  ges av  $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ .

Sannolikheten att partikel 1 har energin  $\epsilon$  ges då av antalet tillstånd där partikel 1 har energin  $\epsilon$  (dvs, resten av systemet har energin  $(n-1)\epsilon$ ) delat med totala antalet tillstånd,

$$P_1(\epsilon) = \binom{N-1}{n-1} / \binom{N}{n} = \frac{\frac{N!}{n!(n-1)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{n}{N}$$

b) Här använder vi kanonisk fördelning. Eftersom partiklarna är oberoende och särskiljbara ges väntevärdet av energin av  $E = -N \frac{\partial}{\partial \beta} Z_1$ , där  $Z_1 = 1 + e^{-\beta\epsilon}$  är tillståndssumman för en partikel. Vi får alltså

$$E = \frac{N\epsilon}{e^{\beta\epsilon} + 1} = n\epsilon$$

om  $e^{\beta\epsilon} + 1 = \frac{N}{n}$  eller

$$k_B T = \epsilon / \ln\left(\frac{N}{n} - 1\right).$$

Eftersom  $T \geq 0$  är  $n$  begränsat enligt  $n \leq N/2$ .

Sannoliketen för att en specifik partikel har energi  $\epsilon$  ges av

$$P_1(\epsilon) = \frac{e^{-\beta\epsilon}}{Z_1} = \frac{1}{e^{\beta\epsilon} + 1} = \frac{n}{N}.$$

## Uppgift 6

Vi använder stor kanonisk fördelning för att behandla fällan som är i ett partikel och värmebad. Dom tre tillstånden med noll, en eller två partiklar har sannolikheter

$$\begin{aligned}P_0 &= 1/\mathcal{Z} \\P_1 &= e^{\beta(\epsilon+\mu)}/\mathcal{Z} \\P_2 &= e^{\beta(2\epsilon+2\mu-\Delta)}/\mathcal{Z},\end{aligned}$$

där

$$\mathcal{Z} = 1 + e^{\beta(\epsilon+\mu)} + e^{\beta(2\epsilon+2\mu-\Delta)}.$$

Vi ska maximera  $P_1$ . Beräkna  $\frac{\partial P_1}{\partial \epsilon}$  eller något enklare

$$\frac{\partial \ln P_1}{\partial \epsilon} = \beta - \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \epsilon} = \dots = \frac{\beta}{\mathcal{Z}}(1 - e^{\beta(2\epsilon+2\mu-\Delta)})$$

Ett max (eller min) finns alltså och ges av  $(1 - e^{\beta(2\epsilon+2\mu-\Delta)}) = 0$  eller

$$\epsilon = \frac{\Delta}{2} - \mu$$

Att detta är ett maximum bekräftas genom  $\left. \frac{\partial^2 \ln P_1}{\partial \epsilon^2} \right|_{\epsilon=\frac{\Delta}{2}-\mu} = -\frac{2\beta^2}{\mathcal{Z}} < 0$

Chalmers Tekniska Högskola  
och Göteborg Universitet  
Sektionen för Fysik och Teknisk Fysik  
Aleksandar Matic/Mats Granath

### **Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Onsdagen den 15 december 2004 8.30-12.30 i V-huset.

**Examinatorer:** Aleksandar Matic (0730-346294), Mats Granath (0708-938077).

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska Tabeller (sålda via Cremona), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk Fördelning", egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift), valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Poäng från dugga och inlämningsuppgift adderas enligt tidigare offentliggjord formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Lösningar finns på kurshemsidan efter tentans slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen 10:e januari.

**Rättningsgranskning:** Måndagen 17:e januari 12.00-13.00 i rum O7109B

1. En mol kolmonoxidgas hålls i en behållare vid konstant tryck  $P=0.1\text{MPa}$ . Kolmonoxid har rotationsexcitationer  $\varepsilon_r^{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$  som är  $2J+1$ -faldigt degenererade med tröghetsmoment  $I$  och motsvarande energi  $\hbar^2/2I = 2.4 \cdot 10^{-4}$  eV. Molekylen har också icke-degenererade vibrationsmoder med energi  $\varepsilon_r^{\text{vib}} = \hbar\omega(\frac{1}{2} + r)$  där  $\hbar\omega=0.27$  eV.

Härled ett uttryck för gasens värmekapacitet under antagandet att den kan behandlas som en klassisk idealgas. Förenkla uttrycket så att det gäller i temperaturintervallet 100K till 1000K (kokpunkten är 81K) och skissa resultatet i en graf. (10p)

2. För att bestämma  $C_p/C_v$  för en gas genomför man följande experiment: En mol gas, som initialt har temperaturen  $T_1=90^\circ\text{C}$ , expanderas adiabatiskt till den dubbla volymen. Därefter komprimeras gasen isotermiskt till ursprungsvolymen. Den avgivna värmemängden uppmäts till  $Q=1.33$  kJ. Gasen kan antas vara ideal.

a) Rita in processen i ett P-V diagram. (2p)

b) Bestäm  $C_p/C_v$  för gasen. (8p)

3. I en ångturbin expanderar ånga av  $400^{\circ}\text{C}$ ,  $50\text{ bar}$  isentropiskt till  $8.5\text{ bar}$ . Expansionens slutpunkt befinner sig precis på ångkurvan. Ångan kondenseras sedan till vatten under samma tryck. Beräkna följande uppgifter för denna ångturbin med hjälp av tabellsamlingen:

- Hur stort arbete får man ut från turbinen per kg ånga. (2p)
- Pumparbetet per kg vatten som matarpumpen måste utföra. Processen i matarpumpen är isentropisk. (2p)
- Tillförd värmeenergi i ångpannan per kg ånga. (2p)
- Processens verkningsgrad. (2p)
- Rita in processen i ett h-s diagram. (2p)

4. Vid höga temperaturer joniseras atomärt väte till ett plasma bestående av väteatomer, protoner och elektroner med täthet  $n_H$ ,  $n_p$  och  $n_e$ . (Vi antar att tryck och temperatur är sådant att tätheten av vätemolekyler  $\text{H}_2$  är försumbar och att väteatomen är i sitt grundtillstånd.) I jämvikt gäller då  $\mu_H = \mu_p + \mu_e$ . Härled ett uttryck (Sahas ekvation) för temperaturberoendet av  $n_p^2/n_H$  i termer av elektronmassan,  $m_e$ , och joniseringsenergin,  $E_H$ , för väte. Plasman kan beskrivas som en icke-relativistisk klassisk idealgas. (10p)

5. I ett tidigt skede i universums utveckling bildades väteatomer från protoner och elektroner och frigjorde dom fotoner som vi idag kan uppfatta som den kosmiska bakgrundstrålningen. Denna beskrivs väl som svartkroppsstrålning. Idag är temperaturen för denna fotongas  $T_0 = 2.7\text{K}$  medan den vid tiden för den så kallade frikopplingen var  $T_f = 3700\text{K}$ .

Hur stor är universums relativa expansion sedan frikopplingen? Man kan anta att ett effektivt gravitationellt tryck uppväger det mekaniska trycket från fotongasen så att expansionen sker adiabatiskt och reversibelt.

Beräkna också den relativa ändringen i fotontäthet. (10p)

6. För att bestämma den molära sublimationsentalpin för vatten har man mätt upp ångtrycket som funktion av temperaturen enligt följande tabell:

Temp ( $^{\circ}\text{C}$ )	Ångtryck (mmHg)
-19.6	0.806
-20.0	0.776
-20.4	0.747

Beräkna med hjälp av dessa data den molära sublimationsentalpin för vatten vid  $-20^{\circ}\text{C}$ . Du kan anta att vattenånga i jämvikt med is kan betraktas som en ideal gas. (10 p)

Chalmers Tekniska Högskola  
och Göteborg Universitet  
Sektionen för Fysik och Teknisk Fysik  
Aleksandar Matic/Mats Granath

### **Exam in Thermodynamics and Statistical Physics for F3 (FTF140)**

**Time and place:** Wednesday December 15<sup>th</sup> 2004 8.30-12.30 in V-huset.

**Examiners:** Aleksandar Matic (0730-346294), Mats Granath (0708-938077).

**Allowed material:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska Tabeller (sold by Cremona), formula sheets "Allmänna relationer för enkomponentsystem" and "Kanonisk Fördelning", personally written A4-page with content of your own choice (no copies or type written material), pocket calculator.

**Grading:** Each task gives a maximum of 10 points. The score from the dugga and the hand-in problem is added to the exam result according to the formula presented earlier. A total of 30 points is required for passed.

**Solutions to the exam:** Solutions will be put on the course home page after the exam.

**Exam results:** Exam results are displayed at the Fysik entrance not later than Monday January 10<sup>th</sup>.

**Review of the exam:** Monday January 17<sup>th</sup> 12.00-13.00 in O7109B

1. A vessel contains one mole of carbon monoxide at a constant pressure of  $P=0.1\text{MPa}$ . Carbon monoxide has rotational excitations  $\varepsilon_J^{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$  which are  $2J+1$ -fold degenerated with a moment of inertia  $I$  with corresponding energy  $\hbar^2/2I = 2.4 \cdot 10^{-4}$  eV. The molecule also has non-degenerate vibrational modes with the energy  $\varepsilon_r^{\text{vib}} = \hbar\omega(\frac{1}{2} + r)$  where  $\hbar\omega=0.27$  eV.

Derive an expression for the heat capacity of the gas under the assumption that it can be treated as a classical ideal gas. Simplify the expression to be valid in the temperature range 100K to 1000K (the boiling point is 81K) and draw the result in a graph (10p)

2. The following experiment is performed in order to determine  $C_p/C_v$  for a gas: One mole of a gas, initially at the temperature  $T_1=90^\circ\text{C}$ , is expanded adiabatically to the double volume. Subsequently the gas is compressed isothermally to the initial volume. The produced heat is determined to  $Q=1.33$  kJ. The gas can be treated as ideal.

a) Draw the process in a P-V diagram. (2p)

b) Determine  $C_p/C_v$  for the gas. (8p)

3. In a steam turbine, steam at 400°C, 50 bars is isentropically expanded to 8.5 bar. The terminal point of the expansion is just at the steam curve. The steam is condensed to water at the same pressure. Calculate the following with the aid of the thermodynamical tables:

- How much work is obtained from the turbine for each kg of steam. (2p)
- The work required by the feeding pump for each kg of water. The process in the feeding pump is isentropic.(2p)
- The heat supplied in the steam-boiler for each kg of steam. (2p)
- The efficiency of the process. (2p)
- Draw the process in a h-s diagram. (2p)

4. At high temperatures atomic hydrogen is ionised to a plasma containing hydrogen atoms, protons and electrons with densities  $n_H$ ,  $n_p$  och  $n_e$ . (Assume that at this pressure and temperature the density of hydrogen molecules  $H_2$  is negligible and that the hydrogen atom is in its ground state.) Equilibrium is established when  $\mu_H = \mu_p + \mu_e$ . Derive an expression (Sahas equation) for the temperature dependence for  $n_p^2/n_H$  in terms of the electron mass,  $m_e$ , and the ionisation energy,  $E_H$ , for hydrogen. The plasma can be treated as a non-relativistic classical ideal gas. (10p)

5. In the early stages of the universe hydrogen atoms were formed by protons and electrons and photons were generated. Today we can detect these photons as the cosmic background radiation, which can be well described as black body radiation. The temperature of the photon gas is today  $T_0 = 2.7K$  whereas it was  $T_f = 3700K$  at the time of the so-called decoupling.

How large is the relative expansion of the universe since the decoupling? You can assume that the effective gravitational pressure balances the mechanical pressure from the photon gas so that the expansion can be regarded as adiabatic and reversible.

Also, calculate the relative change in the photon density. (10p)

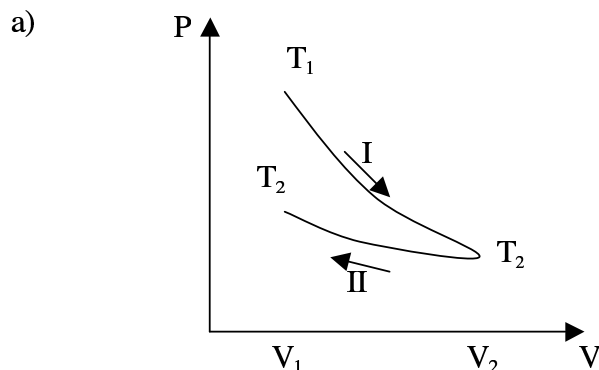
6. In order to determine the enthalpy of sublimation for water the vapour pressure has been measured as a function of temperature according to the following table:

Temp (°C)	Vapour pressure (mmHg)
-19.6	0.806
-20.0	0.776
-20.4	0.747

From these data, calculate the molar sublimation enthalpy for water at -20°C. Assume that water vapour in equilibrium with ice can be regarded as an ideal gas. (10 p)

## Lösningar

2.



b)

Delprocess I:

Adiabatisk expansion - inget värmeutbyte med omgivningen,  $Q_1=0$ .

För en adiabatisk process gäller  $PV^\gamma = \text{konstant}$ , där  $\gamma = C_p/C_v$

För en ideal gas gäller  $PV = nRT \Rightarrow P = nRT/V$

Tillsammans ger dessa för en mol ( $n=1$ )  $TV^{\gamma-1} = \text{konst}$  (ty R-konstant).

Vi kan nu räkna ut temperaturen  $T_2$  ur  $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$  och  $V_2 = 2V_1$  (givet i uppgiften)

$T_2 = T_1 / (2^{\gamma-1})$  ( $T_1 = 90^\circ\text{C} = 363 \text{ K}$  givet i uppgiften)

Delprocess II:

Isoterm kompression, värme,  $Q_2$ , måste avges till omgivningen,

Första huvudsatsen:  $\Delta E = Q_2 + W_2$

Isoterm process:  $\Delta E = 0$  för en ideal gas, inre energin bara beroende av temperaturen.

$$\Rightarrow Q_2 = -W_2$$

$W_2 = -\int p dV$ ;  $P = nRT/V$  för en ideal gas

för en mol ( $n = 1$ )

$$Q_2 = RT_2 \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_2 \int_{2V_1}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \frac{1}{2}$$

med  $T_2$  från uttrycket ovan får vi då:

$$Q_2 = -\frac{RT_1 \ln 2}{2^{\gamma-1}}$$

Givet i uppgiften är att avgiven värmemängd  $Q=1.33$  kJ. Eftersom  $Q_1=0$  så blir  $Q=-Q_2$  (observera:  $Q$  - avgiven värme och  $Q_2$  definieras positiv när värme ges till systemet). Med lite algebra får man då fram:

$$\gamma = C_P/C_V = 1 + \frac{\ln\left(\frac{RT_1 \ln 2}{Q}\right)}{\ln 2} = 1.65$$

**Svar:  $C_P/C_V=1.65$**

3. a) Arbete som man får ut ur turbinen är skillnaden i specifik entalpi mellan start och slutläget.

I startläget har vi överhettad ånga av  $400^\circ\text{C}$  och  $50$  bar ( $=5.0$  Mpa). Ur tabellen A.1.3, fås att:

$$h_{\text{start}}=3195.7 \text{ kJ/kg}$$

I slutläget befinner vi oss på ångkurvan, dvs vi har mättad ånga, vid  $8.5$  bar ( $=0.85$  Mpa). Ur tabell A.1.2 får vi då:

$$h_{\text{slut}}=2771.6 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{Arbetet blir då: } W_T=3195.7-2771.6=424.1 \text{ kJ/kg}$$

b) I matarpumpen så ökas trycket på vattnet från  $0.85$  MPa och  $5.0$  Mpa isentropiskt. I den här processen går vi från mättat vatten, dvs. vätskekurvan, till vatten under övertryck. Arbetet i pumpen blir skillnaden mellan specifika entalpierna i start och sluttillstånd:

$$\text{Ur tabell A.1.2 får vi } h_{\text{start}}=732.22 \text{ kJ/kg}$$

Ur tabellen A.1.4 (compressed liquid) får vi  $h_{\text{slut}}$ . Men för att veta vilken temperatur vi ska gå in på utnyttjar vi att vi vet att processen är isentropisk, dvs. entropin är konstant. I startpunkten är specifik entropin  $s=2.0710$  kJ/kg, ur tabell A.1.2. I tabell A.1.4 får vi nu interpolera mellan temperaturerna  $160^\circ\text{C}$  och  $180^\circ\text{C}$  och får fram  $h_{\text{slut}}=737.3$  kJ/kg.

$$\text{Pumparbetet blir då: } W_p=737.3-732.22=5.1 \text{ kJ/kg}$$

c) I ångpannan går vi nu från vatten under övertryck till överhettad ånga, dvs. läget vi hade innan expansionen i turbinen. Det tillförda värmets,  $Q$ , blir då skillnaden mellan de specifika entalpierna i de två lägena.

$$h_{\text{start}} \text{ är samma som } h_{\text{slut}} \text{ i uppgift b): } h_{\text{start}}=737.3 \text{ kJ/kg}$$

$$h_{\text{slut}} \text{ är samma som } h_{\text{start}} \text{ i uppgift a): } h_{\text{slut}}=3195.7 \text{ kJ/kg}$$

$$\text{Tillförda värmets blir nu } Q=3195.7-737.3=2458.4 \text{ kJ/kg}$$

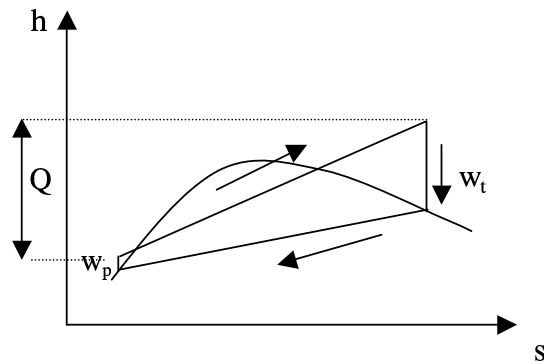


d) Processens verkningsgrad,  $\eta$ , ges av

$$\eta = \frac{W_t - W_P}{Q} = \frac{424,1 - 5,1}{2458,4} = 0,17$$

notera: Processens verkningsgrad är rätt låg vilket bl. a beror på att vi avslutade expansionen vi ångkurvan och inte lät den gå in i tvåfasområdet.

e)



6. För att räkna ut sublimationsentalpin använder vi oss av Clausius-Clapeyrons ekvation:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l_s}{T(v_d - v_{is})}, \text{ där } l_s \text{ - molära sublimationsentalpin,}$$

$v_d$  - specifika volymen för ånga,  $v_{is}$  - specifika volymen för is

$v_d \gg v_{is}$  vilket gör att vi kan skriva:

$$\frac{dP}{dT} = \frac{l_s}{Tv_d} = \frac{l_s P}{T^2 R}, \text{ där sista steget förlor ur ideala gaslagen.}$$

vi kan nu skriva

$$\frac{dP}{P} = \frac{l_s}{R} \frac{dT}{T^2} \text{ inegrering av detta uttryck ger nu:}$$

$$\ln P = -\frac{l_s}{R} \cdot \frac{1}{T} + \text{konstant}$$

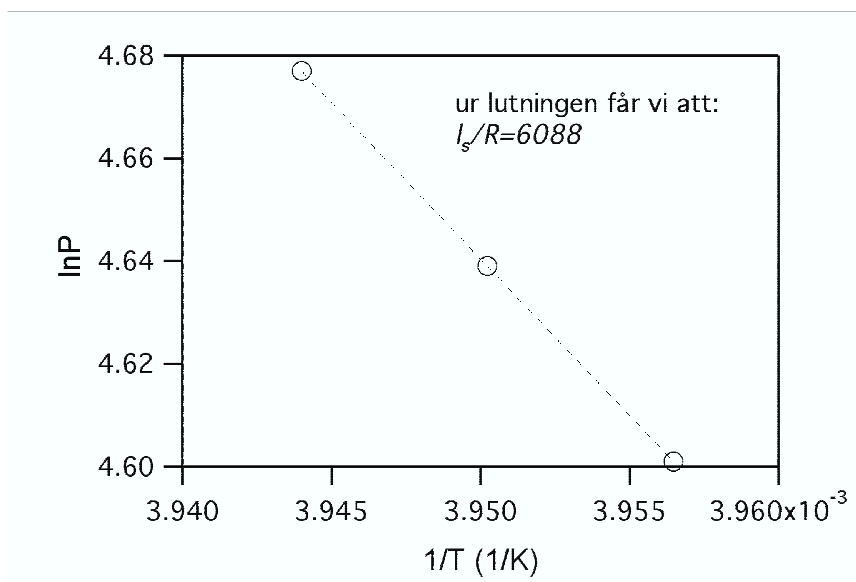
vi ser nu att  $\ln P$  är proportionellt mot  $\frac{1}{T}$  där

proportionalitetskonstanten ges av  $-\frac{l_s}{R}$

Om vi nu gör en graf över  $\ln P$  mot  $1/T$  kan vi alltså bestämma  $l_s$

Givet i uppgiften är:

Temp (°C)	Temp (K)	1/T (1/K)	P (mmHg)	P (Pa)	lnP
-19.6	253.55	$3.9440 \cdot 10^{-3}$	0.806	107.44	4.677
-20.0	253.15	$3.9502 \cdot 10^{-3}$	0.776	103.44	4.639
-20.4	252.75	$3.9565 \cdot 10^{-3}$	0.747	99.58	4.601



Detta ger nu:

$$l_s = R \cdot 6088 = 50.6 \text{ kJ/mol}$$

**Svar:** Den molära sublimationsentalpin för vatten är  $l_s=50.6 \text{ kJ/mol}$ .

## Uppgift 1

Värmekapaciteten för en mol idealgas vid konstant tryck fås från  $C_p = C_v + R$  där

$$C_v = \left( \frac{dE}{dT} \right)_{V,N} \quad \text{och} \quad E = - \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)_{V,N} .$$

För idealgas har vi

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} Z_1^N(T, V) \quad \text{med} \quad Z_1 = Z_1^{\text{tr}} Z_1^{\text{rot}} Z_1^{\text{vib}} ,$$

så att

$$E = E^{\text{tr}} + E^{\text{rot}} + E^{\text{vib}} .$$

För translationsrörelsen har vi allmänt  $E^{\text{tr}} = \frac{3}{2} NkT$  medans vi för rotations- och vibrationsfrihetsgraderna skriver tillståndssummorna

$$Z_1^{\text{rot}} = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) e^{-\beta \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)} \quad \text{och}$$

$$Z_1^{\text{vib}} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (r + \frac{1}{2})} = \frac{e^{-\beta \hbar \omega / 2}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}} ,$$

vilket är så långt vi kommer för godtyckliga temperaturer.

I temperaturintervallet 100K till 1000K kan vi förenkla detta betydligt.

Vi har  $T_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2Ik} \approx 2.8K \ll T$  vilket innebär att vi kan använda ekvipartitionsteoremet på två rotations frihetsgrader per molekyl, som ger  $E^{\text{rot}} = NkT$ . (Alternativt kan man visa detta direkt genom att skriva om summan  $Z_1^{\text{rot}}$  som en integral.)

För vibrationsfrihetsgraderna har vi  $T_{\text{vib}} = \hbar \omega / k \approx 3140K \gg T$  så att vi kan Taylorutveckla  $Z_1^{\text{vib}}$  och få  $E^{\text{vib}} = NkT_{\text{vib}} (\frac{1}{2} + e^{-T_{\text{vib}}/T})$ . (För  $T_{\text{vib}}/T \geq 3$  är  $e^{-T_{\text{vib}}/T} \leq .05$  så vi kan säkert försumma högre ordnings termer som är  $\mathcal{O}(e^{-2T_{\text{vib}}/T})$ .)

Sluttuttrycket för värmekapaciteten blir således

$$C_p = R \left\{ \frac{7}{2} + \left( \frac{T_{\text{vib}}}{T} \right)^2 e^{-T_{\text{vib}}/T} \right\}$$

## Uppgift 4

Beräkna kemisk potential ur

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = -kT \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial N} \right)_{T,V}$$

För idealgas med  $Z(T, V, N) = \frac{1}{N!} Z_1^N(T, V)$  fås genom användning av Stirlings formel

$$\mu = -kT \ln \frac{Z_1}{N},$$

vilket från jämviktsvilkoret  $\mu_H = \mu_p + \mu_e$  ger

$$\frac{Z_1^H}{N_H} = \frac{Z_1^p Z_1^e}{N_p N_e}.$$

För att ta hänsyn till joniseringsenergin skriver vi energin för en partikel såsom

$$E = \frac{p^2}{2m} + E_0,$$

där  $E_0$  är viloenenergi för partikeln och  $E_H = E_0^p + E_0^e - E_0^H$ . (Här har vi valt  $E_H > 0$ , dvs joniseringsenergin.) Vi kan då skriva

$$Z_1 = g \frac{V}{h^3} 4\pi \int p^2 dp e^{-\beta(\frac{p^2}{2m} + E_0)} = e^{-\beta E_0} gV \left( \frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2},$$

där  $g$  är degenerationsgraden vilken är 2 för elektron och proton och  $2 \times 2 = 4$  för väteatomen.

Vi får då slututtrycket

$$\frac{n_p^2}{n_H} = \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\beta E_H}$$

där vi har försummat skillnaden i massa mellan proton och väteatom och där vi har använt  $N_p = N_e$  eftersom både produceras i lika stort antal när väteatomen joniseras.

## Uppgift 5

Adiabatisk och reversibel process innebär isentropisk. För svartkroppsstrålning gäller

$$S = \frac{4}{3}aVT^3,$$

så att expansionen ges av

$$\frac{V_0}{V_f} = \left(\frac{T_f}{T_0}\right)^3 = 2.57 \cdot 10^9$$

Antalet fotoner ges av

$$N = \int_0^\infty \frac{f(\omega) d\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1},$$

där tillståndstätheten ges av  $f(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3}$ . Genom en substitution  $x = \beta\hbar\omega$  fås då

$$N = V \frac{k^3 T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \sim VT^3 \sim S,$$

där vi ser att medelantalet fotoner är konstant så att tätheten skalar som  $1/V$ .

**Svar:** Volymen har expanderat med en factor  $2.6 \cdot 10^9$  och fotontätheten har minskat med samma faktor.

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Onsdagen den 25 augusti 2004 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

**Examinatorer:** Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk fördelning" (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 6 september.

**Rättningsgranskning:** Onsdagen den 8 september kl. 12.00-13.00 i rum 7112B i Origohusets norra flygel (Göran Niklassons tjänsterum).

1. På östra sidan av Klippiga Bergen uppträder ibland en stark, torr och varm vind som går under namnet "Chinook". Den kommer uppifrån bergen och blåser nedför sluttningarna mot Denver och angränsande områden. Fastän det är kallt uppe i bergen är vinden mycket varm när den når Denver ("chinook" är ett indianskt ord som betyder "snö-ätare"). Liknade vindar uppträder bland annat i Alperna ("föhnvindar") och i södra Kalifornien ("Santa Anas").
  - (a) Förklara varför vindens temperatur stiger när den blåser nedför sluttningarna! Varför är det väsentligt att vinden är stark (d.v.s. att luftströmmen är snabb)?
  - (b) Anta att en vind börjar blåsa mot Denver (höjd 1630 m över havet) från Grays Peak (en bergstopp 80 km väster om Denver på höjden 4350 över havet). Luftrycket på Grays Peak är 56,0 kPa och lufttemperaturen är  $-15^{\circ}\text{C}$ . I Denver är luftrycket 81,2 kPa och temperaturen  $2,0^{\circ}\text{C}$  innan det börjar blåsa. Med hur många grader stiger temperaturen i Denver när chinooken anländer?
2. För en klassisk ideal gas bestående av ickeväxelverkande atomer i termisk jämvikt är de kartesiska komponenterna för hastigheten statistiskt oberoende variabler. I tre dimensioner gäller

$$p(v_x, v_y, v_z) = (2\pi\sigma^2)^{-3/2} \exp\left[-(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/(2\sigma^2)\right]$$

där  $\sigma^2 = kT/m$ . Energin för en atom är  $E = m|\mathbf{v}|^2/2$ .

- (a) Vad är sannolikhetsfördelningen  $p(E)$  för energin för en atom i en tredimensionell gas?
- (b) Antag att gasen är tvådimensionell. Vad är  $p(E)$  i så fall?
- (c) Vad är  $p(E)$  om gasen är endimensionell?
- (d) Beskriv skillnaderna mellan de tre fallen.

3. I en aluminiumbehållare som är dimensionerad för att tåla ett övertryck på 5 atm förvaras flytande dietyler i jämvikt med tillhörande gasfas. Vilken är den maximala temperatur som behållaren får utsättas för, om det maximala trycket inte skall över-skridas?

Kokpunkten för dietyler vid 1 atm är 34,5°C. Ångbildningsentalpiteten kan sättas till 27,0 kJ/mol i det aktuella temperaturområdet. I avsaknad av ytterligare data är du tvungen att göra vissa förenklande approximationer och antaganden i beräkningen. Dessa skall tydligt förklaras.

4.  $N$  stycken vätemolekyler  $H_2$  i termisk jämvikt vid temperaturen  $T$  har absorberats på en flat yta med arean  $A$ . På ytan beter molekylerna sig som en tvådimensionell icke växelverkande gas. Molekylernas rotationsrörelse är med andra ord helt bunden till ytans plan.

Rotationsrörelsens kvanttillstånd beskrivs av ett rotationskvanttal  $m$  som kan anta värdena  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Det finns ett kvanttillstånd för varje värde av  $m$ .

Rotationsenergi skrivs  $\epsilon_m = m^2 \hbar^2 / 2I$  där  $I$  är tröghetsmomentet.

(a) Skriv ned rotationsdelen av partitionsfunktionen för en molekyl!

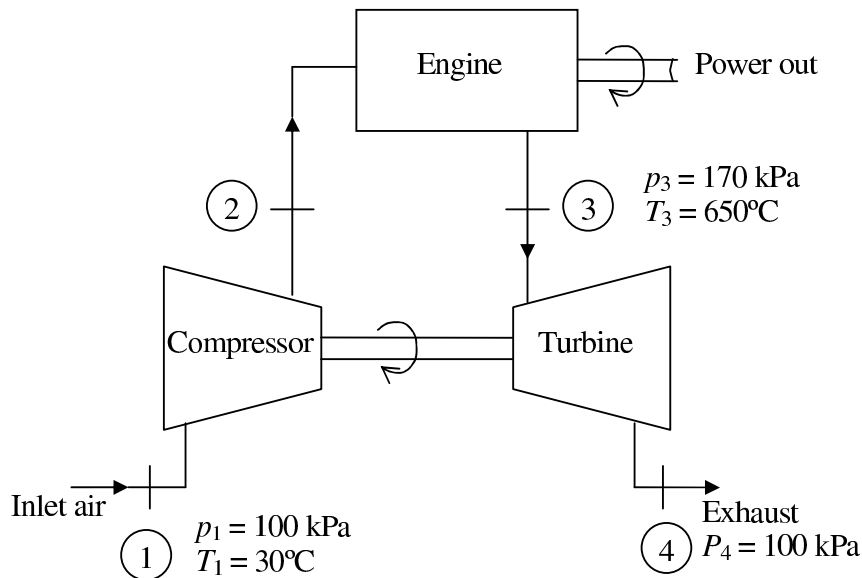
(b) Vad är kvoten mellan sannolikheterna  $p(m=3)$  och  $p(m=2)$  ?

(c) Vad är sannolikheten att  $m = 3$  om energin är  $\epsilon = 9\hbar^2 / 2I$  ? Vad är sannolikheten att  $m = 1$  om  $\epsilon \leq \hbar^2 / 2I$  ?

(d) Hur stort är rotationsenergens bidrag till gasens inre energi vid höga temperaturer, d.v.s. då  $kT \gg \hbar^2 / 2I$  ?

5. Figuren visar principen för en turbo. Innan bränsleblandningen sprutas in i motorn komprimeras den i kompressorn, vilken drivs av en turbin som utnyttjar de varma avgaserna. Hur stort är trycket efter komprimeringen, om både kompressorn och turbinen antas arbeta reversibelt och adiabatiskt?

Bränsleblandningen får antas bestå av enbart luft, och den får behandlas som en ideal gas med konstant värmekapacitet. Ändringen av antalet mol vid förbränningen i motorn får försummas, liksom den ändliga utströmningshastigheten. Siffrvärden för tryck och temperatur tas från figuren.



6. En endimensionell kedja sätts ihop av  $N$  identiska länkar med längden  $l$ . Vinkeln mellan två på varandra följande länkar kan vara  $0^\circ$  eller  $180^\circ$ . Inre energin är oberoende av vilken vinkeln är. Man kan för enkelhetens skull säga att om vinkeln är  $0^\circ$  så lägger vi till (+) längden  $l$  till kedjans totala längd medan om vinkeln är  $180^\circ$  så subtraheras (-) längden  $l$  från totala längden. Vi har totala antalet länkar  $N = (n_+ + n_-)$  och totala längden av kedjan

$$L = l(n_+ - n_-) = l(2n_+ - N)$$

- (a) Använd den mikrokanoniska ensemblen för att beräkna kedjans entropi som funktion av  $N$  och  $n_+$ .
- (b) Finn ett uttryck för spännkraften  $\tau$  i kedjan. Detta uttryck blir en funktion av temperaturen  $T$  samt av  $N$  och  $n_+$ . Notera att spännkraften i en endimensionell kedja blir en motsvarighet till trycket i ett tredimensionellt system.
- (c) Vad blir längden av kedjan uttryckt i  $\tau$ ,  $N$  och  $T$ ?



## Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2004-08-25

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 6 september.

**Rättningsgranskning:** Onsdagen den 8 september kl. 12.00-13.00 i rum 7112B i Origohusets norra flygel (Göran Niklassons tjänsterum).

## Lösningar

### Uppgift 1

(a) Om lufrörelsen är snabb hinner det inte ske något nämnvärt värmeutbyte med omgivningen, d.v.s. processen blir adiabatisk. Eftersom trycket blir större på lägre höjd komprimeras luften. Vid adiabatisk kompression av en gas ökar temperaturen.

(b) Beteckningar:

$$T_1 = \text{begynnelse-temperatur} = (273 - 15) \text{ K} = 258 \text{ K}$$

$$p_1 = \text{begynnelsetryck} = 56,0 \text{ kPa}$$

$$T_2 = \text{sluttemperatur} = ?$$

$$p_2 = \text{sluttryck} = 81,2 \text{ kPa}$$

$$\gamma = C_p/C_v = 1,4 \text{ för luft}$$

Vid adiabatisk process gäller sambandet

$$p^\gamma T^{\gamma-1} = \text{konstant}$$

vilket ger

$$T_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\left(\frac{1}{\gamma}\right)} T_1 = \left(\frac{81,2}{56,0}\right)^{\left(\frac{1}{1,4}\right)} 258 \text{ K} = 287 \text{ K} = 14^\circ\text{C}$$

Temperaturen i Denver stiger alltså från  $2^\circ\text{C}$  till  $14^\circ\text{C}$ , d.v.s med 12 grader.

Svar: Temperaturen stiger med  $12^\circ\text{C}$ .

### Uppgift 2

(a) Vi börjar med att bestämma sannolikheten  $P(E)$  för att energin skall vara  $\leq E$ . Den finner vi genom att integrera  $p(v_x, v_y, v_z)$  över det område där  $v^2 \leq 2E/m$ . Integrationen genomförs enkelt om vi inför de sfäriska koordinaterna  $v$ ,  $\theta$  och  $\varphi$  i hastighetsrummet:

$$P(E) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2E/m}} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Med variabelsubstitutionen  $\varepsilon = mv^2/2$  kan detta omformas till

$$P(E) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^E \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{m^{3/2}} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}} \int_0^E \sqrt{\varepsilon} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$$

Den sökta sannolikhetsfördelningen  $p(E)$  fås genom derivering:

$$p(E) = \frac{dP(E)}{dE} = \frac{2\sqrt{E} e^{-E/kT}}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}}$$

(b) I två dimensioner gäller att

$$p(v_x, v_y) = (2\pi\sigma^2)^{-1} \exp\left[-(v_x^2 + v_y^2)/(2\sigma^2)\right]$$

Vi gör motsvarande omformningar som i tre dimensioner men med användning av polära koordinater  $v$  och  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} P(E) &= \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2E/m}} v e^{-mv^2/2kT} dv = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^2 \int_0^E \frac{1}{m} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon \\ &= \frac{1}{kT} \int_0^E e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon \\ p(E) &= \frac{dP(E)}{dE} = \frac{e^{-E/kT}}{kT} \end{aligned}$$

(c) I en dimension gäller att

$$p(v_x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-v_x^2/2\sigma^2\right]$$

vilket ger

$$\begin{aligned} P(E) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^{\sqrt{2E/m}} e^{-mv^2/2kT} dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int_0^E \frac{1}{\sqrt{2m\varepsilon}} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kT}} \int_0^E \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{\sqrt{\varepsilon}} d\varepsilon \\ p(E) &= \frac{dP(E)}{dE} = \frac{e^{-E/kT}}{2\sqrt{\pi kTE}} \end{aligned}$$

(d) Den mest markanta skillnaden mellan de tre fallen ser man vid låga energier. I tre dimensioner fallet går  $p(E)$  mot noll som  $\sqrt{E}$ , i två dimensioner går  $p(E)$  mot ett konstant värde, och i en dimension går  $p(E)$  mot oändligheten som  $1/\sqrt{E}$

Svar:

$$(a) p(E) = \frac{2\sqrt{E} e^{-E/kT}}{\sqrt{\pi} (kT)^{3/2}}$$

$$(b) p(E) = \frac{e^{-E/kT}}{kT}$$

$$(c) p(E) = \frac{e^{-E/kT}}{2\sqrt{\pi kTE}}$$

(d) Se beskrivningen ovan.

### Uppgift 3

Vi antar att mängden eter är sådan att behållaren hela tiden innehåller både vätske- och gasfas, d.v.s. vi rör oss längs ångkurvan. Då beror trycket  $p$  av temperaturen  $T$  enligt Clausius-Clapeyrons ekvation:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{T(v_g - v_v)}$$

där  $l$  är ångbildningsentalpiteten,  $v_g$  är gasfasens volym och  $v_v$  är vätskefasens volym, allt räknat per mol.

Approximationer: vi försummar  $v_v$  i jämförelse med  $v_g$  och använder ideala gaslagen för att bestämma  $v_g$ :

$$v_g = \frac{RT}{p}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{Tv_g} = \frac{lp}{RT^2}$$

Om  $l$  antages vara konstant kan vi genom integration bestämma sambandet mellan  $p$  och  $T$ . Som randvillkor använder vi  $p_0 = 1$  atm och  $T_0 = (273,15+34,5)$  K = 307,65 K.

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{l}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2}$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{l}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

$$T = \left( \frac{1}{T_0} - \frac{R}{l} \ln \frac{p}{p_0} \right)^{-1}$$

Insättning av  $p = 5$  atm,  $R = 8,31$  J/K·mol och  $l = 27,0 \cdot 10^3$  J/mol ger  $T = 363,0$  K = 89,8°C.

Svar: 90°C

#### Uppgift 4

(a) Tillståndssumman (partitionsfunktionen) för en vätemolekyl är

$$Z_{rot}(T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-m^2 \hbar^2 / 2IkT) = 1 + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-j^2 \hbar^2 / 2IkT)$$

(b) Den sökta kvoten är

$$\frac{p(m=3)}{p(m=2)} = \frac{\exp(-9\hbar^2 / 2IkT)}{\exp(-4\hbar^2 / 2IkT)} = \exp(-5\hbar^2 / 2IkT)$$

(c) Om energin är  $9\hbar^2 / 2I$  så måste  $m$  vara antingen +3 eller -3. Båda dessa möjligheter är lika sannolika och någon annan möjlighet finns inte. Alltså finner vi att den sökta sannolikheten är

$$p\left(m=3 \mid \varepsilon = \frac{9\hbar^2}{2I}\right) = \frac{1}{2}$$

Om  $\varepsilon \leq \hbar^2 / 2I$  finns möjligheterna  $m = -1$ ,  $m = 0$  och  $m = +1$ . Sannolikheten för  $m = +1$  blir då

$$p\left(m=1 \mid \varepsilon \leq \frac{\hbar^2}{2I}\right) = \frac{\exp(-\hbar^2 / 2IkT)}{1 + 2 \exp(-\hbar^2 / 2IkT)} = \frac{1}{\exp(\hbar^2 / 2IkT) + 2}$$

(d) I högtemperaturgränsen, d.v.s. om  $kT \gg \hbar^2 / 2I$ , kan tillståndssumman göras om till en integral:

$$Z_{rot}(T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(-m^2 \hbar^2 / 2IkT) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 \hbar^2 / 2IkT) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2IkT}{\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \sqrt{\frac{2IkT}{\hbar^2}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{2\pi IkT}{\hbar^2}}$$

Ur detta kan rotationsrörelsernas bidrag till Helmholtz fria energi, entropin och energin bestämmas:

$$F_{rot} = -kT \ln Z_{rot} = -kT \ln \sqrt{\frac{2\pi IkT}{\hbar^2}} = -\frac{kT}{2} \ln \left( \frac{2\pi IkT}{\hbar^2} \right)$$

$$S_{rot} = -\frac{dF_{rot}}{dT} = \frac{k}{2} \ln \left( \frac{2\pi IkT}{\hbar^2} \right) + \frac{k}{2}$$

$$E_{rot} = F_{rot} + TS_{rot} = \frac{1}{2} kT$$

För  $N$  molekyler fås

$$E_{rot} = \frac{1}{2} NkT$$

Svar: Se formlerna ovan.

### Uppgift 5

Det arbete  $W$  som uträttas av turbinen är lika med minskningen i entalpi för gasen. För en mol av en ideal gas ger detta

$$W = C_p (T_3 - T_4)$$

där  $C_p$  är den isobariska värmekapaciteten per mol. Temperaturen  $T_4$  är inte given men kan beräknas ur givna data för trycket. Eftersom processen i turbinen är adiabatisk finner vi att

$$T_4 = \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\left( \frac{1}{\gamma} \right)} T_3$$

$$W = C_p T_3 \left[ 1 - \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\left( \frac{1}{\gamma} \right)} \right]$$

där  $\gamma$  är den adiabatiska koefficienten ( $\gamma = C_p / C_v$ ).

Hela arbetet  $W$  utnyttjas för att driva kompressorn. Den fungerar i princip på samma sätt som turbinen, fast baklänges. Vi finner följande samband:

$$W = C_p (T_2 - T_1)$$

$$T_2 = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\left( \frac{1}{\gamma} \right)} T_1$$

$$W = C_p T_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\left( \frac{1}{\gamma} \right)} - 1 \right]$$

Genom att jämföra de två uttrycken för  $W$  får vi en ekvation ur vilken det obekanta trycket  $p_2$  kan beräknas:

$$T_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)} - 1 \right] = T_3 \left[ 1 - \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)} \right]$$

$$\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)} = 1 + \frac{T_3}{T_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)} \right]$$

$$p_2 = p_1 \left\{ 1 + \frac{T_3}{T_1} \left[ 1 - \left( \frac{p_4}{p_3} \right)^{\left( \frac{1-\gamma}{\gamma} \right)} \right] \right\}^{\gamma/(\gamma-1)}$$

För luft gäller att  $\gamma = 1,40$ . Övriga siffrvärden:  $p_1 = p_4 = 100$  kPa,  $p_3 = 170$  kPa,  $T_1 = 303$  K,  $T_3 = 923$  K. Insättning ger resultatet  $p_2 = 348$  kPa.

Svar: 348 kPa

### Uppgift 6

Utskriven lösning saknas. Notera analogin med det paramagnetiska spinsystemet i kapitel 3 i kursboken!

Svar

$$(a) S(N, n_+) = k [ N \ln N - (N - n_+) \ln (N - n_+) - n_+ \ln n_+ ]$$

$$(b) \tau(N, T, n_+) = \frac{kT}{2l} \ln \left( \frac{n_+}{N - n_+} \right)$$

$$(c) L = Nl \tanh \left( \frac{l\tau}{kT} \right)$$

I gränsen  $kT \gg l\tau$  ger detta Hookes lag, d.v.s. att förlängningen blir proportionell mot

$$\text{spännkraften: } L = \frac{Nl^2}{kT} \tau$$

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Torsdagen den 15 april 2004 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

**Examinatorer:** Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med ”Allmänna relationer för enkomponentsystem” och ”Kanonisk fördelning” (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Varje uppgift ger högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast onsdagen den 28 april.

**Rättningsgranskning:** Torsdagen den 29 april kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

1. En enkel tillståndsekvation för ett fast ämne kan se ut så här:

$$V = V_0 [1 + \beta(T - T_0) - \kappa(p - p_0)]$$

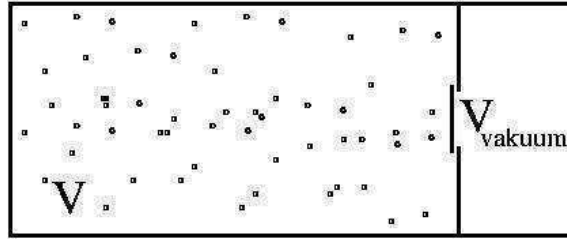
Här är  $V_0$  ämnets volym i ett visst referenstillstånd med trycket  $p_0$  och temperaturen  $T_0$ . Konstanterna  $\beta$  och  $\kappa$  är volymutvidgningskoefficienten respektive kompressibiliteten i referenstillståndet. Som exempel väljer vi ett stycke koppar med volymen  $V_0 = 1,00 \text{ dm}^3$  vid temperaturen  $T_0 = 300 \text{ K}$  och trycket  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ . Då gäller att  $\beta = 50 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  och  $\kappa = 7,1 \cdot 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$ .

- (a) Hur stort tryck krävs för att vid temperaturen  $T_0$  isotermiskt komprimera kopparstycket så att volymen minskar med 1 %?  
(b) Beräkna det arbete som uträttas på kopparstycket vid kompressionen!  
(c) Beräkna entropiändringen hos kopparstycket vid kompressionen!

Tips: Den sista deluppgiften löses enklast med hjälp av en lämpligt vald maxwell-relation.

2. Anta att du har en icke-relativistisk ideal gas som existerar i en två-dimensionell värld. Vad är då hastighetsfördelningen,  $P(v)$ , för denna gas? Ge en grafisk representation av  $P(v)$ . Vilken hastighetsvektor är mest sannolik och vilken är den mest sannolika hastigheten? Ge ett utförligt svar där detaljerna i ditt resonemang klart framgår.

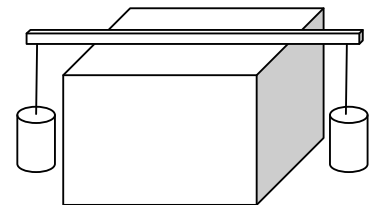
3. Heliumgas vid 300 K och vid normalt tryck fyller upp en volym  $V$ .



Volymen  $V$  står via en öppningsbar lucka i kontakt med en tom volym,  $V_{\text{vakuum}}$ . Luckan är till att börja med stängd. Volymen  $V$  är 1,4 liter och  $V_{\text{vakuum}} = 0,2 \text{ V}$ .

- (a) Hur många heliumatomer finns det i volymen  $V$ ?
- (b) Öppna luckan och låt gasen expandera ut i  $V_{\text{vakuum}}$ . Hur har statistiska vikten  $\Omega$  ändrats då jämvikt åter uppnåtts? Vilken är förändringen i gasens entropi?
- (c) Om vi inte öppnar luckan, hur skall vi då göra för att få samma entropiändring? Ge både ett kvalitativt och ett kvantitativt svar.
4. En vattenkyld värmemotor är försedd med ett reglersystem som håller kylvattnet vid den konstanta temperaturen  $70^\circ\text{C}$ . För att systemet skall fungera får den värmeeffekt som motorn avger till kylvattnet inte överstiga 25 kW. Vilken är den högsta arbetseffekt som motorn kan tänkas leverera, om dess drivmedel avger värme vid temperaturen  $950^\circ\text{C}$ ?

5. Två lika vikter hänger i ändarna av en lätt stång som ligger tvärs över ett isblock. Stången har bredden 2 mm, och längden av den del som är i kontakt med isen är 25 cm. Trycket i omgivningen är 100 kPa och isens temperatur är  $-2^\circ\text{C}$ . Hur stor massa skall vardera vikten ha för att isen under stången skall smälta så att stången så småningom gräver sig ner genom isblocket?



Isens densitet vid den aktuella temperaturen är  $917 \text{ kg/m}^3$  och densiteten för vatten vid samma temperatur är  $1000 \text{ kg/m}^3$ . Smältentalpiteten för is är  $333 \text{ kJ/kg}$ .

6. En Isingmodell har två spinn med växelverkansenergin  $U = -\epsilon s_1 \cdot s_2$ . Ange alla tillstånd samt deras Boltzmann-faktorer. Beräkna systemets partitionsfunktion. Vad är sannolikheten att spinnen är parallella respektive anti-parallella? Rita en graf för dessa sannolikheter som funktion av  $\epsilon/kT$ . Beräkna och visualisera även systemets medelenergi. Vid vilken temperatur, given i enheten  $\epsilon/k$ , blir det mer sannolikt att båda spinnen pekar upp än att bara ett spinn gör det?

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2004-04-15**

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 28 april.

**Rättningsgranskning:** Torsdagen den 29 april kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

**Lösningar**

**Uppgift 1**

(a) Om temperaturen hålls konstant gäller att

$$V = V_0 [1 - \kappa(p - p_0)]$$

vilket ger

$$p = p_0 + \frac{V_0 - V}{\kappa V_0} = 100 \cdot 10^3 + \frac{0,01}{7,1 \cdot 10^{-12}} \text{ Pa} = 1,41 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

(b) Det utträttade arbetet är

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_0}^V p dV = - \int_{V_0}^V \left( p_0 + \frac{V_0 - V}{\kappa V_0} \right) dV = - p_0 (V - V_0) + \frac{(V_0 - V)^2}{2\kappa V_0} \\ &= -0,01 p_0 V_0 + \frac{0,01^2 V_0}{2\kappa} = \left( \frac{0,01^2}{2\kappa} - 0,01 p_0 \right) V_0 \\ &= \left( \frac{0,01^2}{2 \cdot 7,1 \cdot 10^{-12}} - 0,01 \cdot 10^5 \right) \cdot 10^{-3} \text{ J} = 7,04 \text{ kJ} \end{aligned}$$

(c) Den maxwellrelation som är lämplig i detta fall är

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Ur tillståndsekvationen följer att

$$\left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{\beta}{\kappa}$$

Vi finner alltså att

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{V_0}^V \frac{\beta}{\kappa} dV = \frac{\beta}{\kappa} (V - V_0) = - \frac{V_0 - V}{V_0} \cdot \frac{\beta V_0}{\kappa} \\ &= -0,01 \cdot \frac{50 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3}}{7,1 \cdot 10^{-12}} \text{ J/K} = 70,4 \text{ J/K} \end{aligned}$$

**Svar:** (a) 1,4 GPa, (b) 7,0 kJ, (c) 70 J/K



## Uppgift 2

Sannolikheten för att en partikel med massan  $m$  vid temperaturen  $T$  skall ha en fart mellan  $v$  och  $v+dv$  kan skrivas som  $P(v)dv$ , där  $P(v)$  har formen

$$P(v) = f(v)e^{-mv^2/2k_B T}$$

d.v.s. boltzmannfaktorn multiplicerad med tillståndstätheten  $f(v)$  i  $v$ -rummet. I tre dimensioner är  $f(v)$  proportionell mot ytan av en sfär med radien  $v$  i det tredimensionella hastighetsrummet, d.v.s.  $4\pi v^2$ . Detta ger den vanliga Maxwellfördelningen. I två dimensioner blir  $f(v)$  i stället proportionell mot omkretsen av en cirkel med radien  $v$ , d.v.s.  $2\pi v$ . Vi kan då skriva

$$P(v) = Cve^{-mv^2/2k_B T}$$

där  $C$  är en konstant. Denna kan bestämmas ur normeringsvillkoret

$$\int_0^{\infty} P(v)dv = 1$$

vilket ger

$$C \int_0^{\infty} ve^{-mv^2/2k_B T} dv = C \left( \frac{2k_B T}{m} \right) \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx = C \left( \frac{2k_B T}{m} \right) \frac{1}{2} = 1$$

$$C = \frac{m}{k_B T}$$

Den mest sannolika farten  $v_m$  bestäms av att  $P(v)$  skall vara maximal. Villkoret att derivatan av  $P(v)$  skall vara noll för  $v = v_m$  ger

$$e^{-mv_m^2/2k_B T} - \frac{mv_m^2}{k_B T} e^{-mv_m^2/2k_B T} = 0$$

$$v_m = \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

Den mest sannolika hastighetsvektorn bestäms däremot inte av maximum i  $P(v)$  utan enbart av att boltzmannfaktorn skall vara maximal. Därav följer att den mest sannolika hastigheten är noll.

Svar: Hastighetsfördelningen bestäms av funktionen  $P(v) = \frac{mv}{k_B T} e^{-mv^2/2k_B T}$ . Den mest

sannolika hastigheten är noll, men den mest sannolika farten är  $\sqrt{\frac{k_B T}{m}}$

## Uppgift 3

(a) Helium vid normalt tryck och normal temperatur kan med mycket god approximation betraktas som en ideal gas. Ideala gaslagen ger att antalet atomer är

$$N = \frac{pV}{k_B T} = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 1,4 \cdot 10^{-3}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 3,42 \cdot 10^{22}$$

(b) Vid expansionen tillförs ingen energi, varken i form av arbete eller värme. För en idela gas innebär det att gasens temperatur inte ändras. Ändringen i antalet tillgängliga mikrotillstånd, d.v.s. den statistiska vikten  $\Omega$ , bestäms då enbart av ändringen i volym. Eftersom antalet tillgängliga mikrotillstånd för varje enskild atom är proportionellt mot den tillgängliga volymen gäller att förhållandet mellan den statistiska vikten  $\Omega_f$  i sluttillståndet och den statistiska vikten  $\Omega_i$  i begynnelsestillståndet är

$$\frac{\Omega_f}{\Omega_i} = \left( \frac{V + V_{\text{vacuum}}}{V} \right)^N = 1,2^{3,42 \cdot 10^{21}} = 10^{2,71 \cdot 10^{21}}$$

Detta är ett ofattbart stort tal, vilket innebär att sannolikheten för att gasen spontant skall återvända till begynnelsestillståndet i praktiken är helt obefintlig. Makroskopiska processer är enkelriktade.

Entropiändringen är

$$\begin{aligned} \Delta S &= k_B \ln \Omega_f - k_B \ln \Omega_i = k_B \ln \frac{\Omega_f}{\Omega_i} \\ &= 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 3,42 \cdot 10^{22} \cdot \ln 1,2 \text{ J/K} = 0,086 \text{ J/K} \end{aligned}$$

(c) Vi kan öka entropin genom att värma upp gasen. Entropiökningen vid uppvärmning från en begynnelsestemperatur  $T_i$  till en sluttemperatur  $T_f$  är

$$\Delta S = \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_V}{T} dT$$

där värmekapaciteten  $C_V$  i detta fall är  $3Nk_B/2$ . Härur fås

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_{T_i}^{T_f} \frac{C_V}{T} dT = \frac{3}{2} Nk_B \ln \frac{T_f}{T_i} = k_B \ln \frac{\Omega_f}{\Omega_i} = Nk_B \ln 1,2 \\ T_f &= 1,2^{2/3} T_i = 1,2^{2/3} \cdot 300 \text{ K} = 339 \text{ K} \end{aligned}$$

Gasens temperatur skall alltså höjas med 39 K för att entropiändringen skall bli densamma som vid expansionen. Den värmeförsel som krävs är

$$Q = C_V (T_f - T_i) = \frac{3}{2} Nk_B (T_f - T_i) = 1,5 \cdot 3,42 \cdot 10^{22} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 39 \text{ J} = 27,6 \text{ J}$$

Svar: (a)  $3,42 \cdot 10^{22}$  atomer, (b) Den statistisk vikten ökar med faktorn  $10^{2,71 \cdot 10^{21}}$  och entropin ökar med 0,086 J/K, (c) Man kan åstadkomma samma entropiändring genom att tillföra 27,6 J värme.

#### Uppgift 4

Beteckningar:

$$T_H = \text{värmekällans temperatur} = (950 + 273) \text{ K} = 1223 \text{ K}$$

$$T_L = \text{kylvattnets temperatur} = (70 + 273) \text{ K} = 343 \text{ K}$$

$$q_{in} = \text{tillförd värmeeffekt från drivmedlet}$$

$$q_{ut} = \text{till kylvattnet avgiven värmeeffekt} = 25 \text{ kW}$$

$$w_{ut} = \text{av motorn levererad arbetseffekt.}$$

Den högsta möjliga effekten får man om motorn fungerar som en carnotmaskin. Då gäller att

$$\frac{q_{in}}{T_H} = \frac{q_{ut}}{T_L}$$

Den avlevererade effekten fås ur första huvudsatsen:

$$w_{ut} = q_{in} - q_{ut} = \left( \frac{q_{in}}{q_{ut}} - 1 \right) q_{ut} = \left( \frac{T_H}{T_L} - 1 \right) q_{ut} = \left( \frac{1223}{343} - 1 \right) \cdot 25 = 64 \text{ kW}$$

Svar: 64 kW

## Uppgift 5

Villkoret är att isen under stängen skall smälta, d.v.s. att övertrycket  $\Delta p$  under stängen är så stort att det ger en fryspunktsnedsättning  $\Delta T = -2$  K. Sambandet mellan trycket  $p$  och smälttemperaturen  $T$  ges av Clausius-Clapeyrons ekvation,

$$\frac{dp}{dT} = \frac{l}{T(v_2 - v_1)}$$

där  $l$  är smältenetalpiteten,  $v_2$  är specifika volymen (= inversa densiteten) för vatten och  $v_1$  är specifika volymen för is. Dessa kan antas vara konstanta i det aktuella intervallet, vilket ger

$$\Delta p = \frac{l}{T(v_2 - v_1)} \Delta T$$

Övertrycket beror på vikernas massor och stängens dimensioner enligt formeln

$$\Delta p = \frac{2mg}{BL}$$

där  $m$  är massan hos vardera vikten,  $L$  är stängens längd (den del som är i kontakt med isen) och  $B$  är stängens bredd. Ur dessa ekvationer kan  $m$  bestämmas:

$$m = \frac{BL}{2g} \Delta p = \frac{BL\Delta T}{2gT(v_2 - v_1)} = \frac{0,002 \cdot 0,25 \cdot 333 \cdot 10^3 \cdot (-2)}{2 \cdot 9,8 \cdot 271 \cdot \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{917}\right)} \text{ kg} = 692 \text{ kg}$$

*Anmärkning:* Det sägs ibland att skridskor glider lätt på isen därför att trycket under skridskorna smälter isen. Resultatet ovan antyder att det påståendet knappast kan vara hela sanningen. Det krävs som synes mycket stora tyngder för att smälta isen. Skulle temperaturen dessutom råka vara t.ex.  $-20^\circ\text{C}$  i stället för  $-2^\circ\text{C}$  krävs en tio gånger större tyngd.

Svar: 0,7 ton

## Uppgift 6

Vi förutsätter att spinnen har längden 1 och bara kan peka ”upp” eller ”ner”. Produkten  $s_1 \cdot s_2$  bara kan då bara anta värdena +1 (parallella spinn) och -1 (antiparallella spinn). Vi får fyra möjliga tillstånd som vi symboliskt kan beteckna med  $\uparrow\uparrow$ ,  $\uparrow\downarrow$ ,  $\downarrow\uparrow$  och  $\downarrow\downarrow$ . Boltzmannfaktorerna för dessa tillstånd blir följande:

$$\uparrow\uparrow: e^{\varepsilon/kT} \quad \uparrow\downarrow: e^{-\varepsilon/kT} \quad \downarrow\uparrow: e^{-\varepsilon/kT} \quad \downarrow\downarrow: e^{\varepsilon/kT}$$

Tillståndssumman (=partitionsfunktionen) är alltså

$$Z = 2e^{\varepsilon/kT} + 2e^{-\varepsilon/kT} = 4 \cosh\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

Sannolikheterna för de fyra olika tillstånden är följande:

$$P_{\uparrow\uparrow} = P_{\downarrow\downarrow} = \frac{e^{\varepsilon/kT}}{2e^{\varepsilon/kT} + 2e^{-\varepsilon/kT}} = \frac{1}{2(1 + e^{-2\varepsilon/kT})}$$

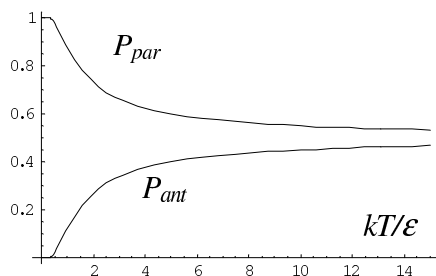
$$P_{\uparrow\downarrow} = P_{\downarrow\uparrow} = \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{2e^{\varepsilon/kT} + 2e^{-\varepsilon/kT}} = \frac{1}{2(1 + e^{2\varepsilon/kT})}$$

Sannolikheterna för parallella respektive antiparallella spinn är

$$P_{par} = P_{\uparrow\uparrow} + P_{\downarrow\downarrow} = \frac{1}{1 + e^{-2\varepsilon/kT}}$$

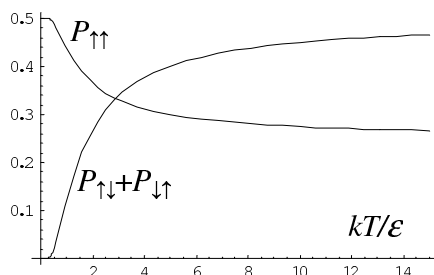
$$P_{ant} = P_{\uparrow\downarrow} + P_{\downarrow\uparrow} = \frac{1}{1 + e^{2\varepsilon/kT}}$$

Dessa funktioner illustreras i nedanstående diagram.



Vid höga temperaturer blir alla tillstånd lika sannolika. I lågtemperaturgränsen går sannolikheten för de antiparallella tillstånden mot noll.

Vid låga temperaturer är  $P_{\uparrow\uparrow}$  alltså större än  $P_{\uparrow\downarrow} + P_{\downarrow\uparrow}$ , d.v.s. det är sannolikare att båda spinnen pekar upp än att bara ett gör det. Vid höga temperaturer gäller det motsatta. Detta illustreras i nedanstående diagram.



Den temperatur då dessa båda sannolikheter är lika stora kan beräknas ur ekvationen  $P_{\uparrow\uparrow} = P_{\uparrow\downarrow} + P_{\downarrow\uparrow}$ . Med lite eftertanke inser man att när detta inträffar måste det gälla att  $P_{\uparrow\downarrow} + P_{\downarrow\uparrow} = 1/3$  och  $P_{\uparrow\uparrow} = P_{\downarrow\downarrow} = 1/3$ . Härur fås

$$\frac{1}{1 + e^{2\epsilon/kT}} = \frac{1}{3}$$

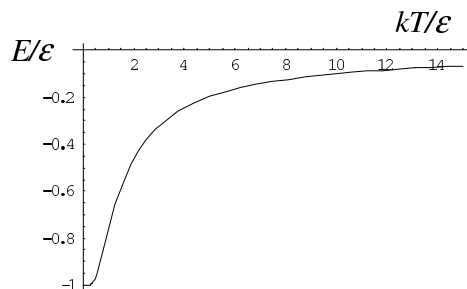
vilket ger

$$T = \frac{2\epsilon}{k \ln 2} = 2,89 \frac{\epsilon}{k}$$

Medelenergin är

$$E = \frac{2(-\epsilon)e^{\epsilon/kT} + 2\epsilon e^{-\epsilon/kT}}{2e^{\epsilon/kT} + 2e^{-\epsilon/kT}} = -\epsilon \tanh\left(\frac{\epsilon}{kT}\right)$$

Dess temperaturberoende illustreras i nedanstående diagram.



Energien är  $-\epsilon$  vid  $T = 0$  och går mot noll vid höga temperaturer.

Svar: Tillståndssumman är  $Z = 4 \cosh\left(\frac{\mathcal{E}}{kT}\right)$ . Sannolikheten för parallella spinn är

$$P_{par} = \frac{1}{1 + e^{-2\mathcal{E}/kT}} \text{ och sannolikheten för antparallella spinn är } P_{ant} = \frac{1}{1 + e^{2\mathcal{E}/kT}}.$$

Medelenergin är  $E = -\mathcal{E} \tanh\left(\frac{\mathcal{E}}{kT}\right)$ . Vid temperaturer lägre än  $2,89 \frac{\mathcal{E}}{k}$  blir det mer sannolikt att båda spinnen pekar upp än att bara ett spinn gör det.

.

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Onsdagen den 17 december 2003 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

**Examinatorer:** Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

**Hjälpmedel:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk fördelning" (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

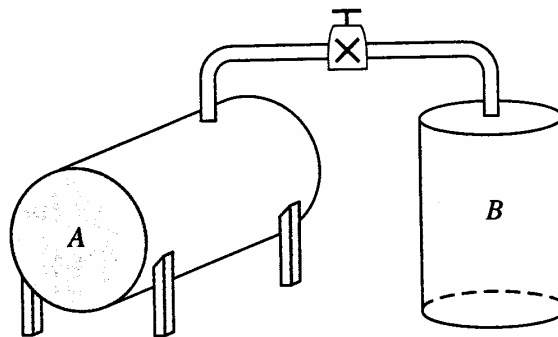
**Bedömning:** Varje uppgift ger högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 9 januari.

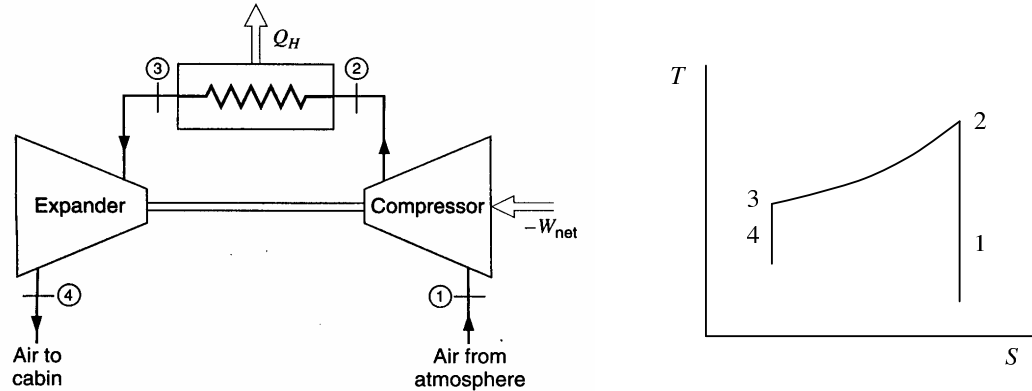
**Rättningsgranskning:** Måndagen den 19 januari kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

1. En tank A med volymen  $0,50 \text{ m}^3$  innehåller kvävgas med temperaturen  $127^\circ\text{C}$  och trycket  $600 \text{ kPa}$ . Genom ett rör är tanken ansluten till en annan lika stor tank B, som till att börja med är tom. En kran i röret öppnas så att kvävgasen fördelar sig likformigt i båda tankarna. Båda tankarna är försedda med isolerande väggar, så att ingen nämnvärd värme överförs från omgivningen.



- (a) Vilken eller vilka av följande tillståndsfunktioner ändras inte under processen: inre energi, entalpin, Helmholtz fria energi, Gibbs fria energi? Svaret måste motiveras.
- (b) Entropin ökar under processen. Varför?
- (c) Beräkna entropiökningen under förutsättning att kvävgasen kan behandlas som en ideal gas!

2. Figuren illustrerar en vanlig princip för luftkonditionering i flygplan. Antag att luften i omgivningen har trycket 30 kPa och temperaturen  $-35\text{ }^{\circ}\text{C}$ , att den i kompressorn komprimeras till trycket 200 kPa och att den när den kommer in i kabinen har trycket 100 kPa och temperaturen  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Beräkna dels det arbete  $W_{net}$  som krävs för att driva systemet, dels den värme  $Q_H$  som bortgår i kylaren (per kg luft). Den bifogade tabellen över termodynamiska egenskaper för luft kan användas, men det är också OK att lösa problemet genom att behandla luften som en ideal gas med  $C_p/C_V = 1,4$ .



3. De flesta känner nog till att grafit och diamant är två olika former av ett och samma ämne, nämligen kol. Det är också tämligen välkänt att grafit kan omvandlas till diamant vid mycket höga tryck. Vi skall här undersöka förutsättningarna för detta. I nedanstående tabell finns värden på tre olika termodynamiska storheter för grafit respektive diamant: Gibbs fria energi  $g$  per mol, specifika volymen  $v$  och isotermska kompressibiliteten  $\kappa_T$ . Alla värdena gäller vid temperaturen  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  och trycket 100 kPa.

	Graphite	Diamond
$g$	0	2867,8 J/mol
$v$	$444 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{kg}$	$284 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{kg}$
$\kappa_T$	$304 \cdot 10^{-15} \text{ Pa}^{-1}$	$16 \cdot 10^{-15} \text{ Pa}^{-1}$

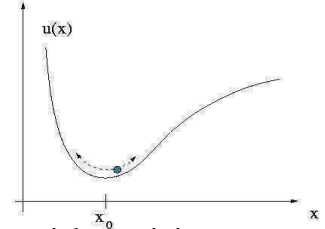
- (a) Med utgångspunkt från tabellen väntar man sig att grafit skall vara den stabila formen av kol vid rumstemperatur och atmosfärstryck. Varför?
- (b) Anta nu att vi håller temperaturen konstant vid  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  och successivt ökar trycket. Då komprimeras både grafit och diamant, d.v.s. deras specifika volymer minskar, men olika mycket. Bestäm specifika volymen som funktion av trycket för grafit respektive diamant under antagandet att kompressibiliteterna förblir konstanta!
- (c) Använd resultatet i deluppgift b för att bestämma Gibbs fria energi som funktion av trycket för grafit respektive diamant!
- (d) Skriv ner en ekvation som bestämmer hur högt tryck man måste applicera för att omvandla grafit till diamant! Lös ekvationen approximativt utgående från att kompressibiliteterna är små!
- (e) I deluppgift a konstaterade vi att grafit bör vara den stabila formen vid atmosfärstryck, men det är ett obestridligt faktum att diamanter existerar, och ingen oroar sig för att de plötsligt skall omvandlas till grafit. Kan du komma på någon förklaring?

4. Ge en beskrivning av vad som bestämmer en fast kropps värmekapacitet med början vid höga temperaturer och successivt sedan mot lägre temperaturer tills du når metallers värmekapacitet vid riktigt låga temperaturer. Viktigt är att ge en kort redovisning för varför  $c_v(T)$ , har det  $T$ -beroende det har i varje regim. Gör gärna en historisk reflektion över förståelsen av  $c_v(T)$ .

5. En partikel rör sig i en endimensionell potential  $u(x)$  och har energin  $E(p,x) = p^2/2m + u(x)$ . Partikeln är i termisk jämvikt med en reservoar med temperaturen  $T$ .

(a) Visa att partikelns medelposition  $\langle x \rangle$  ges av

$$\langle x \rangle = \frac{\int x e^{-\beta u(x)} dx}{\int e^{-\beta u(x)} dx}$$



(b) Om temperaturen är låg befinner sig partikeln mest kring potentialens minima,  $x_0$ . I detta fall kan vi serieutveckla potentialen kring  $x_0$ ,

$$u(x) = u(x_0) + (x - x_0)u'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 u''(x_0) + \frac{1}{6}(x - x_0)^3 u'''(x_0) + \dots$$

Visa nu att linjära termen måste vara noll, och att om du bara håller kvadratiska termen får du  $\langle x \rangle = x_0$ .

(c) Värmeutvidgningskoefficienten definieras som  $\alpha = (\partial \langle x \rangle / \partial T) / \langle x \rangle$ . Det är först då den kubiska termen tas med som medelpositionen beror av  $T$  och  $\alpha$  blir skild från noll. Beräkna  $\alpha$  under antagandet att kubiska termen är liten.

(d) I en ädelgas approximeras potentialen av en Lennard-Jones-potential

$$u(x) = u_0 \left[ \left( \frac{x_0}{x} \right)^{12} - 2 \left( \frac{x_0}{x} \right)^6 \right]$$

och för argon är  $u_0 = 0.010$  eV och  $x_0 = 3.9$  Å. Vad är då värmeutvidgningskoefficienten enligt dina beräkningar? Det uppmätta värdet för  $\alpha_{\text{argon}} = 0.0007$  K<sup>-1</sup>. Hur bra är approximationen du gjort?

6. Vita dvärgar är ett slutstadium för mindre stjärnor som har ungefär vår sols massa då de kollapsat till att ha ungefär jordens radie. Det som håller vita dvärgar stabila är en balans mellan gravitationskraften och en degenererad elektrongas tryck.

(a) Gör en uppskattning av gravitationsenergin där du antar att massan är uniformt fördelad med täthet  $\rho$  på totala volymen. (Resultatet skall gå som  $1/R$ , där  $R$  är radien för den vita dvärgen)

(b) Uppskatta kinetiska energin om du antar att stjärnan har en proton och en neutron per elektron samt att elektronerna är icke-relativistiska.

(c) Finn minimum för totala energin och bestäm därmed jämviktsradien för den vita dvärgen som funktion av massan. Vad händer med radien om massan ökar och hur förklarar du det?

(d) Temperaturen hos en typisk vit dvärg är 10 000–30 000 K. Vad är Fermitemperaturen  $T_F$  för en vit dvärg med solens massa  $2 \cdot 10^{30}$  kg? Är det korrekt att anta att elektrongasen är degenererad?



## Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2003-12-17

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 9 januari.

**Rättningsgranskning:** Måndagen den 19 januari kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

## Lösningar

### Uppgift 1

(a) Den enda tillståndsfunktion som säkert förblir oförändrad är inre energin. Att den inte kan ändras följer ur första huvudsatsen. Ingen energi tillförs till systemet, varken i form av värme eller i form av arbete. Övriga tillståndsfunktioner ändras i allmänhet (för ideala gaser gäller dock att även entalpin förblir konstant).

(b) Genom att den tillgängliga volymen ökar så ökar antalet tillgängliga mikrotillstånd och därmed entropin. Ett annat sätt att argumentera är att detta är en irreversibel process. Irreversibla processer i isolerade system går alltid i sådan riktning att entropin ökar.

(c) Entropin för en ideal gas kan skrivas som

$$S(T, V) = S(T_0, V_0) + nC_V \ln \frac{T}{T_0} + nR \ln \frac{V}{V_0}$$

där  $(T_0, V_0)$  representerar ett godtyckligt valt referenstillstånd som vi kan låta vara begynnelsestillståndet i det här problemet. För en ideal gas gäller att energin bara beror av temperaturen. I det här fallet ändras inte energin, och därför ändras inte heller temperaturen. Alltså är  $T = T_0$ . Ur ideala gaslagen följer att

$$nR = \frac{p_0 V_0}{T_0}$$

Med  $V = 2V_0$  finner vi att

$$S(T, V) - S(T_0, V_0) = \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \frac{V}{V_0} = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot \ln 2}{400} \text{ J/K} = 520 \text{ J/K}$$

Svar: (a) Inre energin, (b) Antalet tillgängliga tillstånd ökar, (c) 520 J/K

### Uppgift 2

Vid öppna processer av det här slaget är värmeutbyte och nyttoarbete direkt relaterat till ändringar i entalpin  $H$ . För varje komponent (kompressor, kylare, expander) gäller att

$$\Delta H = Q - W_t$$

där  $\Delta H$  är skillnaden mellan gasens entalpier på utgångssidan och ingångssidan,  $Q$  är den tillförda värmen och  $W_t$  är det "tekniskt utvinnbara arbetet". För en turbin är  $W_t$  positivt och för en pump eller kompressor är det negativt. Vad vi behöver göra är alltså att ta reda på gasens specifika entalpi  $h$  i tillstånden 1, 2, 3 och 4.

Tillståndet 1 (begynnelsestillståndet hos den inkommande luften):

$$p_1 = 30 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$T_1 = -35^\circ\text{C} = 238 \text{ K}$$

$$h_1 = 220,22 + \frac{18}{20}(240,27 - 220,22) \text{ kJ/kg} = 238 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Värdet på  $h_1$  är framräknat genom interpolation i tabellen men kan också erhållas ur relationen  $h = c_p T$ , där  $c_p$  hämtas ur tabell eller beräknas ur statistisk mekanik för tvåatomiga ideala gaser.

Tillståndet 4 (sluttillståndet hos den utströmmande luften):

$$P_4 = 100 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$T_4 = 18^\circ\text{C} = 291 \text{ K}$$

$$h_4 = 290,43 + \frac{1}{20}(300,47 - 290,43) \text{ kJ/kg} = 291 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Värdet på  $h_2$  är framräknat på samma sätt som  $h_1$ .

Tillståndet 2 (mellan kompressorn och kylaren):

$$p_2 = 200 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 238 \cdot \left( \frac{200}{30} \right)^{0,4/1,4} \text{ K} = 409 \text{ K}$$

$$h_2 = 401,30 + \frac{9}{20}(421,59 - 401,30) \text{ kJ/kg} = 410 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Temperaturen  $T_2$  erhöles ur villkoret att processen i kompressorn är adiabatisk, och  $h_2$  räknades sedan fram genom interpolation i tabellen.

Tillståndet 3 (mellan kylaren och expandern):

$$p_3 = 200 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$T_3 = T_4 \left( \frac{p_3}{p_4} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 291 \cdot \left( \frac{200}{100} \right)^{0,4/1,4} \text{ K} = 355 \text{ K}$$

$$h_3 = 340,70 + \frac{15}{20}(360,86 - 340,70) \text{ kJ/kg} = 356 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$$

Temperaturen  $T_3$  erhöles ur villkoret att processen i expandern är adiabatisk, och  $h_3$  räknades sedan fram genom interpolation i tabellen.

Arbete som krävs för att driva kompressorn:  $w_{com} = h_2 - h_1 = 172 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

Arbete som återvinns i expandern:  $w_{exp} = h_3 - h_4 = 65 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

Nettoarbete som måste tillföras:  $w_{net} = w_{com} - w_{exp} = 107 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

Avgiven värme i kylaren:  $q_H = h_2 - h_3 = 54 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$

Svar: Det krävs 107 kJ/kg för att driva systemet. Den i kylaren avgivna värmen är 54 kJ/kg.

### Uppgift 3

(a) Om temperatur och tryck hålls konstanta bestäms jämviktstillståndet av att Gibbs fria energi skall vara minimal. Eftersom värdet på  $g$  är lägre för grafit än för diamant är grafit den stabila formen.

(b) Kompressibiliteten definieras av uttrycket

$$\kappa_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T$$

vilket innebär att sambandet mellan tryck och volym vid konstant temperatur bestäms av differentialekvationen

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dp} = -\kappa_T$$

Vi låter i fortsättningen  $p_0$  och  $v_0$  beteckna atmosfärstrycket respektive specifika volymen vid atmosfärstryck. Integration ger

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\kappa_T (p - p_0)$$

$$v = v_0 e^{-\kappa_T (p - p_0)}$$

Vi noterar att volymen minskar betydligt snabbare för grafit än för diamant, eftersom kompressibiliteten för grafit är ungefär 20 gånger större än för diamant.

(c) Ur definitionen av Gibbs fria energi följer att

$$\left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)_T = v$$

Vid konstant temperatur gäller alltså att

$$g = g_0 + \int_{p_0}^p v dp = g_0 + v_0 \int_{p_0}^p e^{-\kappa_T (p - p_0)} dp = g_0 + \frac{v_0}{\kappa_T} \left[ 1 - e^{-\kappa_T (p - p_0)} \right]$$

där  $g_0$  är Gibbs fria energi vid trycket  $p_0$ .

(d) För att hålla isär grafit och diamant hänger vi på ett index  $g$  respektive  $d$ . Alltså:

$$g_g = g_{0g} + \frac{v_{0g}}{\kappa_{Tg}} \left[ 1 - e^{-\kappa_{Tg} (p - p_0)} \right]$$

$$g_d = g_{0d} + \frac{v_{0d}}{\kappa_{Td}} \left[ 1 - e^{-\kappa_{Td} (p - p_0)} \right]$$

Jämvikt uppnås när  $g_g = g_d$ :

$$g_{0g} + \frac{v_{0g}}{\kappa_{Tg}} \left[ 1 - e^{-\kappa_{Tg} (p - p_0)} \right] = g_{0d} + \frac{v_{0d}}{\kappa_{Td}} \left[ 1 - e^{-\kappa_{Td} (p - p_0)} \right]$$

Härur kan  $p$  bestämmas, men ekvationen kan inte lösas exakt utan användning av någon numerisk metod. Vi kan emellertid göra en approximation utgående från att kompressibiliteterna är små:

$$e^{-\kappa_{Tg} (p - p_0)} = 1 - \kappa_{Tg} (p - p_0)$$

$$e^{-\kappa_{Td} (p - p_0)} = 1 - \kappa_{Td} (p - p_0)$$

Detta ger

$$g_{0g} + v_{0g} (p - p_0) = g_{0d} + v_{0d} (p - p_0)$$

$$p = p_0 + \frac{g_{0d} - g_{0g}}{v_{0g} - v_{0d}} = \left[ 100 \cdot 10^3 + \frac{2,8678 \cdot 10^3}{0,012 \cdot (444 \cdot 10^{-6} - 284 \cdot 10^{-6})} \right] \text{ Pa}$$

$$= 1,50 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

[Om man vill göra en bättre approximation kan man gå till kvadratiska termer i serieutvecklingen av exponentialfunktionerna:

$$e^{-\kappa_{Tg}(p-p_0)} = 1 - \kappa_{Tg}(p-p_0) + \frac{\kappa_{Tg}^2}{2}(p-p_0)^2$$

$$e^{-\kappa_{Td}(p-p_0)} = 1 - \kappa_{Td}(p-p_0) + \frac{\kappa_{Td}^2}{2}(p-p_0)^2$$

Detta leder till en andragradsekvation för trycket:

$$(p-p_0)^2 - \frac{2(v_{0g} - v_{0d})}{\kappa_{Tg}v_{0g} - \kappa_{Td}v_{0d}}(p-p_0) + \frac{2(g_{0d} - g_{0g})}{(\kappa_{Tg}v_{0g} - \kappa_{Td}v_{0d})} = 0$$

Löser man denna så finner man  $p = 1,50 \cdot 10^9$  Pa, vilket visar att den linjära approximationen var god nog.]

(e) Diamant vid atmosfärstryck är ett "metastabilt tillstånd". Det innebär att det finns en potentialbarriär som måste övervinnas om diamant skall omvandlas till den mera stabila formen grafit. Ju högre barriären är desto längre tid tar omvandlingen. I det här fallet handlar det om astronomiskt långa tider, åtminstone vid normala temperaturer. Om diamanter hettas upp till mycket höga temperaturer sker omvandlingen snabbare.

Svar: (a) Gibbs fria energi är lägst för grafit, (b)  $v = v_0 e^{-\kappa_T(p-p_0)}$ ,

(c)  $g = g_0 + \frac{v_0}{\kappa_T} [1 - e^{-\kappa_T(p-p_0)}]$ , (d) 1,50 GPa, (e) Det finns en potentialbarriär

#### Uppgift 4

Se kurslitteraturen.

#### Uppgift 5

(a) För ett system i kontakt med en värmereservoar vid konstant temperatur T gäller den kanoniska fördelningen, d.v.s. sannolikheten att finna systemet i ett tillstånd med energin  $E$  är proportionell mot Boltzmannfaktorn  $\exp(-\beta E)$ , där  $\beta = 1/kT$ . Alltså finner vi att

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^\infty x dx \int_{-\infty}^\infty dp \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m} - \beta u(x)\right)}{\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dp \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m} - \beta u(x)\right)}$$

Integralerna över  $p$  i täljare och nämnare tar ut varandra, så att resultatet blir

$$\langle x \rangle = \frac{\int_0^\infty x e^{-\beta u(x)} dx}{\int_0^\infty e^{-\beta u(x)} dx}$$

(b) För att förenkla skrivarbetet inför vi en dimensionslös variabel  $\delta$  som mått på avvikelser från jämviktstillståndet  $x_0$ :

$$x = (1 + \delta) x_0$$

$$\delta = \frac{x}{x_0} - 1$$

Potentialen kan då skrivas som  $u(x) = \Phi(\delta)$ , där

$$\Phi(\delta) = \Phi(0) + \Phi'(0)\delta + \frac{1}{2}\Phi''(0)\delta^2 + \frac{1}{6}\Phi'''(0)\delta^3 + \dots$$

Eftersom  $\delta=0$  svarar mot minimum i  $\Phi$  måste  $\Phi'(0)$  vara noll. Om vi försummar alla termer bortom den kvadratiske kan medelvärde på  $\delta$  beräknas enligt formeln

$$\langle \delta \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \delta e^{-\beta[\Phi(0) + \frac{1}{2}\Phi''(0)\delta^2]} d\delta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta[\Phi(0) + \frac{1}{2}\Phi''(0)\delta^2]} d\delta}$$

där vi satt den undre gränsen till  $-\infty$ , eftersom det i denna approximation inte finns någon hård kärna som hindrar partikeln att passera origo. Detta ger uppenbarligen resultatet  $\langle \delta \rangle = 0$ , eftersom integranden i täljaren är en udda funktion av  $\delta$ . Alltså gäller i denna approximation att  $\langle x \rangle = x_0$ , oberoende av temperaturen.

(c) Om vi tar med den kubiska termen men betraktar den som en liten störning kan vi skriva Boltzmannfaktorn som

$$e^{-\beta[\Phi(0) + \frac{1}{2}\Phi''(0)\delta^2 + \frac{1}{6}\Phi'''(0)\delta^3]} = e^{-\frac{\beta}{2}\Phi''(0)\delta^2} \left[ 1 - \frac{\beta}{6}\Phi'''(0)\delta^3 \right]$$

Detta ger följande uttryck för  $\langle \delta \rangle$  till lägsta ordningen i  $\Phi'''$ :

$$\begin{aligned} \langle \delta \rangle &= -\frac{\beta}{6}\Phi'''(0) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \delta^4 e^{-\frac{\beta}{2}\Phi''(0)\delta^2} d\delta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}\Phi''(0)\delta^2} d\delta} = -\frac{\beta}{6}\Phi'''(0) \left[ \frac{2}{\beta\Phi''(0)} \right]^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z^4 e^{-z^2} dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz} \\ &= -\frac{2\Phi'''(0)}{3\beta[\Phi''(0)]^2} \frac{3\sqrt{\pi}/4}{\sqrt{\pi}} = -\frac{\Phi'''(0)}{2\beta[\Phi''(0)]^2} \end{aligned}$$

Alltså finner vi att

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= x_0 - \frac{x_0\Phi'''(0)}{2\beta[\Phi''(0)]^2} = x_0 - \frac{x_0\Phi'''(0)kT}{2[\Phi''(0)]^2} \\ \alpha &= \frac{1}{\langle x \rangle} \frac{d\langle x \rangle}{dT} = -\frac{\Phi'''(0)k}{2[\Phi''(0)]^2 - \Phi'''(0)kT} \end{aligned}$$

(d) Med de beteckningar vi infört ovan får vi följande uttryck för Lennard-Jones-potentialen och dess derivator:

$$\begin{aligned} \Phi(\delta) &= u_0 \left[ \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{12} - 2 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^6 \right] & \Phi(0) &= -u_0 \\ \Phi'(\delta) &= 12u_0 \left[ -\left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{13} + \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^7 \right] & \Phi'(0) &= 0 \\ \Phi''(\delta) &= 12u_0 \left[ 13 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{14} - 7 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^8 \right] & \Phi''(0) &= 72u_0 \\ \Phi'''(\delta) &= 168u_0 \left[ -13 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^{15} + 4 \left( \frac{1}{1+\delta} \right)^9 \right] & \Phi'''(0) &= -1512u_0 \end{aligned}$$

Detta ger

$$\alpha = \frac{1512u_0k^2T}{2[72u_0]^2 + 1512u_0k^2T^2} = \frac{7k}{48u_0 \left( 1 + \frac{7k^2T^2}{48u_0^2} \right)}$$

Siffervärden:  $k = 1,38066 \cdot 10^{-23}$  J/K,  $u_0 = 0,010 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}$  J,  $T = 84$  K. Resultatet blir

$$\alpha = \frac{0,00126}{1+0,076} \text{ K}^{-1} = 0,00117 \text{ K}^{-1}$$

vilket är av rätt storleksordning men omkring 70 % högre än det uppmätta värdet. Siffran 0,076 i nämnaren ger en antydning om det numeriska fel vi gör genom serieutvecklingen av potentialen (denna term borde vi egentligen kasta bort eftersom vi redan försummat andra termer som kan väntas vara av samma storleksordning). Större delen av avvikelsen från det experimentella resultatet ligger alltså i själva modellen, vilket inte är någon överraskning. Det är tvärtom förvånansvärt att en så enkel modell landar så nära det uppmätta värdet.

Svar: 
$$\alpha = \frac{1}{\langle x \rangle} \frac{d \langle x \rangle}{dT} = - \frac{\Phi'''(0)k}{2[\Phi''(0)]^2 - \Phi'''(0)kT} = 0,0012 \text{ K}^{-1}$$

### Uppgift 6

(a) Den sammanlagda potentiella energin för gravitationskrafterna är

$$U = -\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \frac{G\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

där  $G$  är gravitationskonstanten,  $d^3\mathbf{r}_1$  och  $d^3\mathbf{r}_2$  är volymselement, och  $\rho(\mathbf{r})$  är densiteten i punkten  $\mathbf{r}$ . Integralen kan inte beräknas om man inte i detalj känner  $\rho(\mathbf{r})$ , men man kan göra en uppskattning om man noterar att avståndet  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  kan variera mellan 0 och  $2R$ , där  $R$  är stjärnans radie. Om vi ersätter  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  med mittvärdet  $R$  separeras de två volymintegralerna så att var och en av dem blir stjärnans totala massa  $M$ . Detta ger

$$U = -\frac{GM^2}{2R}$$

Om man gör det i och för sig ganska tvivelaktiga antagandet att densiteten  $\rho$  är konstant kan man ganska lätt genomföra integrationen exakt. Resultatet blir då

$$U = -\frac{3GM^2}{5R}$$

Vi använder i fortsättningen detta uttryck men håller i minnet att faktorn  $3/5$  inte får tas på alltför stort allvar.

(b) Stjärnans massa utgörs huvudsakligen av nukleoner. Antalet elektroner  $N$  antages vara hälften så stort som antalet nukleoner, vilket ger

$$N = \frac{M}{2m_p}$$

där  $m_p$  är massan hos en proton (vi försummar masskillnaden mellan protoner och neutroner). Den kinetiska energin  $K$  finns huvudsakligen hos elektronerna, som förutsätts bilda en degenererad fermigas. Det innebär att

$$K = \frac{3}{5} N \varepsilon_F = \frac{3N\hbar^2}{10m_e} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \frac{3M\hbar^2}{20m_p m_e} \left( \frac{9\pi M}{8m_p R^3} \right)^{2/3} = \frac{3^{7/3} \pi^{2/3} \hbar^2 M^{5/3}}{80m_e m_p^{5/3} R^2}$$

$$= 0,348 \frac{\hbar^2 M^{5/3}}{m_e m_p^{5/3} R^2}$$

där  $m_e$  är elektronmassan.

(c) Den totala energin blir

$$E = K + U = \frac{3^{7/3} \pi^{2/3} \hbar^2 M^{5/3}}{80m_e m_p^{5/3} R^2} - \frac{3GM^2}{5R}$$

Jämviktstillståndet bestäms av att  $E$  skall vara minimal. Den radie som svarar mot jämvikt finner vi alltså genom att derivera  $E$  med avseende på  $R$  och sätt derivatan lika med noll. Resultatet är

$$R = \frac{3^{4/3} \pi^{2/3} \hbar^2}{8m_e m_p^{5/3} GM^{1/3}} = 1,16 \frac{\hbar^2}{m_e m_p^{5/3} GM^{1/3}}$$

Om massan ökar minskar alltså radien. Det beror på att den negativa gravitationsenergin växer snabbare med massan än den positiva kinetiska energin. Det som hindrar stjärnan att kollapsa under gravitationens inverkan är elektrongasens tryck, men ju större massan är desto mer tar gravitationen över.

(d) Genom att sätta in siffrvärdena finner vi att solens radie som vit dvärg skulle bli  $R = 7,2 \cdot 10^6$  m. Antalet elektroner blir  $N = 6,0 \cdot 10^{56}$ , och fermitemperaturen blir

$$T_F = \frac{\hbar^2}{2km_e} \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2km_e} \left( \frac{9\pi N}{4R^3} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2km_e R^2} \left( \frac{9\pi N}{4} \right)^{2/3}$$

$$= 2,2 \cdot 10^9 \text{ K}$$

Stjärnans temperatur är av storleksordningen 104 K, d.v.s. mycket lägre än fermitemperaturen. Det är alltså en god approximation att betrakta elektronerna som degenererade.

Svar:

(a) Gravitationsenergin är cirka  $-\frac{3GM^2}{5R}$ ,

(b) Den kinetiska energin är cirka  $0,3 \frac{\hbar^2 M^{5/3}}{m_e m_p^{5/3} R^2}$ ,

(c) Radien blir cirka  $\frac{\hbar^2}{m_e m_p^{5/3} GM^{1/3}}$ ,

(d) Fermitemperaturen blir cirka  $2 \cdot 10^9$  K,

(e) Elektronerna är degenererade.

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Onsdagen den 27 augusti 2003 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

**Examinatorer:** Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

**Hjälpmedel för uppgifterna 1–6:** Inga.

**Hjälpmedel för uppgifterna 7–10:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med "Allmänna relationer för enkomponentsystem" och "Kanonisk fördelning" (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Uppgifterna 1–6 ger högst 2 poäng vardera och uppgifterna 7–10 högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter och duggor adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 8 september.

**Rättningsgranskning:** Onsdagen den 10 september kl. 12.00-13.00 i rum 7112B i Origohusets norra flygel (Göran Niklassons tjänsterum).

1. För alla gaser gäller att den isobariska värmekapaciteten  $C_p$  större än den isokoriska värmekapaciteten  $C_v$ . Ge en enkel fysikalisk förklaring till detta!
2. Att energin  $E$  är en viktig storhet i termodynamiken är väl uppenbart för alla, men man inför också ett antal andra energifunktioner som man kallar "termodynamiska potentialer". De vanligaste är  $F$ ,  $H$  och  $G$ :

$$F = E - TS$$

$$H = E + pV$$

$$G = E - TS + pV$$

Varför är det lämpligt att införa dessa tillståndsfunktioner? Förklara antingen genom ett allmänt resonemang eller genom att ge några exempel på tillämpningar där de termodynamiska potentialerna är praktiskt användbara.

3. En värmemotor är en apparat som tar in värme från en värmekälla, omvandlar en del av den till arbete och avlämnar återstoden till en kylare. Vad händer under processen med entropierna för värmekällan, kylaren och universum som helhet? Ange för vart och ett av dessa tre system om dess entropi ökar, minskar eller förblir konstant
  - (a) om processen i värmemotorn är en ideal carnotprocess?
  - (b) om processen är en ideal otto-process?

Att processerna är ideala innebär att alla delprocesser är reversibla och att alla sorters förluster (friktion, pumparbete m.m.) försummas. Observera att systemet "universum som helhet" inkluderar såväl värmekälla som kylare.

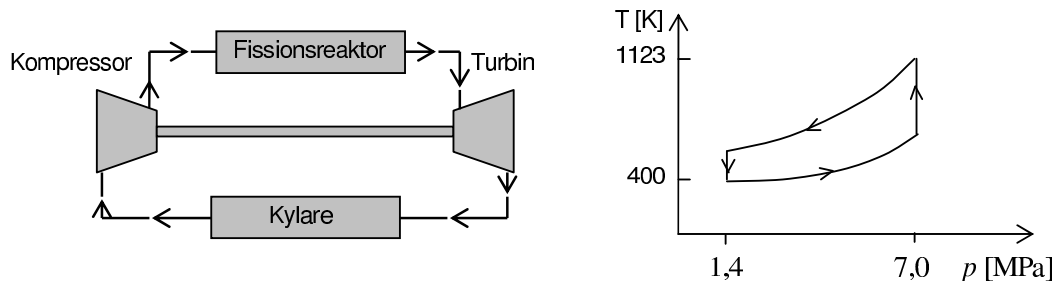


4. Kanonisk eller stor kanonisk ensemble? Redogör för vilka antaganden och variabler man har i respektive fall. Vilken koppling har de två ensemblerna till termodynamiken?
5. Värme kapacitet: Beskriv kort bidragen till en metalls värme kapacitet. Vilka är de karakteristiska temperaturer som avgör beteendet i ett givet temperatur intervall?
6. Bose-Einstein-kondensering: Utgående från fördelningen  $n(\epsilon)$  för en Bose-Einstein gas visa schematiskt hur man kan förstå fenomenet Bose-Einstein-kondensering.
7. I Göteborgs-Posten den 12 augusti 2003 kunde man läsa att den effekt som levererats av kärnkraftverket i Ringhals minskat med ungefär 50 MW per reaktor på grund av att havsvattnet är för varmt, så att kylningen blir mindre effektiv än normalt. Enligt Sigvard Hallberg på Ringhals fungerar systemet bäst när havsvattnets temperatur är omkring 7 °C.

Enligt uppgifter från Ringhals kan reaktorn R3 som mest ge effekten 915 MW. Vi antar att detta gäller då kylvattnets temperatur är 7°C. Ångans temperatur när den går in i turbinen uppges vara 279°C. Hur mycket minskar effekten om kylvattnets temperatur höjs till 20°C? Frågan kan naturligtvis inte besvaras exakt utan detaljerad kännedom om systemets konstruktion, men gör en uppskattning baserad på vad du vet om termodynamikens allmänna lagar!

8. Kärnkraftens framtid är osäker, men utvecklingsarbete pågår ändå på många håll i världen. Ett exempel på tänkbar framtida design är "the Gas Turbine Modulated Helium Reactor". Det är i princip en konventionell fissionsreaktor ansluten till en gasturbin enligt nedanstående figur, men i stället för vatten använder man helium som arbetsmedium. Heliumgasen går in i kompressorn vid temperaturen 400 K och värms i reaktor till 1123 K. Trycket på turbinens ingångssida är 7,0 MPa.. På utgångssidan är trycket 1,4 MPa. Den elektriska effekt som systemet producerar är 285 MW. Beräkna
  - (a) systemets termiska verkningsgrad,
  - (b) flödet av helium genom turbinen (kg/s).

Det får antas att den process som heliumgasen genomgår är en ideal Braytoncykel, sammansatt av två adiabater och två isobarer enligt diagrammet.



9. En *klassisk* paramagnet med magnetiska momentet  $\mathbf{m}_B$  har orienteringsenergin

$$\varepsilon(\mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{m}_B = -Bm_B \cos \theta$$

i ett yttre magnetfält  $\mathbf{B}$ .

Bestäm sannolikheten  $P(\theta)d\theta$ , dvs sannolikheten att paramagneten är orienterad med vinkeln  $\theta$  mot det yttre magnetfältet!

Vad blir väntevärdet  $\langle m_B \cos \theta \rangle$ ?

Jämför detta med resultatet för en spinn-1/2 paramagnet!

Hur skulle du som 1800-tals fysiker reagerat på det klassiska resultatet jämfört med det du uppmätt i laboratoriet, dvs för en spinn-1/2 paramagnet?

10. I en Einstein-modell för en fast kropp har varje atom en bindingsenergi  $|\varepsilon_0|$  och ett diskret spektrum med vibrationsmoder  $\mathbf{n}$  med energin  $(n_x+n_y+n_z) h\nu_0$ , där  $\nu_0$  är en karakteristisk frekvens och  $n_i = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ . Energin per atom i mod  $\alpha$  är alltså

$$\varepsilon_\alpha = -|\varepsilon_0| + (n_x + n_y + n_z)_\alpha h\nu_0$$

Kemiska potentialen för samma materials gasfas är

$$\mu_{\text{vap}} = kT \ln \left[ \left( \frac{V}{N} \right)_{\text{vap}} \left( \frac{1}{\lambda_{th}} \right)^3 \right]$$

där  $\lambda_{th} = [h^2/2\pi mkT]^{1/2}$  är den termiska deBroglie-våglängden.

Bestäm trycket vid fasövergången mellan den fasta fasen och gasfasen som funktion av  $\varepsilon_0$ ,  $\nu_0$  och  $T$ .

## **Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2003-08-27**

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 8 september.

**Rättningsgranskning:** Onsdagen den 10 september kl. 12.00-13.00 i rum 7112B i Origohusets norra flygel (Göran Niklassons tjänsterum).

### **Lösningar till termodynamikdelen**

#### **Uppgift 1**

När värme tillförs vid konstant tryck expanderar gasen och uträttar då arbete på omgivningen. En del av den tillförda värmen går åt till detta, vilket inte är fallet om volymen hålls konstant. Därför krävs mera värme för att åstadkomma en bestämd temperaturökning vid konstant tryck än vid konstant volym.

#### **Uppgift 2**

Många tillämpningar av termodynamiken handlar om energiomvandlingar. Man har ofta intresse av att veta hur mycket arbete som uträttas eller hur mycket värme som behöver tillföras vid en viss process. De termodynamiska potentialerna ger information om detta. Några exempel:

För en process som äger rum i en sluten behållare med given volym i en omgivning med given temperatur är ändringen i Helmholtz fria energi  $F$  lika med det utvinnbara arbetet.

För en process som sker under konstant tryck i stället för vid konstant volym är det Gibbs fria energi  $G$  som ger motsvarande information.

Vid processer som sker under konstant tryck är värmeförseln lika med ändringen i entalpi  $H$ .

Det arbete som en gas uträttar i en turbin är lika med ändringen i entalpi  $H$ .

#### **Uppgift 3**

(a) För en ideal carnotprocess gäller att entropin för värmekällan minskar och att entropin för kylaren ökar. Entropiminskningen för värmekällan är precis lika stor som entropiökningen för kylaren, så att entropiändringen för universum blir noll.

(b) För en ideal otto-process gäller också att entropin för värmekällan minskar och att entropin för kylaren ökar. Entropiökningen för kylaren är i detta fall större än entropiminskningen för värmekällan, vilket leder till att entropin för universum som helhet ökar.

## Uppgift 7

I brist på annan information baserar vi uppskattningen på Carnots teorem, som säger att de högsta möjliga verkningsgraden för en värmemaskin är

$$\eta = 1 - \frac{T_l}{T_h}$$

där  $T_l$  och  $T_h$  är lägsta respektive högsta temperaturen under processen. I detta fall är  $T_h$  lika med ångans ingångstemperatur, d.v.s.  $(279+273)$  K = 552 K. Den lägsta temperaturen  $T_l$  sätter vi lika med havsvattnets temperatur, vilken alltså blir  $(7+273)$  K = 280 K i idealfallet men  $(20+273)$  K = 293 K under värmeböljan. Låt oss beteckna motsvarande verkningsgrader med  $\eta_7$  respektive  $\eta_{20}$  och beräkna förhållandet mellan dem:

$$\frac{\eta_{20}}{\eta_7} = \frac{1 - \frac{293}{552}}{1 - \frac{280}{552}} = \frac{552 - 293}{552 - 280} = \frac{259}{272} = 0,952$$

Verkningsgraden minskar alltså med 4,8 %, vilket på en produktion av 915 MW skulle innebära en minskning med 44 MW. Det stämmer ju ganska bra med påståendet i tidningen.

Svar: En rimlig uppskattning är att effektminskningen blir av storleksordningen 40 eller 50 MW.

## Uppgift 8

(a) Trycken på högtryckssidan respektive lågtryckssidan är

$$p_1 = \text{trycket i kylaren} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$p_2 = \text{trycket i reaktorn} = 7 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

För att beräkna verkningsgraden behöver vi veta hur temperaturen ändras i de olika delprocesserna. Vi börjar därför med att bestämma temperaturerna i de fyra ”hörnen”:

$$T_1 = \text{temperaturen vid ingången till kompressorn} = 400 \text{ K}$$

$$T_2 = \text{temperaturen vid utgången från kompressorn} = ?$$

$$T_3 = \text{temperaturen vid ingången till turbinen} = 1123 \text{ K}$$

$$T_4 = \text{temperaturen vid utgången från turbinen} = ?$$

De okända  $T_2$  och  $T_4$  kan bestämmas ur de samband som gäller vid adiabatiska processer. En viktig storhet i det sammanhanget är förhållandet  $\gamma$  mellan de isobariska och isokoriska värmekapaciteterna. Helium kan med mycket god approximation behandlas som en ideal gas av enatomiga molekyler, vilket innebär att  $\gamma = 1,667$ . Vi finner att

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 400 \cdot 5^{(0,667/1,667)} = 762 \text{ K}$$

$$T_4 = T_3 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \frac{1123}{5^{(0,667/1,667)}} = 590 \text{ K}$$

Verkningsgraden är

$$\eta = \frac{w_{ut}}{q_{in}} = \frac{q_m - q_{ut}}{q_{in}} = 1 - \frac{q_{ut}}{q_{in}}$$

där  $w_{ut}$  är den producerade elektriska effekten  $285 \cdot 10^6$  W,  $q_{in}$  är den värmeeffekt som tillförs i reaktorn och  $q_{ut}$  är den värmeeffekt som avges i kylaren. Både värmeförsel och värmeavgivning sker vid konstant tryck, och alltså gäller

$$q_{in} = \mu c_p (T_3 - T_2)$$

$$q_{ut} = \mu c_p (T_4 - T_1)$$

där  $c_p$  är den isobariska värmekapacitiviteten och  $\mu$  är mängden helium som passerar per tidsenhet. Vi kan nu beräkna verkningsgraden:

$$\eta = 1 - \frac{q_{ut}}{q_{in}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 1 - 5^{-0,667/1,667} = 0,4748$$

(b) Värmekapacititeten  $c_p$  för helium är  $5,2 \cdot 10^3$  J/kg·K. Ur ovanstående ekvationer kan massflödet lätt beräknas:

$$\mu = \frac{q_{in}}{c_p (T_3 - T_2)} = \frac{W_{ut}}{\eta c_p (T_3 - T_2)} = \frac{285 \cdot 10^6}{0,4748 \cdot 5,2 \cdot 10^3 \cdot (1123 - 762)} \text{ kg/s} = 319,8 \text{ kg/s}$$

Svar: (a) 47 % (b) 320 kg/s

### Uppgift 9 (endast svar)

$$P(\theta) d\theta = \frac{Bm_B e^{Bm_B \cos \theta / kT} \sin \theta}{2kT \sinh\left(\frac{Bm_B}{kT}\right)} d\theta$$

$$\langle m_B \cos \theta \rangle = m_B \left( \coth \frac{Bm_B}{kT} - \frac{kT}{Bm_B} \right)$$

$$\langle m_B \cos \theta \rangle = m_B \tanh \frac{Bm_B}{kT} \quad (\text{spin-}\frac{1}{2})$$

### Uppgift 10 (endast svar)

$$p = kT \left( \frac{hw_0}{\lambda_{th} kT} \right)^3 e^{-\epsilon_0 / kT}$$

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Torsdagen den 24 april 2003 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

**Examinatorer:** Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

**Hjälpmedel för uppgifterna 1–4:** Inga.

**Hjälpmedel för uppgifterna 5–8:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med ”Allmänna relationer för enkomponentsystem” och ”Kanonisk fördelning” (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Uppgifterna 1–3 ger högst 2 poäng vardera, uppgift 4 ger högst 6 poäng och uppgifterna 5–8 högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter och duggor adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 12 maj.

**Rättningsgranskning:** Tisdagen den 13 maj kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

1. För en ideal gas gäller att energin  $U$  enbart beror av temperaturen. Använd detta för att visa att  $C_p - C_v = R$ .
2. Vilka tillståndsfunktioner är konstanta i följande processer:
  - (a) Reversibel adiabatisk expansion,
  - (b) Fri expansion ut i vacuum,
  - (c) Passage genom en strypventil (Joule-Thomson-effekten).
3. Skissera ett fasdiagram för vatten i  $pT$ -planet. Markera de olika faserna och särskilt två viktiga punkter i diagrammet. Diagrammets utseende kan bestämmas i detalj om man känner en viss tillståndsfunktion. Vilken?
4. Gör en principskiss över metallers värmekapacitet,  $c_v(T)$ , där temperaturberoendet över hela temperaturskalan framkommer. Dela in skissen i olika regimer och beskriv den temperatur som bestämmer övergången mellan varje regim. Ge en kort redovisning för varför  $c_v(T)$  har det  $T$ -beroende det har i varje regim.

5. James W. Stevens, som är biträdande professor i Mechanical Engineering vid Mississippi State University, har ansökt om medel för "Development of a Ground-source Heat Engine". Här följer några meningar ur ansökan:

*The objective of this proposal is to design and construct a ground-source heat engine operating on the temperature difference between the ground and the atmosphere that will produce a daily average of 100 mW of electrical energy.*

*At most locations outside the tropics, the diurnal temperature changes in the air near ground level are large compared with the temperature changes even a very short distance below the surface of the ground. In concept, these daily temperature differences are of the order of 1–10 K in surroundings close to 300 K.*

*As with many natural power sources, there is an enormous amount of energy, but very little availability.*

- (a) Antag att luftens temperatur är  $5^{\circ}\text{C}$  och att temperaturen strax under jordytan är  $10^{\circ}\text{C}$ . Hur mycket värmeenergi per tidsenhet måste minst extraheras från jorden om man skall producera en elektrisk effekt på 100 mW?
- (b) Förklara vad Stevens menar med att denna och andra naturliga energikällor karakteriseras av "very little availability"?
6. Som motor i en höghastighetsborr används en liten turbin, som drivs av komprimerad luft. Luften kommer in i turbinen med trycket 500 kPa och temperaturen  $30^{\circ}\text{C}$ . När luften lämnar turbinen har dess tryck sjunkit till 180 kPa.
- (a) Beräkna det utträttade arbetet per mol luft om processen i turbinen kan anses reversibel och adiabatisk.
- (b) Borren kräver effekten 746 W (en hästkraft). Luftslangen till turbinen har diametern 1 cm. Beräkna luftens hastighet i slangen under antagandet att dess kinetiska energi är försumbar i jämförelse med andra för problemet relevanta energier!
- (c) Kontrollera att antagandet om försumbar kinetisk energi var rimligt!
7. En en-atomig gas befinner sig i en cylinder med höjden  $h$  i jordens gravitationsfält,  $g$ . Gasen består av  $N$  stycken atomer, var och en med massan  $m$ , i termisk jämvikt vid temperaturen  $T$ .
- (a) Bestäm sannolikhetsfördelningen  $P(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  för en atom i gasen. Kom ihåg att sannolikheten för att finna atomen inom cylindern måste vara normerad till ett.
- (b) Beräkna medelenergin  $\langle E \rangle / N$ .
- (c) Rita en graf för kvoten  $\langle E \rangle / Nmgh$  som funktion av  $kT/mgh$ .
- (d) Bestäm med hjälp av grafen det värde på  $kT/mgh$  som ger högst värmekapacitet.
- (e) Vad är gränsvärdet för  $\langle E \rangle / N$  då kvoten  $kT/mgh$  är stor resp. liten jämfört 1?
8. En atom har tre tillstånd i ett yttre magnetfält givna av dess spinn: spinn upp  $s_z = 1$  med energin  $E = E_0$ , inget spinn  $s_z = 0$  med  $E = 0$ , och spinn ner  $s_z = -1$  med energin  $E = E_0$ .
- (a) Givet att atomen är i termisk jämvikt, vad är sannolikheten för att atomen befinner sig i tillståndet  $s_z = 1$ ? I vilken temperaturgräns är denna sannolikhet  $1/3$ . Motivera ditt svar i detalj.
- (b) Vad blir medelenergin  $\langle E \rangle$  uttryckt i  $E_0$ ,  $T$ ... Visa grafiskt hur  $\langle E \rangle$  beror av  $T$ . Gör det samma för värmekapaciteten.
- (c) Vad är medelvärdet  $\langle s_z \rangle$ ? Motivera ditt svar kvalitativt.

## Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2003-04-24

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast måndagen den 12 maj.

**Rättningsgranskning:** Tisdagen den 13 maj kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

### Lösningar

#### Uppgift 1

Första huvudsatsen på differentialform:  $\delta Q = dE + pdV$

Om energin  $E$  bara beror av  $T$  gäller att  $dE = \frac{dE}{dT} dT$

och alltså  $\delta Q = \frac{dE}{dT} dT + pdV$

Ovanstående samband gäller vid alla reversibla processer.

Om vi specialiserar till processer vid konstant volym blir  $dV = 0$  och alltså finner vi att

$$\delta Q = \frac{dE}{dT} dT$$

Det innebär att den isokora värmekapaciteten  $C_V$  är lika med derivatan av  $E$ :

$$C_V = \frac{dE}{dT}$$

Om vi i stället specialiserar till processer vid konstant tryck gäller enligt idela gaslagen för en mol gas att  $pdV = RdT$ , vilket ger

$$\delta Q = \frac{dE}{dT} dT + RdT$$

Den isobariska värmekapaciteten  $C_p$  kan alltså skrivas som

$$C_p = \frac{dE}{dT} + R$$

Ur detta följer att  $C_p - C_V = R$ , vilket skulle visas.

#### Uppgift 2

- (a) Entropin
- (b) Energin
- (c) Entalpin



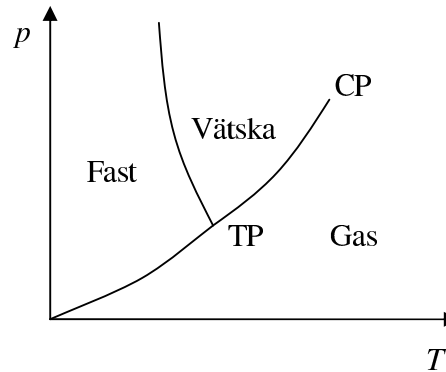
### Uppgift 3

CP = Kritiska punkten

TP = Trippelpunkten

Den tillståndsfunktion som bestämmer fasdiagrammet är Gibbs fria energi  $G$ .

Också svaret "Kemiska potentialen  $\mu$ " kan godkännas (kemiska potentialen är Gibbs fria energi per molekyl)



### Uppgift 4

Se kursboken.

### Uppgift 5

Temperatur i jorden:

$$T_1 = 283 \text{ K}$$

Temperatur i luften:

$$T_2 = 278 \text{ K}$$

Maximal verkningsgrad för en värmemotor:  $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{278}{283} = 0,018 = 1,8 \%$

Uteffekt:

$$w = 0,10 \text{ W}$$

Ingående värmeflöde:

$$q_1 = \frac{w}{\eta} = \frac{w}{(1 - T_2/T_1)} = 5,66 \text{ W}$$

Att energikällan har "very little availability" innebär helt enkelt att bara en mycket liten andel av värmeflödet kan utvinnas som arbete. Ett annat sätt att säga samma sak är att exergin för systemet är liten.

Svar: (a) 5,7 W (b) Se ovan

*Kommentar:* Värmeledningsförmågan för mark (sten) är ungefär 2,5 W/m·K. Om vi antar att en sådan här apparat får ta upp en area på 1 m<sup>2</sup> så skulle alltså värmeflödet leda till en temperaturgradient i marken på 5,66/(1·2,5) °C/m ≈ 2 °C/m, vilket inte verkar otänkbart. Om arean i stället är 1 dm<sup>2</sup> blir motsvarande siffra 200 °C/m, vilket verkar klart orimligt. Slutsatsen är att apparaten behöver uppta ganska stor yta för att generera en förhållandevis liten effekt. Vad den skulle kunna användas till vet jag inte. Nattbelysning där elnät saknas? Fast det finns ju redan lyktor som laddar upp sina batterier under dagen med hjälp av solceller.

### Uppgift 6

Ingångstryck:

$$p_1 = 500 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Utgångstryck:

$$p_2 = 180 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

Ingångstemperatur:

$$T_1 = 303 \text{ K}$$

Utgångstemperatur:

$$T_2 = ?$$

Utgångstemperaturen kan beräknas ur de samband som gäller vid adiabatiska processer (luften kan med god approximation behandlas som en ideal gas med adiabatiska koefficienten  $\gamma = 1,4$ ):

$$p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$$

$$T_2 = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} T_1 = 226 \text{ K} = -47^\circ\text{C}$$

Det av turbinen utträttade nyttiga arbetet  $W$  är lika med minskningen i entalpi. Per mol gas får vi

$$W = C_p (T_1 - T_2) = \frac{7}{2} RT_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right] = 2232 \text{ J}$$

Luftens molvolym på ingångssidan:  $v_1 = \frac{RT_1}{p_1}$

Luftens hastighet i slangen:  $u = ?$

Slangens diameter:  $d = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

Slangens tvärsnittsarea:  $A = \frac{\pi d^2}{4}$

Antal mol luft som per tidsenhet passerar genom turbinen:

$$n = \frac{uA}{v_1} = \frac{\pi p_1 d^2 u}{4RT_1}$$

Avgiven effekt:

$$P = nW = \frac{7\pi u p_1 d^2}{8} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right] = 746 \text{ W}$$

Ur detta kan den sökta hastigheten beräknas:

$$u = \frac{8P}{7\pi p_1 d^2} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]^{-1} = 21,4 \text{ m/s}$$

Kinetisk energi för en mol luft (molekylvikten för luft är ungefär 29)

$$K = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 10^{-3} 21,4^2 \text{ J} = 7 \text{ J}$$

Detta är betydligt mindre än det utträttade arbetet per mol, så antagandet att kinetiska energin kan försummas är hållbart.

Svar: (a) 2,2 kJ    (b) 21 m/s    (c) Antagandet stämmer bra

### Uppgift 7

(a) Sannolikhetsfördelningen kan bara bero på rörelsemängdens belopp  $p$  och höjden  $z$  över botten. Den bestäms av Boltzmannfaktorn och har formen.

$$P(z, p) = \frac{1}{Z_z(T, H) Z_p(T)} \exp \left[ -\frac{mgz + p^2 / 2m}{kT} \right]$$

där  $Z_z(T, H)$  och  $Z_p(T)$  är normeringsfaktorer som kan skrivas

$$Z_z(T, H) = A \int_0^h \exp \left( -\frac{mgz}{kT} \right) dz = \frac{AkT}{mg} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{mgH}{kT} \right) \right]$$

$$Z_p(T) = 4\pi \int_0^\infty \exp \left( -\frac{p^2}{2mkT} \right) p^2 dp = (2\pi mkT)^{3/2}$$

Sannolikhetsfördelningen är alltså

$$P(z, p) = \frac{\exp\left[-\frac{mgz + p^2/2m}{kT}\right]}{(2\pi mkT)^{3/2} \left(\frac{AkT}{mg}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right)\right]}$$

(b) Medelvärdet av den kinetiska energin per molekyl är

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{4\pi}{Z_p(T)} \int_0^\infty p^2 \frac{p^2}{2m} \exp\left[-\frac{p^2}{2mkT}\right] = kT^2 \frac{d \ln Z_p(T)}{dT} = \frac{3}{2} kT$$

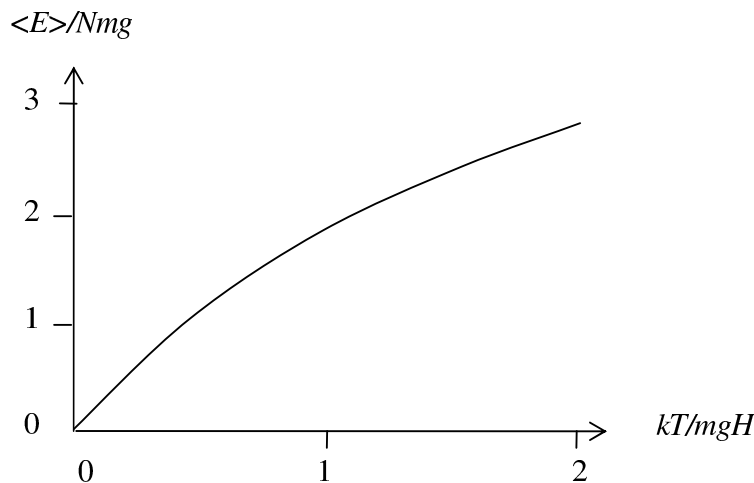
Medelvärdet av den potentiella energin per molekyl är

$$\begin{aligned} \langle mgz \rangle &= \frac{1}{Z_z(T, H)} \int_0^\infty mgz \exp\left[-\frac{mgz}{kT}\right] = kT^2 \frac{\partial \ln Z_z(T, H)}{\partial T} \\ &= kT \left[ 1 - \frac{mgH}{kT(e^{mgH/kT} - 1)} \right] \end{aligned}$$

Den sammanlagda medelenergin per molekyl blir alltså

$$\frac{\langle E \rangle}{N} = \frac{3}{2} kT + kT \left[ 1 - \frac{mgH}{kT(e^{mgH/kT} - 1)} \right]$$

(c)



(d) Kurvans lutning minskar när  $T$  ökar. Den högsta värmekapaciteten fås alltså vid låga temperaturer.

(e) I lågtemperaturgränsen gäller att

$$\frac{\langle E \rangle}{N} \rightarrow \frac{5}{2} kT$$

och i högtemperaturgränsen gäller

$$\frac{\langle E \rangle}{N} \rightarrow \frac{3}{2} kT$$

### Uppgift 8

Tillståndssumman är

$$Z(T) = e^{-E_0/kT} + 1 + e^{-E_0/kT} = 1 + 2e^{-E_0/kT}$$

(a) Sannolikheten för tillståndet  $s_z = 1$  är

$$P_1 = \frac{e^{-E_0/kT}}{1 + 2e^{-E_0/kT}} = \frac{1}{e^{E_0/kT} + 2}$$

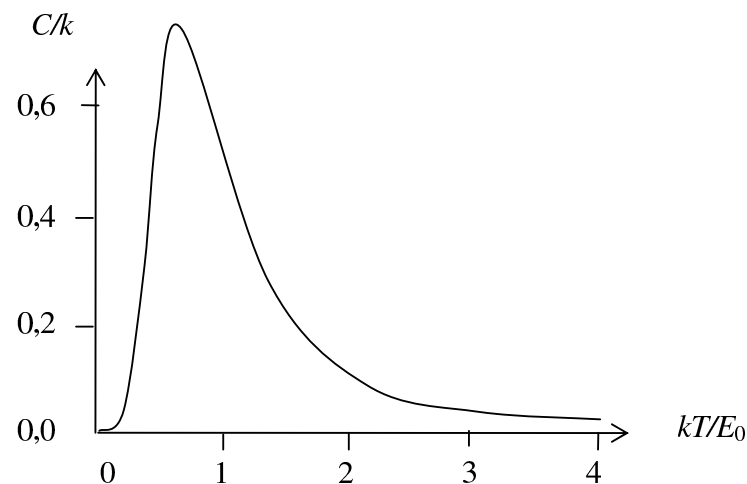
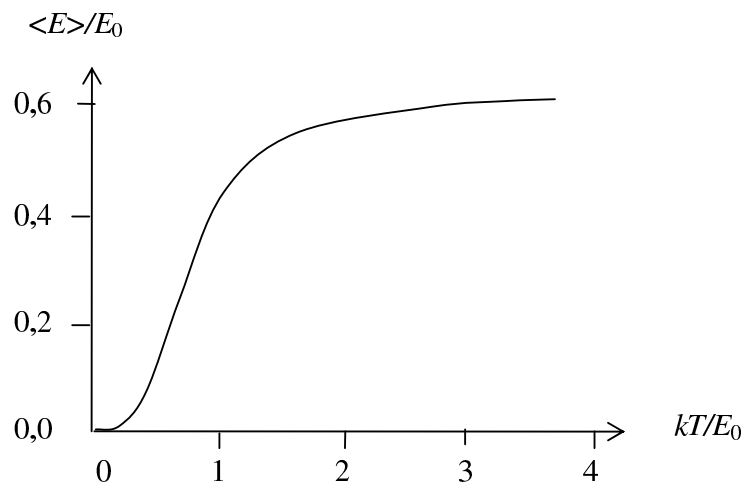
$P_1$  blir lika med  $1/3$  i gränsen  $kT \gg E_0$ . I denna gräns är alla tre tillstånd lika sannolika.

(b) Medelenergin är

$$\langle E \rangle = \frac{2E_0 e^{-E_0/kT}}{1 + 2e^{-E_0/kT}} = \frac{2E_0}{e^{E_0/kT} + 2}$$

och värmekapaciteten är

$$C(T) = \frac{d\langle E \rangle}{dT} = 2k \left( \frac{E_0}{kT} \right)^2 \frac{e^{E_0/kT}}{(2 + e^{E_0/kT})^2}$$



(c) Eftersom  $s_z = 1$  och  $s_z = -1$  är lika sannolika är det uppenbart att  $\langle s_z \rangle = 0$ .

**Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)**

**Tid och plats:** Onsdagen den 18 december 2002 kl. 8.45–12.45 i V-huset.

**Examinatorer:** Mikael Fogelström (tel. 772 3196), Göran Niklasson (tel. 772 3194, 070-745 4997).

**Hjälpmedel för uppgifterna 1–6:** Inga.

**Hjälpmedel för uppgifterna 7–10:** Physics Handbook, BETA, Termodynamiska tabeller (utdelade), formelblad med ”Allmänna relationer för enkomponentsystem” och ”Kanonisk fördelning” (utdelat), egenhändigt skriven A4-sida med valfritt innehåll (inga kopior eller maskinskrift) samt valfri räknedosa i fickformat.

**Bedömning:** Uppgifterna 1–6 ger högst 2 poäng vardera och uppgifterna 7–10 högst 10 poäng vardera. Poäng från inlämningsuppgifter och duggor adderas till tentamenspoängen enligt utdelad formel. För godkänt krävs 30 poäng.

**Lösningar:** Anslås på entrédörren till trapphuset omedelbart efter skrivningens slut.

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 10 januari.

**Rättningsgranskning:** Måndagen den 20 januari kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

1. Entropin för ett system i ett jämviktstillstånd, karakteriserat av t.ex. tillståndsvariablerna  $T$  och  $V$ , kan enligt termodynamiken definieras som

$$S(T, V) = S(T_0, V_0) + \int_{(T_0, V_0)}^{(T, V)} \frac{\delta Q}{T}$$

där  $\delta Q$  representerar tillförd värme och där  $S(T_0, V_0)$  är entropin i ett godtyckligt valt referenstillstånd. Det förutsätts dock att integralen från tillståndet  $(T_0, V_0)$  till tillståndet  $(T, V)$  beräknas över en reversibel process. Detta kan synas vara en allvarlig begränsning, eftersom alla verkliga processer är mer eller mindre irreversibla. I själva verket innebär det ingen begränsning alls. Förklara!

2. I termodynamiken har man anledning att introducera olika ”termodynamiska potentialer”. Ur det faktum att dessa är tillståndsfunktioner följer ett antal exakta samband som kallas Maxwell-relationer.

En av de termodynamiska potentialerna är Gibbs fria energi  $G$ . Den beror av tillståndsvariablerna  $T$ ,  $p$  och  $N$  enligt formeln

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$

Vilken Maxwell-relation följer ur detta?

3. Gör en principskiss som visar kretsloppet i ett vanligt kylskåp! Markera med pilar var värme avges eller tas upp, och ange särskilt vilken fysikalisk process som ger upphov till temperatursänkningen!

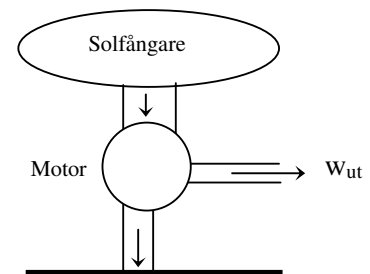
4. Betrakta ett system bestående av två identiska partiklar med tre tillgängliga energinivåer:

$$\varepsilon_n = n\varepsilon, \quad n = 0, 1, 2.$$

Den lägsta energinivån är tvåfalt degenererad, de andra är icke-degenererade. Systemet är i jämvikt vid en temperatur  $T$ . Bestäm partitionsfunktionen  $Z$  och medelenergin  $\bar{E}$  samt numrera (visualisera) alla möjliga konfigurationer för vart och ett av nedanstående fall:

- Partiklarna är fermioner,
  - Partiklarna är bosoner.
5. Under vilka förhållanden kan ett system av icke växelverkande fermioner respektive bosoner beskrivas med Boltzmann-statistik?
6. Gör en uppskattning av specifika värmnet vid låga temperaturer för
- en fermigas,
  - en bosegas.
  - Vad är det som i dessa båda fall avgör om temperaturen kan anses vara låg?

7. En soldriven motor kan konstrueras genom att man använder en solfångare som värmekälla och den omgivande marken som kylare. Intensiteten hos den solstrålning som träffar jordytan är ungefär  $1,0 \text{ kW/m}^2$ , men det är inte möjligt att utnyttja hela den effekten eftersom solfångarens yta med nödvändighet återutsänder en del av strålningen i enlighet med Stefan-Boltzmanns lag. Ytan får alltså inte vara alltför het, för då förlorar man en stor del av strålningseffekten. Den får å andra sidan inte heller vara alltför kall, för då blir värmemotorns verkningsgrad alltför dålig.



- Vid vilken temperatur återutsänds all inkommande strålning?
- Bestäm den optimala temperaturen för ytan utgående från villkoret att motorns uteffekt skall vara så stor som möjligt! Det får antas att motorn har samma verkningsgrad som en Carnotmaskin. Marktemperaturen antages vara  $10^\circ\text{C}$ .

Anm: Deluppgift b leder till en ekvation som inte kan lösas analytiskt. Någon mycket precist siffervärde efterfrågas inte, utan det räcker med en enkel numerisk uppskattning.

8. Stjärnor bildas genom att interstellära gasmoln dras samman av gravitationen. Låt oss för enkelhets skull anta att ett sådant moln har formen av en sfär med radien  $R$  och enbart består av fria väteatomer, vardera med massan  $m$ . En termodynamisk modell för molnets kollaps kan konstrueras genom att man utgår från Helmholtz fria energi för en ideal gas och tillfogar en "självenergi"  $F_G$  som representerar den potentiella energin för gravitationskrafterna. Om molnets densitet antages konstant kan självenergin beräknas enligt formeln

$$F_G = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

där  $M$  är molnets sammanlagda massa och  $G$  är gravitationskonstanten.

- Finn molnets tillståndsekvation, d.v.s. trycket  $p$  som funktion av temperaturen  $T$  och radien  $R$ !
- Ett stabilitetsvillkor för gasen är att kompressibiliteten skall vara positiv (jämför van der Waals tillståndsekvation, där teckenbyte hos isothermernas lutning signalerar en

fasomvandling till vätska). Använd detta för att härleda ett villkor som  $T$  och  $V$  måste uppfylla för att molnet skall vara stabilt.

(c) Antag att modellen är tillämplig på solen, som har massan  $2,0 \cdot 10^{30}$  kg och radien  $7,0 \cdot 10^8$  m. Hur hög måste temperaturen vara för att solen skall vara stabil?

Anm: Modellen förutsätter att såväl temperatur som densitet är desamma i hela molnet. Det stämmer naturligtvis inte för solen, och den består inte heller enbart av väteatomer, men modellen ger ändå en hyfsad bild av verkligheten.

9. Ett material bestående av  $N$  stycken fria partiklar befinner sig i svagt yttre magnetfält med flödestätheten  $B$ . Varje partikel har ett magnetiskt moment vars komponent längs fältet kan skrivas som  $m\mu$ , där  $\mu$  är en konstant och där heltalet  $m$  kan anta värdena  $-J, -J+1, \dots, J-1, J$ . Materialet befinner sig vid temperaturen  $T$ .
- (a) Bestäm materialets partitionsfunktion  $Z$ .
- (b) Beräkna medelmagnetiseringen  $\bar{M}$ .
- (c) Hur ser uttrycket för  $\bar{M}$  ut vid höga temperaturer?
10. Ett gummibands elasticitet kan beskrivas genom att betrakta det som en endimensionell polymer bestående av  $N$  molekyler, vardera med längd  $d$  och hoplänkade ända vid ända. Vinkeln mellan två angränsande molekyler kan antingen vara  $0^\circ$  eller  $180^\circ$ . När gummibandet är obelastat kan båda vinklarna antas ha samma sannolikhet.
- (a) Gummibandets längd kan i denna modell skrivas som  $L = 2md$ , där  $m$  är ett positivt heltal. Visa att antalet konfigurationer som polymermolekylerna kan anta är.

$$g(N, m) = \frac{2N!}{\left(\frac{N}{2} + m\right)! \left(\frac{N}{2} - m\right)!}$$

Redogör tydligt för hur du resonerar dig fram till detta resultat!

(b) Om  $N \gg 1$  och  $m \ll N$  kan uttrycket ovan förenklas till

$$g(N, m) \approx g(N, 0) \exp(-2m^2 / N)$$

Vad är då entropin för gummibandet som funktion av längden  $L$ ?

(c) Hur stor kraft  $F$  krävs för att hålla gummibandet sträckt till längden  $L$ , om  $N \gg 1$  och  $m \ll N$ ?

(d) Hur ser sambandet mellan kraft och längd ut om endast villkoret  $N \gg 1$  är uppfyllt?

## Tentamen i Termodynamik och statistisk fysik för F3 2002-12-18

**Rättningsprotokoll:** Anslås i entréhallen Fysik senast fredagen den 10 januari.

**Rättningsgranskning:** Måndagen den 20 januari kl. 12.00-13.00 i rum 6115 i Origohusets norra flygel.

## Lösningar

### Uppgift 1

Termodynamikens andra huvudsats säger oss att entropin är en tillståndsfunktion, d.v.s. entropiändringen vid en process från ett jämviktstillstånd till ett annat beror inte av hur processen går till. Man kan därför alltid välja att beräkna ändringen via en reversibel process och vara säker på att resultatet är detsamma som man skulle få i vilken annan process som helst, reversibel eller ej.

### Uppgift 2

Gibbs fria energi  $G$  kan betraktas som en funktion av de oberoende tillståndsvariablerna  $T$ ,  $p$  och  $N$ . Ur matematikens flervariabelanalys följer att de blandade andra ordningens partialderivatorna är symmetriska i den meningen att t. ex.

$$\frac{\partial^2 G}{\partial T \partial p} = \frac{\partial^2 G}{\partial p \partial T}$$

vilket leder till Maxwellrelationen

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,N}$$

Anmärkning: På samma sätt finner man också att

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,p} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{p,N}$$

och

$$\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_{T,p} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{T,N}$$

som också är Maxwellrelationer, fast mindre ofta använda.

### Uppgift 3

Se figuren på sidan 19 i Göran Wahnströms "Sammanfattning av delar av kursen Termodynamik och statistisk fysik för F3".

Den fysikaliska process som åstadkommer temperatursänkningen är Joule-Kelvin-processen (även kallad Joule-Thomson-processen), som innebär att det cirkulerande mediet pressas genom en strypventil.



### Uppgift 4

Vi gör först en omnumrering och betecknar de fyra tillgängliga enpartikel tillstånden (orbitalerna) med index  $r = 1, 2, 3, 4$ . Energierna är alltså

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon$$

$$\varepsilon_4 = 2\varepsilon$$

(a) Fermioner lyder Paulis uteslutningsprincip. Vi får följande 6 möjligheter, där siffrorna 0 eller 1 anger om respektive tillstånd är besatt eller inte:

	Orbital nr				
	1	2	3	4	Total energi
	1	1	0	0	0
	1	0	1	0	$\varepsilon$
	0	1	1	0	$\varepsilon$
	1	0	0	1	$2\varepsilon$
	0	1	0	1	$2\varepsilon$
	0	0	1	1	$3\varepsilon$

Tillståndssumman blir

$$Z(T) = 1 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT}$$

och medelenergin blir

$$\bar{E}(T) = \frac{2\varepsilon e^{-\varepsilon/kT} + 2 \cdot 2\varepsilon e^{-2\varepsilon/kT} + 3\varepsilon e^{-3\varepsilon/kT}}{1 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT}} = \frac{2e^{-\varepsilon/kT} + 4e^{-2\varepsilon/kT} + 3e^{-3\varepsilon/kT}}{1 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 2e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT}} \varepsilon$$

(b) Bosoner kan i motsats till fermioner sitta fler än en i varje orbital. Vi får följande 10 möjligheter:

	Orbital nr				
	1	2	3	4	Total energi
	2	0	0	0	0
	1	1	0	0	0
	0	2	0	0	0
	1	0	1	0	$\varepsilon$
	0	1	1	0	$\varepsilon$
	1	0	0	1	$2\varepsilon$
	0	1	0	1	$2\varepsilon$
	0	0	2	0	$2\varepsilon$
	0	0	1	1	$3\varepsilon$
	0	0	0	2	$4\varepsilon$

Tillståndssumman blir

$$Z(T) = 3 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 3e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT} + e^{-4\varepsilon/kT}$$

och medelenergin blir

$$\bar{E}(T) = \frac{2\varepsilon e^{-\varepsilon/kT} + 3 \cdot 2\varepsilon e^{-2\varepsilon/kT} + 3\varepsilon e^{-3\varepsilon/kT} + 4\varepsilon e^{-4\varepsilon/kT}}{3 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 3e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT} + e^{-4\varepsilon/kT}} = \frac{2e^{-\varepsilon/kT} + 6e^{-2\varepsilon/kT} + 3e^{-3\varepsilon/kT} + 4e^{-4\varepsilon/kT}}{3 + 2e^{-\varepsilon/kT} + 3e^{-2\varepsilon/kT} + e^{-3\varepsilon/kT} + e^{-4\varepsilon/kT}} \varepsilon$$

### Uppgift 5

Boltzmann-statistik gäller när kvantmekaniska effekter är försumbara. Det betyder att partikeltätheten skall vara liten, så att medelantalet partiklar per orbital är litet. Ett annat sätt att formulera kriteriet är att medelavståndet mellan partiklarna skall vara stort jämfört med de Broglie-våglängden. Medelenergin  $E$  per partikel är av storleksordningen  $kT$ , energin är relaterad till rörelsemängden  $p$  och partikelmassan  $m$  genom sambandet  $E = p^2/2m$ , och de Broglievåglängden  $\lambda$  är  $h/p$ . Alltså finner vi att

$$\lambda \sim h\sqrt{mE} \sim h\sqrt{mkT}$$

Eftersom vi endast talar om storleksordningar kastar vi bort numeriska faktorer som 2,  $3/2$  eller  $\pi$ .

Medelavståndet mellan partiklarna är av storleksordningen  $(V/N)^{1/3}$ , där  $N$  är antalet partiklar och  $V$  är volymen. Härur finner vi att villkoret för Boltzmann-statistik kan skrivas

$$\frac{N}{V} \ll \left(\frac{mkT}{h^2}\right)^{3/2}$$

### Uppgift 6

Se kursboken.

### Uppgift 7

Beteckna solfångarens temperatur med  $T$  och den inkommande strålningsintensiteten med  $q_0$ . Den värmeeffekt per ytenhet som solfångaren kan vidarebefordra till motorn blir då

$$q = q_0 - \sigma T^4$$

där  $\sigma$  är Stefan-Boltzmanns konstant. Siffervärden:  $q_0 = 1000 \text{ W/m}^2$ ,  $\sigma = 5,6708 \cdot 108 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ .

(a) Den tillförda nettoeffekten blir noll om

$$T = \sqrt[4]{\frac{q_0}{\sigma}} = 364 \text{ K} = 91^\circ\text{C}$$

(b) Om motorn har samma verkningsgrad som en Carnotmaskin blir det per ytenhet och tidsenhet uträttade arbetet

$$w_{ut} = (q_0 - \sigma T^4) \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)$$

där  $T_0 = 283 \text{ K}$  är marktemperaturen. Vi söker  $T$  så att  $w_{ut}$  blir maximal. Alltså bildar vi derivatan av  $w_{ut}$  m.a.p.  $T$  och sätter den lika med noll:

$$\frac{dw_{ut}}{dT} = -4\sigma T^3 \left(1 - \frac{T_0}{T}\right) + (q_0 - \sigma T^4) \frac{T_0}{T^2} = -4\sigma T^3 + 3\sigma T^2 T_0 + \frac{q_0 T_0}{T^2} = 0$$

Efter omformning ger detta ekvationen

$$T^5 - \frac{3T_0}{4} T^4 - \frac{q_0 T_0}{4\sigma} = 0$$

Numerisk lösning ger  $T = 325 \text{ K} = 52^\circ\text{C}$ .

Svar: (a)  $91^\circ\text{C}$ , (b)  $52^\circ\text{C}$

## Uppgift 8

(a) Helmholtz fria energi för gasen är

$$F(T, V) = F_0(T, V) - \frac{3GM^2}{5R} = F_0(T, V) - \frac{3}{5}GN^2m^2 \left(\frac{4\pi}{3V}\right)^{1/3}$$

där  $F_0(T, V)$  är fria energin för en ideal gas och där vi i sista ledet använt relationen mellan volym och radie för en sfär,  $V = 4\pi R^3/3$ :

Vi kan nu bestämma trycket ur partialderivatan av  $F$  med avseende på  $V$ . Eftersom vi vet att derivering av  $F_0(T, V)$  leder till ideala gaslagen finner vi att

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T, N} = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{GN^2m^2}{V^{4/3}} = \frac{MkT}{mV} - \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{GM^2}{V^{4/3}}$$

där vi i sista ledet använt att partikelantalet  $N$  är bestämt av den totala massan  $M$  och molekylmassan  $m$  genom sambandet  $N = M/m$ .

(b) Vi är intresserade av lutningen hos isotermerna i ett  $p$ - $V$ -diagram och bildar därför partialderivatan av  $p$  med avseende på  $V$ :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -\frac{NkT}{V^2} + \frac{4}{15} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{GN^2m^2}{V^{7/3}}$$

Denna partialderivata måste vara negativ (volymen skall minska när trycket ökar), annars är systemet instabilt. Stabilitetsvillkoret blir alltså att

$$kT > \frac{4}{15} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{GMm}{V^{1/3}}$$

vilket med användning av sambandet mellan  $V$  och  $R$  kan omformas till

$$T > \frac{4}{15} \frac{GMm}{kR}$$

(c) Siffervärden:  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>,  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg (väteatomens massa),  $M = 2,00 \cdot 10^{30}$  kg (solens massa),  $R = 7 \cdot 10^8$  m (solens radie). Insättning av dessa värden ger villkoret  $T > 6,16 \cdot 10^6$  K.

Svar: (a)  $p = \frac{MkT}{mV} - \frac{1}{5} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} \frac{GM^2}{V^{4/3}}$  där  $V = \frac{4\pi}{3} R^3$

(b)  $T > \frac{4}{15} \frac{GMm}{kR}$  (c)  $T > 6,2 \cdot 10^6$  K

Anmärkning: Ovanstående är inte hela sanningen. Instabiliteter och kollapsar är komplicerade fenomen. Ett annat villkor får man ur det så kallade "virialteoremet", som för ett system av gravitationellt växelverkande partiklar i jämvikt säger att

$$U = -2K$$

där  $U$  är medelvärdet av den potentiella energin och  $K$  är medelvärdet av den kinetiska energin (som i detta fall är  $3kT/2$ ). Härur kan man härleda att

$$T > \frac{3}{15} \frac{GMm}{kR}$$

vilket visades av Jeans någon gång i början av 1900-talet. Vi noterar att det i huvudsak är samma villkor som vi fick fram utgående från tillståndsekvationen, men att det skiljer sig med en faktor  $3/4$ .

### Uppgift 9

Energien i tillståndet  $m$  är  $-m\mu B$ .

(a) Tillståndssumman ("the partition function") är

$$Z(T, B) = \sum_{m=-J}^{m=J} e^{m\mu B/kT} = \sinh\left[(2J+1)\mu B/2kT\right] / \sinh\left[\mu B/2kT\right]$$

(b) Medelmagnetiseringen är

$$\begin{aligned}\bar{M} &= N \frac{1}{Z} \sum_{m=-J}^{m=J} m\mu e^{m\mu B/kT} = NkT \left( \frac{\partial}{\partial B} \ln Z \right)_T \\ &= \frac{N\mu}{2} \left\{ (2J+1) \coth\left[ (2J+1) \frac{\mu B}{2kT} \right] - \coth \frac{\mu B}{2kT} \right\}\end{aligned}$$

(c) Vid höga temperaturer ( $kT \gg \mu B$ ) kan vi serieutveckla coth-funktionen:

$$\coth x = \frac{1}{x} \left( 1 + \frac{x^3}{3} + \dots \right)$$

vilket ger

$$\bar{M} \approx \frac{1}{3} NJ(J+1) \frac{\mu^2 B}{kT}$$

### Uppgift 10

(a) Antag att antalet länkar med vinkeln  $0^\circ$  är  $N_+$  och antalet länkar med vinkeln  $180^\circ$  är  $N_-$ . Kedjans hela längd blir då

$$L = 2md = (N_+ - N_-)d$$

Eftersom  $N_+ + N_-$  måste vara lika med  $N$  kan vi skriva

$$\begin{aligned}N_+ &= \frac{N}{2} + m \\ N_- &= \frac{N}{2} - m\end{aligned}$$

Antalet olika konfigurationer för givna värden på  $N_+$  och  $N_-$  är  $N!/(N_+! N_-!)$ . Antalet konfigurationer  $g(N, m)$  som ger längden  $2md$  är dubbelt så stort, eftersom en omkastning av  $N_+$  och  $N_-$  ger samma längd:

$$g(N, m) = \frac{2N!}{\left(\frac{N}{2} + m\right)! \left(\frac{N}{2} - m\right)!}$$

(b) Om  $N \gg 1$  och  $m \ll N$  finner man med hjälp av Stirlings formel att

$$g(N, m) \approx g(N, 0) \exp\left(-\frac{2m^2}{N}\right)$$

Entropin är då

$$S = k \ln g = k \ln g(N, 0) - \frac{kL^2}{2Nd^2}$$

(c) Sambandet mellan kraften  $f$ , längden  $L$  och temperaturen  $T$  är tillståndsekvationen för gummibandet och kan bestämmas enligt termodynamikens standardmetoder med den modifikationen att kraft och längd ersätter tryck och volym. Enligt termodynamikens första huvudsats gäller att

$$dE = \delta Q + \delta W = TdS + fdL$$

där  $f$  är kraften på gummibandet. Helmholtz fria energi definieras som  $F = E - TS$ , och dess differential blir

$$dF = -SdT + fdL$$

Motsvarande Maxwellrelation är

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_L = -\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_T = \frac{kL}{Nd^2}$$

Genom att integrera denna ekvation och använda randvillkoret  $f = 0$  när  $L = 0$  finner vi att

$$f = \frac{kTL}{Nd^2}$$

(d) Betrakta bara en av länkarna. I närvaro av en yttre kraft  $f$  har länken energin  $-fd$  om den är riktad längs kraften och energin  $fd$  om den är motriktad. Medellängden per länk är därför

$$\bar{l} = \frac{e^{fd/kT} - e^{-fd/kT}}{e^{fd/kT} + e^{-fd/kT}} d = d \tanh \frac{fd}{kT}$$

Kedjans sammanlagda längd blir då

$$L = n\bar{l} = Nd \tanh \frac{fd}{kT}$$

I fallet  $kT \ll fd$  återfinner vi resultatet från deluppgift c.