Chalmers, Institutionen för Teknisk Fysik
Göran Wahnström

Dugga 2 i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Måndagen den 3 oktober 2011, kl 8.00-9.45, HA1
Hjälpmedel: Inga
Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en hel poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2011/2012.

1. För ett helt isolerat system gäller att alla spontana processer är sådana att entropin ökar och vid jämvikt gäller att entropin är maximal. Betrakta nu ett system med konstant volym och partikelantal men i termisk kontakt med en värmereservoar. Vad gäller för spontana processer och vid jämvikt för detta system?

2. Betrakta två ämnen A och B vid givet tryck och given temperatur. För detta system gäller att blandningsentalpin, dvs ändringen i entalpi om A och B blandas helt slumpmässigt, ges av uttrycket

$$\Delta H_{mix} = ax(1-x)$$

Motsvarande uttryck för blandningsentropin är

$$\Delta S_{mix} = -R\left[x \ln x + (1-x)\ln(1-x)\right]$$

Båda uttrycken gäller per mol och x betecknar andelen av ämnet B. Vid höga temperaturer blandar sig systemet fullständigt men vid lägre temperaturer sker en fasseparation till en A och en B rik fas. Bestäm den högsta temperatur för vilken fasseparation sker!

3. De tre lägsta energinivåerna för ett visst system har värdena 0.00 eV, 0.01 eV och 0.02 eV. Då systemet befinner sig i termisk jämvikt vid temperaturen T K har följande sannolikheter P_n uppmätts

E_n	g_n	P_n
0.00	1	0.40
0.01	4	0.20
0.02	?	0.10

där g_n är degenerationsgraden. Bestäm g_n för nivån med energin 0.02 eV!

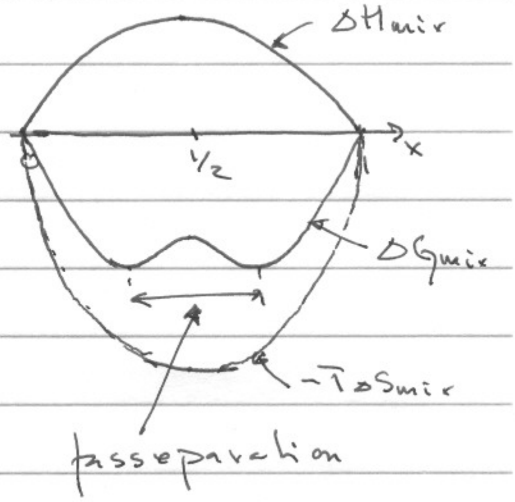
4. Betrakta ett tvånivåsystem med energinivåerna 0 och ϵ. Antag att systemet är i termiskt jämvikt med en värmereservoar vid temperaturen T. Härled ett uttryck för systemets värmekapacitet! Förenkla uttrycket i gränserna hög respektive låg temperatur!

Dugga 2 3 okt 2011 Lösningsskiss

① Vid spontana processer minskar Helmholtz fria energi F. Vid jämvikt gäller att F är minimal.

②

$$\Delta G_{mix} = \Delta H_{mix} - T\Delta S_{mix}$$



Fasseparation sker då

$$\frac{d^2}{dx^2}\Delta G_{mix}(\cancel{x}) \leq 0 \quad \text{för } x = \frac{1}{2}$$

Den högsta temperatur då fasseparation sker ges av villkoret

$$\frac{d^2}{dx^2}\Delta G_{mix}(x) = 0 \qquad \text{för } x = \frac{1}{2}$$

Vi har

$$\Delta G_{mix} = ax(1-x) + RT\left[x\ln x + (1-x)\ln(1-x)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\Delta G_{mix} = a(1-2x) + RT\ln\frac{x}{1-x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Delta G_{mix} = -2a + \frac{RT}{x(1-x)}$$

$$\Rightarrow \qquad T \leq T_c = \frac{a}{2R}$$

③ Kanonisk fördelning

$$P_n = \frac{1}{Z} g_n e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

Vi har

$$\begin{cases} 0.4 = \frac{1}{Z} \\ 0.2 = \frac{1}{Z} 4 e^{-0.01\beta} \\ 0.1 = \frac{1}{Z} g e^{-0.02\beta} \end{cases} \Rightarrow g = 16$$

④ Tvånivåsystem

$$Z = 1 + e^{-\beta\epsilon}$$

$$U = \frac{1}{Z} \epsilon e^{-\beta\epsilon} = \frac{\epsilon}{e^{\beta\epsilon} + 1}$$

$$C = \frac{dU}{dT} = \frac{d\beta}{dT}\frac{dU}{d\beta} = -\frac{\epsilon}{kT^2}\frac{d}{d\beta}\frac{1}{e^{\beta\epsilon}+1}$$

$$= k\left(\frac{\epsilon}{kT}\right)^2 \frac{e^{\epsilon/kT}}{\left(e^{\epsilon/kT}+1\right)^2}$$

i) $kT \gg \epsilon \Rightarrow \quad C \to k\left(\frac{\epsilon}{2kT}\right)^2$

ii) $kT \ll \epsilon \Rightarrow \quad C \to k\left(\frac{\epsilon}{kT}\right)^2 e^{-\epsilon/kT}$