

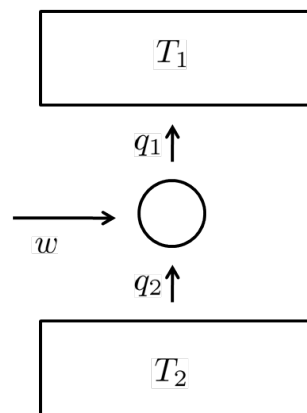
Dugga 2 i FTF140 Termodynamik och statistisk fysik för F3

Tid och plats: Onsdagen den 6 oktober 2010, kl 13.15-15.00, HA1

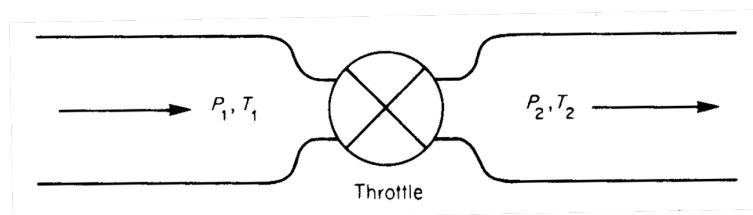
Hjälpmedel: Inga

Bedömning: Varje uppgift kan ge en halv eller en poäng som adderas till tentamensresultatet läsåret 2010/2011.

1. Figuren visar principen för ett kylskåp som arbetar mellan två värmereservoarer med de konstanta temperaturerna T_1 respektive T_2 . Bestäm kylskåpets maximala verkningskoefficient β ($\beta \equiv q_2/w$) som funktion av T_1 och T_2 .



2. En gas pressas genom en strypventil varvid trycket sjunker från P_1 till P_2 . Om värmeförluster till omgivningen kan försummas kan man med hjälp av första huvudsatsen visa att en viss termodynamisk storhet är konserverad, dvs $X_1 = X_2$. Vilken är denna termodynamiska storhet, dvs vad är X ? Vad gäller för entropin vid denna process, dvs hur är S_1 relaterad till S_2 ?



3. I "Physics Handbook" kan man hämta följande data för de tre gaserna He, N₂ och C₂H₆. Värdena gäller vid rumstemperatur.

Gas	C _P (kJ/kg·K)	C _P /C _V
A	1.04	1.404
B	1.73	1.21
C	5.2	1.66

Markera vilken gas som är A, B, respektive C!

4. Frielektronmodellen utgör en enkel beskrivning av ledningselektronerna i en metall. Energin för en elektron ges av uttrycket

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

där k är vågvektorn. De tillåtna värdena på k fås genom att lösa Schrödingerekvationen. Detta leder till tillståndstätheten

$$f(k) = \frac{V}{2\pi^2} k^2$$

där $f(k)dk$ är antalet tillstånd i intervallet $[k, k+dk]$ och V är systemets volym. För elektroner gäller dessutom att varje tillstånd kan besättas med 2 elektroner, en med spinn upp och en med spinn ned. Vidare gäller för elektroner att besättningstalet $n(\epsilon)$ vid temperaturen T ($\beta = 1/k_B T$) och kemiska potentialen μ ges av Fermi-Dirac fördelningen

$$n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}$$

Studera nu en starkt degenererat system, dvs $T \ll T_F$ där T_F är den så kallade Fermitemperaturen,

$$\epsilon_F \equiv k_B T_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3}$$

och N är antalet elektroner i volymen V . Teckna ett uttryck för systemets totala energi E . För $T = 0$ kan man visa att

$$E = \alpha N \epsilon_F$$

där α är en numerisk konstant. Bestäm värdet på α .

Lösningar

1. Energins bevarande ger oss $w = q_1 - q_2$. Om värmebad 2 reversibelt avger sin värme kommer dess entropi att minska med $\Delta S_2 = -q_2/T_2$. På samma sätt måste värmebad 1 öka sin entropi med $\Delta S_1 = q_1/T_1$. Kylmotorns entropi ändras inte, och arbetet w kan antas komma från en process med konstant entropi. Andra huvudsatsen ger oss därför

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{q_1}{T_1} - \frac{q_2}{T_2} \geq 0 \Leftrightarrow q_1 \geq \frac{T_1}{T_2} q_2.$$

Vi kan nu räkna ut den maximala verkningsgraden:

$$\beta = \frac{q_2}{w} = \frac{q_2}{q_1 - q_2} \geq \frac{q_2}{\frac{T_1}{T_2} q_2 - q_2} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

2. För ett flöde gäller $\Delta H = Q + W$. Eftersom en strypventil inte har några rörliga delar utförs inget arbete på gasen. Enligt uppgiften är värmeflödet likaså noll. Detta ger direkt att entalpin H är bevarad. Processen är irreversibel, dvs. $S_2 > S_1$. Se uppgift 5.38 för detaljer och ett explicit uttryck för entropiförändringen.
3. Vid rumstemperatur borde gasen kunna approximeras som en idealgas. För en idealgas vet vi att $C_p = C_v + nR$. Detta ger att

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{nR}{C_v}.$$

Om vi lyckas uppskatta C_v för gaserna borde vi alltså kunna identifiera dem. Samtliga gaser har tre translationsfrihetsgrader per molekyl. Efter som dessa kan behandlas klassiskt ger oss ekvipartitionsteoremet en medeltranslationsenergi $E_{\text{trans}} = 3NkT/2 = 3nRT/2$, vilket direkt ger oss värmekapaciteten från translationen: $C_v^{\text{trans}} = 3nR/2$. Frågan är nu vad de inre frihetsgraderna ger för ytterligare tillskott till värmekapaciteten.¹

Helium har vid rumstemperatur inga relevanta interna frihetsgrader (för att excitera dess elektroner krävs energier i storleksordningen $10 \text{ eV} \gg kT$). För helium finner vi alltså

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{nR}{3nR/2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1.66.$$

Kvävgas har två ytterligare inre frihetsgrader: rotation och vibration. Eftersom rumstemperatur är betydligt högre än rotationstemperaturen

¹Se avsnitt 7.5 och facit till uppgift 7.1 i Mandl.

för alla diatomiska molekyler borde rotationsfrihetsgraderna kunna behandlas klassiskt. En diatomisk molekyl har två kvadratiska rotationsfrihetsgrader, och ekvipartitionsteoremet ger oss därför $C_v^{rot} \approx nR$. För att "låsa upp" vibrationsfrihetsgraderna hos en diatomisk molekyl krävs högre temperaturer än rumstemperatur, och vi borde därför ha $C_v^{vib} \approx 0$. För kvävgas har vi därför

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{nR}{C_v^{trans} + C_v^{rot} + C_v^{vib}} = 1 + \frac{1}{3/2 + 1 + 0} = \frac{7}{5} = 1.4.$$

Etan (C_2H_6) är mer komplicerad att räkna på, dock kan vi konstatera att den borde ha alla frihetsgrader som kvävgas har, och dessutom ännu en rotationsfrihetsgrad och kanske rentav några upplåsta vibrationsfrihetsgrader. Detta ger oss $C_v > 5/2nR$ och alltså

$$\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{nR}{C_v} < \frac{7}{5},$$

vilket stämmer med det återstående värdet $C_p/C_v = 1.21$.

Vi finner alltså:

He - C

N_2 - A

C_2H_6 - B.

Att denna tilldelning är kompatibel även med kolumnen som anger C_p i $J/(kgK)$ förstår man om man betänker att helium har betydligt lägre molmassa än de övriga, vilket ger fler partiklar per kg och alltså högre värmekapacitet. Etan och kvävgas har ungefär samma molmassa, men etan har något högre värmekapacitet per partikel, vilket ger att etan har högre värmekapacitet per kg än kvävgas.

4. Den totala energin för systemet ges av

$$E = \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) 2f_\epsilon(\epsilon) d\epsilon, \quad (1)$$

där $f_\epsilon(\epsilon)d\epsilon$ är antalet tillstånd med energi mellan ϵ och $\epsilon + d\epsilon$, och tvåan kommer sig av att varje tillstånd kan besättas med två elektroner. Eftersom energin är en funktion av vågtalet k (och vice versa) kan $f(k)$ och $f_\epsilon(\epsilon)$ relateras genom

$$f_\epsilon(\epsilon)d\epsilon = f(k)dk = f(k(\epsilon))\frac{dk}{d\epsilon}d\epsilon = f\left(\frac{\sqrt{2m\epsilon}}{\hbar}\right)\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} = \frac{m^{3/2}V}{\sqrt{2\pi^2\hbar^3}}\sqrt{\epsilon}d\epsilon.$$

Besättningstalet $n(\epsilon) = (e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1)^{-1}$ anger det förväntade antalet elektroner i ett tillstånd med energi ϵ . När $T \rightarrow 0$ ser vi att uttrycket

förenklas till

$$n(\epsilon) \rightarrow \begin{cases} 1, & \text{om } \epsilon < \epsilon_F \equiv \mu \\ 0, & \text{om } \epsilon > \epsilon_F \equiv \mu. \end{cases}$$

Insättning i ekvation 1 ger

$$E = \int_0^\infty \epsilon n(\epsilon) 2f_\epsilon(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} \frac{\sqrt{2}m^{3/2}V}{\pi^2\hbar^3} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{2\sqrt{2}m^{3/2}V}{5\pi^2\hbar^3} \epsilon_F^{5/2} \quad (2)$$

$$= \frac{(2m)^{3/2}V}{5\pi^2\hbar^3} \epsilon_F^{3/2} \cdot \epsilon_F. \quad (3)$$

Värdet på ϵ_F kan bestämmas utifrån kravet att systemet ska ha N elektroner. Resultatet av denna uträkning är given i uppgiften:

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \Rightarrow \epsilon_F^{3/2} = \left(\frac{h^2}{2m} \right)^{3/2} \frac{3}{8\pi} \frac{N}{V}.$$

Insättning i 2 ger

$$E = \frac{(2m)^{3/2}V}{5\pi^2\hbar^3} \left(\frac{h^2}{2m} \right)^{3/2} \frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \cdot \epsilon_F = \frac{h^3}{(2\pi\hbar)^3} \frac{3}{5} N \epsilon_F = \frac{3}{5} N \epsilon_F,$$

d.v.s. $\alpha = 3/5$.