CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Teknisk fysik

Dugga i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140)

Tid och plats: Torsdagen den 17 november 2005 kl. 10.00–11.45 i FL51, FL61 och FL64.

Examinator: Mats Granath, tel 772 31 75

Hjälpmedel: En kort formelsamling bifogas. Inga andra hjälpmedel är tillåtna.

Bedömning: Var och en av de fyra uppgifterna kan ge 1 poäng som tillgodoräknas på tentan. Halva poäng kan utdelas.

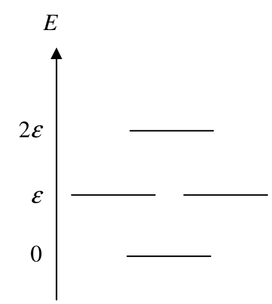
Namn: ………………………………………………………….

Födelsedatum: ………………………………………………………….

Skriv namn och födelsedatum på alla inlämnade blad. Motivera noga alla svar.

1. För en klassisk ideal gas gäller att energin E per mol kan skrivas som $C_V T$, förutsatt att den molära värmekapaciteten C_V är konstant inom det aktuella temperaturområdet. Visa med utgångspunkt från första huvudsatsen att vid en adiabatisk process gäller sambandet $TV^{\gamma-1}$ = konstant, där koefficienten γ ("den adiabatiska koefficienten") är lika med kvoten C_p/C_V.

2. De möjliga energierna för ett visst system är 0, ε och 2ε. Den lägsta och den högsta energinivån är icke-degenererade. Mellannivån är en dubblett, dvs den innehåller två olika kvanttillstånd.



   (a) Bestäm tillståndssumman ("the partition function") Z för systemet som funktion av temperaturen T.

   (b) Bestäm systemets medelenergin E som funktion av temperaturen T.

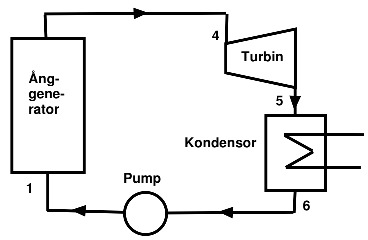
   (c) Vad blir systemets medelenergi E och entropi S i högtemperaturgränsen (($k_B T >> \varepsilon$)?

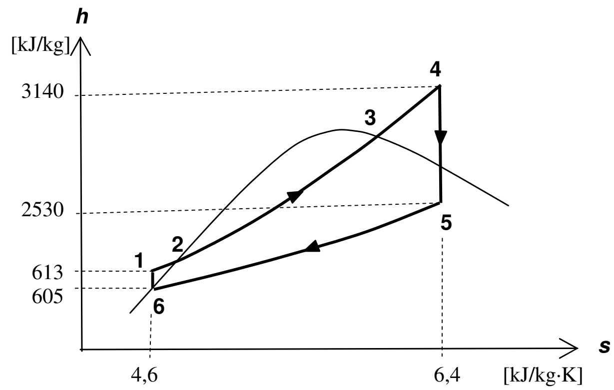
3. Ett hus uppvärms med hjälp av en bergvärmepump som tar in värme från grundvattnet vid temperaturen T_L och avger värme till huset vid temperaturen T_H. Pumpens värmefaktor β' definieras som

$$\beta' = \frac{Q_H}{W}$$

   där W är det arbete (i form av elektrisk energi) som krävs för att driva pumpen och Q_H är den mängd värme som pumpen avger till huset. Använd entropibetraktelser för att härleda ett uttryck för det högsta möjliga värdet på värmefaktorn vid givna värden på temperaturerna T_L och T_H.

4. Nedanstående figur är en principskiss över en ångturbinanläggning med tillhörande entalpi-entropi-diagram (Mollierdiagram). Ångan bildas i en ånggenerator där vatten kokas med hjälp av tillförd värme från någon värmekälla (kol, naturgas, uran,…). Ångan går sedan in i turbinen där mekaniskt arbete produceras. När ångan kommer ut från turbinen är den avkyld och innehåller en del vattendroppar. Den går in i en kondensor (kylare) där den helt och hållet kondenserar till vatten som sedan pumpas tillbaka till ånggeneratorn.





(a) Hur mycket arbete uträttas av turbinen per kg vatten som passerar den?

(b) Hur mycket av detta åtgår för att driva pumpen?

(c) Hur mycket värme per kg vatten behöver tillföras i ånggeneratorn för att driva anläggningen?

(d) Hur stor är anläggningens verkningsgrad?

Uppgifterna (a) – (c) klarar man med enkel huvudräkning. I uppgift (c) behöver du i avsaknad av räknedosa bara skriva ner den aktuella kvoten och göra en grov uppskattning av svaret.

<u>Liten formelsamling</u>

Ideala gaser:

$$pV = nRT$$

$$C_p - C_V = R$$

Egenskaper för entropin S och entalpin H:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} \qquad \text{(vid reversibel process)}$$

$$\Delta H = Q + W_u \qquad \text{(allmänt)}$$

Symbolen W_u skall här tolkas som ”nyttigt arbete” eller ”tekniskt utvinnbart arbete”.

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Teknisk fysik
Göran Niklasson

Lösningar till duggan i Termodynamik och statistisk fysik för F3 (FTF140) 2005-11-17

Uppgift 1

Utgå från första huvudsatsen på differentialform:

$$dE = \delta Q + \delta W$$

där dE är ändringen i inre energi, δQ är tillförd värme och δW är på systemet uträttat arbete. Vid en reversibel adiabatisk process gäller att $\delta Q = 0$ och $\delta W = -pdV$. För en ideal gas gäller dessutom att $dE = nC_V dT$ där n är antalet mol. Vi finner alltså att

$$nC_V dT = -pdV$$

Eftersom vi söker ett samband mellan T och V eliminerar vi trycket med hjälp av ideala gaslagen, $p = nRT/V$. Det ger

$$C_V \frac{dT}{T} = -R\frac{dV}{V} = -\left(C_p - C_V\right)\frac{dV}{V}$$

där vi i sista steget utnyttjat relationen $C_p - C_V = R$ som gäller för alla ideala gaser (men inte för andra system). Vi inför beteckningen $\gamma = C_p/C_V$ och integrerar:

$$\frac{dT}{T} = -\left(\gamma - 1\right)\frac{dV}{V}$$

$$\int \frac{dT}{T} = -\left(\gamma - 1\right)\int \frac{dV}{V}$$

$$\ln T = -\left(\gamma - 1\right)\ln V + \text{ konstant}$$

$$\ln\left(TV^{\gamma-1}\right) = \text{ konstant}$$

Därmed har vi visat att produkten $TV^{\gamma-1}$ är konstant

Uppgift 2

(a) Tillståndssumman blir

$$Z = 1 + 2e^{-\varepsilon/k_BT} + e^{-2\varepsilon/k_BT} = \left(1 + e^{-\varepsilon/k_BT}\right)^2$$

(b) Medelenergin blir

$$E = \frac{1}{Z}\left(0 + 2\varepsilon e^{-\varepsilon/k_BT} + 2\varepsilon e^{-2\varepsilon/k_BT}\right) = \frac{2\varepsilon e^{-\varepsilon/k_BT}\left(1 + e^{-\varepsilon/k_BT}\right)}{\left(1 + e^{-\varepsilon/k_BT}\right)^2} = \frac{2\varepsilon}{\left(1 + e^{\varepsilon/k_BT}\right)}$$

(c) I högtemperaturgränsen blir alla tillstånd lika sannolika (alla boltzmannfaktorer får värdet 1). Medelenergin blir då ε. Entropin blir $k_B \ln(4)$, eftersom det finns fyra möjliga tillstånd.

Uppgift 3

Den sammanlagda entropiändringen för universum blir skillnaden mellan entropiökningen för huset och entropiminskningen för grundvattnet (själva pumpens entropi ändras kanske också en aning på grund av förslitning och korrosion, men den ändringen är försumbar i det här sammanhanget). Villkoret att entropiändringen för universum måste vara positiv ger

$$\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_L}{T_L} \geq 0$$

där Q_L är den värme som grundvattnet avger. Ur första huvudsatsen följer att

$$Q_L = Q_H - W$$

vilket ger

$$\frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_H - W}{T_L} \geq 0$$

$$Q_H\left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_H}\right) \leq \frac{W}{T_L}$$

$$\beta' = \frac{Q_H}{W} \leq \frac{T_H}{T_H - T_L}$$

Den högsta möjliga värmefaktorn är alltså $T_H/(T_H - T_L)$.

Uppgift 4

I alla fyra delprocesserna gäller att summan av den tillförda värmen och det utifrån uträttade arbetet är lika med ändringen i entalpi.

(a) I turbinen tillförs ingen värme. Det på turbinaxeln uträttade arbetet W_{turbin} är alltså lika med minskningen i entalpi mellan punkterna 4 och 5 i diagrammet:

$$W_{turbin} = 3140 \text{ kJ/kg} - 2530 \text{ kJ/kg} = 610 \text{ kJ/kg}$$

(b) I pumpen tillförs inte heller någon värme. Det arbete som pumpen måste uträtta på vattnet är alltså lika med entalpiökningen mellan punkterna 6 och 1 i digrammet:

$$W_{pump} = 613 \text{ kJ/kg} - 605 \text{ kJ/kg} = 8 \text{ kJ/kg}$$

(c) I ånggeneratorn uträttas inget externt arbete. Den tillförda värmen är alltså lika med entalpiökningen mellan punkterna 1 och 4 i digrammet:

$$Q_{förångning} = 3140 \text{ kJ/kg} - 613 \text{ kJ/kg} = 2527 \text{ kJ/kg}$$

(d) Anläggningens verkningsgrad η är kvoten mellan det arbete man får ut och den värme som måste tillföras:

$$\eta = \frac{W_{turbin} - W_{pump}}{Q_{förångning}} = \frac{610 - 8}{2527} = \frac{602}{2527} = 24\ \%$$