

Sektionen för fysik och teknisk fysik
Mats Granath/Aleksandar Matic

Dugga i Termodynamik och Statistisk Fysik (FTF140)

Tisdagen den 16:e November 2004, 13.00-15.00, GD-salen

Skriv namn och födelsedatum på alla inlämnade blad. Motivera noga alla svar.

Namn:

Födelsedatum:

1. Bestäm $C_p - C_v$ för en idel gas. (2p)

2. Ett slutet (isolerat) system består av två delsystem A och B som bara kan utbyta värme.

(a) Använd andra huvudsatsen för att härleda jämviktsvilkoret och därigenom definiera temperaturen för dom två systemen. (1p)

(b) Visa att din definition av temperatur är sådan att värme flödar från det system med högre temperatur till det med lägre. (1p)

3. a) I fasdiagrammet för ett enkomponentsystem finns två unikt definierade punkter, trippelpunkten och den kritiska punkten. Beskriv tillståndet för systemet i dessa två punkter. Skissa fasdiagrammet för ett enkomponentsystem i P-T planet och markera trippelpunkten och kritiska punkten. (1p)

b) Med start i en punkt i ångfasen för ett enkomponentsystem minskas volymen isotermt tills systemet är i vätskefasen. Rita in processen P-T diagrammet och i ett P-V diagram. Förklara vad som händer under denna process. (1p)

4. Ett mikroskopiskt tvånivåsystem har två ickedegenererade tillstånd med energi $+\epsilon$ respektive $-\epsilon$. Antag att N sådana system är fixerade i ett gitter och att dom endast växelverkar svagt med varandra och omgivningen.

(a) Beräkna medelenergin per tvånivåsystem vid en temperatur T. Vad är medelenergin vid mycket låga $T=0$ och mycket höga ($T=\infty$) temperaturer? (1p)

(b) Vad är entropin för hela systemet bestående av N tvånivåsystem i ovanstående två gränser? (1p)

Sektionen för fysik och teknisk fysik
Mats Granath/Aleksandar Matic

Dugga in Thermodynamics and Statistical Physics (FTF140)

Tuesday November 16th 2004, 13.00-15.00, GD-salen

Write name and birth date on all papers that you hand in.

Motivate all your answers carefully.

Name:

Personnummer:

1. Calculate $C_p - C_v$ for an ideal gas. (2p)

2. A closed (isolated) system consists of two subsystems A and B that only can exchange heat.
 - a) Use the second law of thermodynamics to derive the equilibrium condition and thereby define the temperature for the two systems. (1p)
 - b) Show that your definition of temperature is such that heat flows from the subsystem at higher temperature to the one at lower. (1p)

3. a) In the phase diagram for one component system there are two uniquely defined points, the triple point and the critical point. Describe the state of the system in these two points. Draw a schematic phase-diagram for a single component system in the P-T plane and indicate the position of the triple and the critical points. (1p)
- b) Starting at a point where the system is in the vapour phase the volume is decreased isothermally until the system is in the liquid phase. Draw this process in the P-T diagram and in a P-V diagram. Explain what happens during this process. (1p)

4. A microscopic two-level system has two non-degenerate states with energy $+\varepsilon$ and $-\varepsilon$. Assume that N such systems are fixed to a lattice and that they interact weakly with each other and the surrounding.
 - a) Calculate the average energy per two-level system at a temperature T . What is the average energy at very low, $T=0$, and very high, $T=\infty$, temperature? (1p)
 - b) What is the entropy for the whole system comprised of N -two level systems in the same limits as above ($T=0$ and $T=\infty$). (1p)

Lösningar till dugga i Termodynamik och Statistisk fysik 2004-11-16

1. Bestäm C_p - C_v för en idel gas.

$$C_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V \text{ molara isokora värmekapaciteten}$$

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P \text{ molara isobara värmekapaciteten}$$

Första huvudsatsen $dQ = dE + PdV$

För en ideal gas är inre energin endast beroende av temperaturen:

$$E = E(T)$$

Det ger:

$$C_v = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V$$

$$C_p = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_P + \frac{P}{n} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$$

För en ideal gas gäller att $PV = nRT$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{nR}{P} \Rightarrow C_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_P + R$$

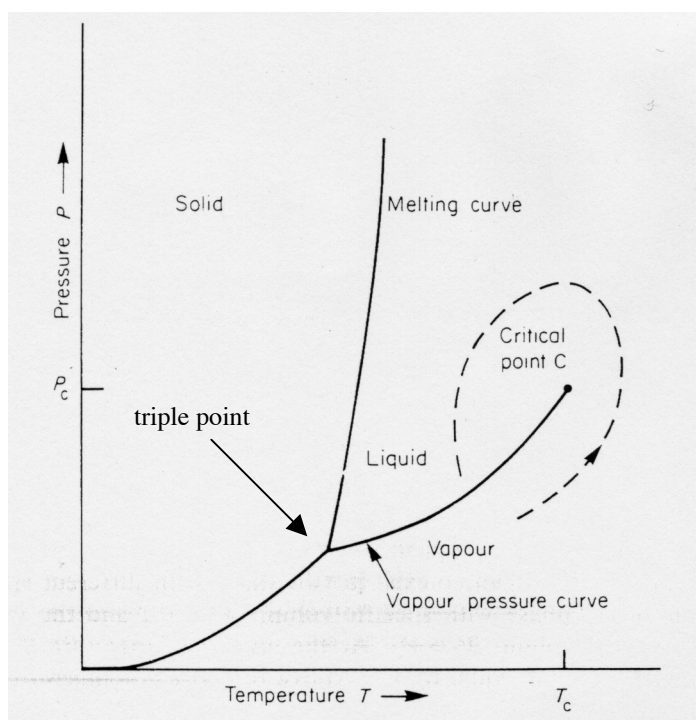
Vi får då:

$$C_p - C_v = R$$

3. a) I fasdiagrammet för ett enkomponentsystem finns två unikt definierade punkter, trippelpunkten och den kritiska punkten. Beskriv tillståndet för systemet i dessa två punkter. Skissa fasdiagrammet för ett enkomponentsystem i P-T planet och markera trippelpunkten och kritiska punkten. (1p)

I trippelpunkten har vi tre faser i jämvikt: fast fas, vätskefas och ångfas. Här är gibbs fria energi per partikel lika för alla tre faserna: $g_{\text{fast}}(T,P) = g_{\text{vätska}}(T,P) = g_{\text{ång}}(T,P)$. Egenskaper som specifik entropi eller volym är dock olika för de tre faserna.

I kritiska punkten försvinner skillnaden i specifik entropi och specifik volym mellan ångfasen och vätskefasen. Detta medför att ångbildningsentalpin blir noll och man kan inte längre tala om två olika faser.



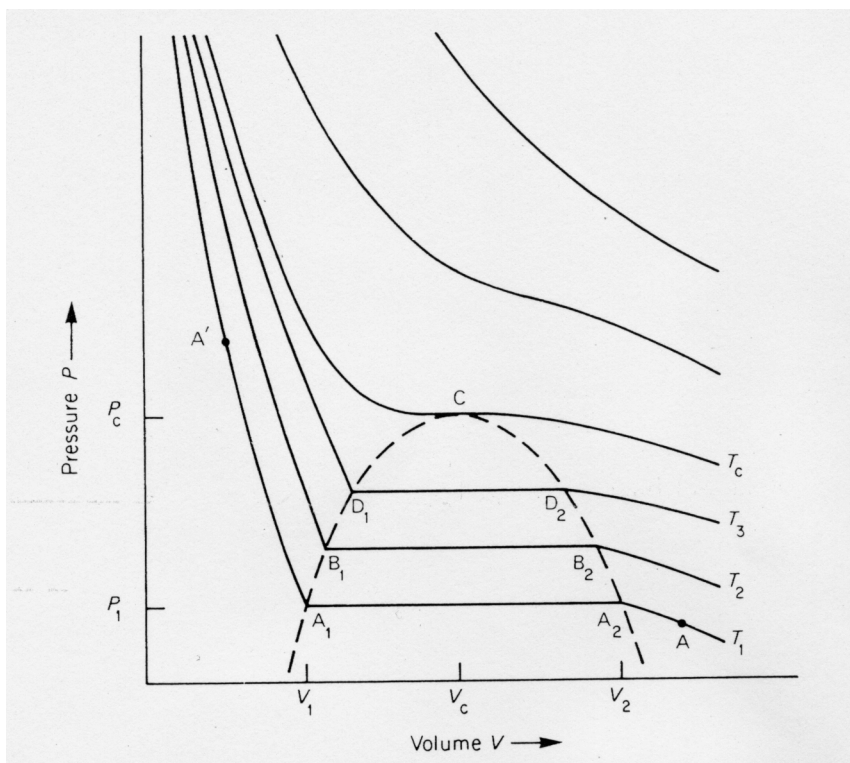
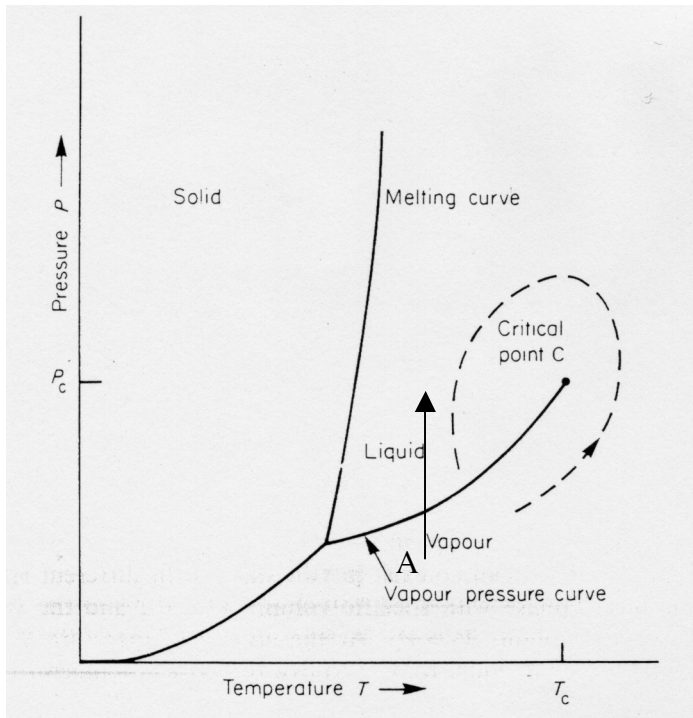
b) Med start i en punkt i ångfasen för ett enkomponentsystem minskas volymen isotermt tills systemet är i vätskefasen. Rita in processen i P-T diagrammet och i ett P-V diagram. Förklara vad som händer under denna process. (1p)

Vi börjar i en punkt, markerad A i P-T och P-V diagrammen nedan, i ångfasen och minskar volymen isotermt. Processen förklaras bäst genom att man följer den i P-V diagrammet.

i) Mellan punkten A och A_2 (i P-V diagrammet) är systemet i ångfas och trycket ökar när vi minskar volymen. I punkten A_2 har vi mättad ånga.

ii) Fortsätter vi att minska volymen kommer nu trycket inte att öka. Kompressionen är nu både isoterm och isobar. Istället kommer ångan gradvis att kondenseras till vätska. Mellan punkterna A_2 och A_1 har vi alltså jämvikt mellan de två faserna, dock ändras andelen av respektive fas under volymminskningen. I P-T diagrammet befinner vi oss hela tiden på jämviktskurvan. I punkten A_1 har vi mättad vätska.

iii) Fortsätter vi nu att minska volymen kommer trycket snabbt att öka och vätskans låga kompressibilitet.



Uppgift 2

(a) Andra huvudsatsen: för slutet system $\Delta S \geq 0$.

Energien $E = E_A + E_B$ är konserverad, alltså $dE_A = -dE_B$. Entropin är extensiv och enda variabeln är energifördelningen mellan delsystemen, alltså $S = S_A(E_A) + S_B(E_B)$.

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S_A}{\partial E_A} dE_A + \frac{\partial S_B}{\partial E_B} dE_B \\ &= \left(\frac{\partial S_A}{\partial E_A} - \frac{\partial S_B}{\partial E_B} \right) dE_A \\ &\equiv \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) dE_A \end{aligned}$$

(b) Antag $T_A > T_B$, då har vi $dS \geq 0$ endast om $dE_A \leq 0$, dvs värme kan endast flöda från A till B.

Uppgift 4

(a) Kanonisk fördelning, $P_r = e^{-\beta E_r} / Z$, $Z = \sum_r e^{-\beta E_r}$

Medelenergin

$$E = \sum_r E_r P_r = \frac{\epsilon e^{-\beta \epsilon} - \epsilon e^{\beta \epsilon}}{e^{-\beta \epsilon} + e^{\beta \epsilon}} = -\epsilon \tanh(\beta \epsilon),$$

ger $E(T = 0) = E(\beta = \infty) = -\epsilon$, $E(T = \infty) = E(\beta = 0) = 0$. (Alternativt använd $E = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$)

(b) frihetsgraderna är oberoende: $S_{tot} = NS_1$, där S_1 är entropin för ett delsystem.

Vid $T = 0$ är systemet i grundtillståndet $E_r = -\epsilon$ så att $S_1 = k \ln \Omega = 0$. Vid $T = \infty$ är medelenergin 0, dvs båda tillstånden är lika sannolika och entropin är $S_1 = k \ln \Omega = k \ln 2$.

(Mer formellt, använd $S_1 = -k \sum_r P_r \ln P_r$, med $P(-\epsilon) = 1, 1/2$ och $P(\epsilon) = 0, 1/2$ vid $T = 0$ respektive $T = \infty$)