CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för E3, ESS017, torsdagen 25 oktober 2012.

Tid: Kl 14.00 - 18.00

Lokal: Hörsalar

Lärare: Claes Breitholtz (telefon Chalmers 3718), Viktor Larsson (telefon Chalmers 3890)

Tentamensresultaten meddelas senast den 13 oktober genom personligt e-mail. Granskning av rättningen är möjlig den 14 och 15 oktober, 12.30 -13.00, på plan 5 i E-huset (närmast Hörsalsvägen), vid rummen 5412 (Malin Sundbom) och 5435 (Nina Sundström). Var god iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 10 poäng
betyg FYRA: minst 15 poäng
betyg FEM : minst 20 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, ***Reglerteknik***-*Grundläggande teori*, av Glad och Ljung, utan anteckningar.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Typgodkänd kalkylator med handhavandeinstruktion.

LYCKA TILL!

1. Ge enbart svaret på följande frågor. Motiveringar eller beräkningar krävs inte på just denna uppgift. Rätt svar ger 0,5 poäng, medan fel svar ger noll poäng.

(a) Vilka poler har överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{2s+1} - \frac{1}{s+2}$?

(b) Är systemet ovan insignal-utsignalstabilt?

(c) Ange motsvarande viktfunktion, $g(t)$.

(d) Är frekvensfunktionen $G(j\omega)$ väldefinierad?

(e) Är $G(s)$ ett minimumfassystem?

(f) Vilken relativ dämpning ζ har systemet $G(s)$?

3 poäng

2. Betrakta överföringsfunktionen $G(s)$ i föregående uppgift. Notera att motiveringar och detaljräkningar krävs för poängbidrag på denna uppgift.

(a) Ange en tillståndsmodell på minimal form för systemet $G(s)$.

2 poäng

(b) Bestäm en observatör sådan att samtliga egenvärden till matrisen $A - KC$ hamnar i -4.

2 poäng

(c) Estimeringsfelet kan skrivas som $\tilde{x}(t) = \exp\{(A-KC)t\} \cdot \tilde{x}(0)$, dvs som produkten av övergångsmatrisen för $A - KC$ och den initiala felskattningen $\tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0)$. Bestäm, med observatörsdesign enligt (b), övergångsmatrisen för $A - KC$.

2 poäng

3. En person påstår att sambandet mellan känslighetsfunktionen $S(j\omega)$ och komplementära känslighetsfunktionen $T(j\omega)$ för ett återkopplat system är $|S(j\omega)| + |T(j\omega)| = 1$ för alla frekvenser ω. Visa genom ett eget valt motexempel att detta samband inte gäller generellt.

2 poäng

4. Ett återkopplat system har kretsöverföringen

$$L(s) = \frac{\gamma(1-s)}{(1+s)^5}$$

a) Motivera varför eller varför inte Nyquists förenklade kriterium kan användas i detta fall.

1 poäng

b) Skissera Nyquistdiagrammet för systemet $L(s)$ och avgör återkopplade systemets stabilitet då förstärkningen antas vara $\gamma = 1$. Hur stor är systemets amplitudmarginal?

3 poäng

5. Ett system har följande överföringsfunktion:

$$G(s) = \frac{10}{4s+1} \cdot e^{-s/2}$$

(a) Välj lämplig typ av regulator till systemet och bestäm dess parametrar så att nedanstående specifikationer uppfylls. Detta skall kontrolleras i ett uppritat Bodediagramför för full poäng!

1) Inga kvarstående fel efter stegstörningar tillåts.

2) Systemets fasmarginal skall vara $\phi_m = 60^o$ (eller $\pi/3$ radian).

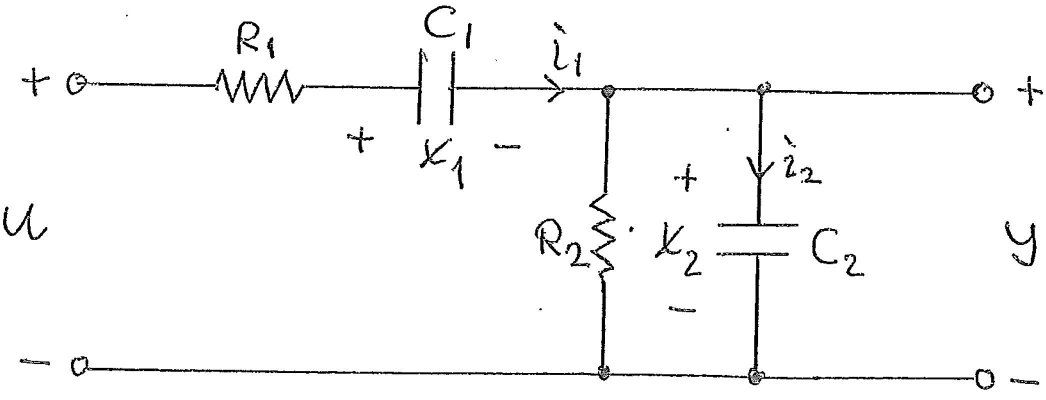
3) Överkorsningsfrekvensen får inte understiga $\omega_c = 1$ rad/sek.

3 poäng

(b) Kontrollera i ett fullständigt Bodediagramför att kravspecifikationerna 2 och 3 uppfyllts.

1 poäng

6. Ett nät beskrivs i nedanstående figur där instorheten är spänningen u, medan utstorheten är spänningen y (Nätet utgör den fasvridande delen av en *Wien-brygga*, vanligt förekommande i elektroniska oscillatorkopplingar.):



(a) Visa att, om spänningarna över kapacitanserna väljs som tillståndsstorheter, nedanstående linjära tillståndsmodell beskriver systemet:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1/R_1C_1 & -1/R_1C_1 \\ -1/R_1C_2 & -(1/R_2C_2 + 1/R_1C_2) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1/R_1C_1 \\ 1/R_1C_2 \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

3 poäng

(b) Bestäm överföringsfunktionen $G(s)$ från u till y. Kan $|G(j\omega)|$ kan ha ett lokalt maximum för någon frekvens ω^* ?

3 poäng

Lösn[illegible]ng t[illegible] Reglerteknik E, ES 017, [illegible]21025

1. (a) $s = -1/2$ och $s = -2$.

(b) Ja! (s_1 och $s_2 \in$ VHP)

(c) $g(t) = \frac{1}{2} e^{-t/2} - e^{-2t}$

(d) Ja! (s_1 och $s_2 \in$ VHP)

(e) $G(s) = \frac{s+2-(2s+1)}{(2s+1)(s+2)} = \frac{1-s}{(2s+1)(s+2)}$

Nej! (ett nollställe i HHP)

(f) $G(s) = \frac{1-s}{2s^2+5s+2} = \frac{(1-s)/2}{s^2+\frac{5}{2}s+1} = \frac{\cdots}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2}$

$\Rightarrow \omega_0 = 1 \Rightarrow 2\xi\omega_0 = 2\xi \cdot 1 = 5/2 \Rightarrow \xi = 1.25$

---

2. (a) Obsformen (t.ex):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Överf.fkn en är $G(s) = \frac{1-s}{(2s+1)(s+2)}$ där det framgår att förkortningar inte kan göras. Alltså är antalet poler till $G(s)$ = antalet egenvärden till matrisen $\begin{pmatrix} -5/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; dvs 2 stycken $\Rightarrow$ Systemet är då beskrivet i tillståndsform med minimalt antal tillståndsvariabler. ($\Leftrightarrow$ Styrbart och observerbart, vilket hade varit alternativet att kolla!)

2. (b) $$A - KC' = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} (1 \ \ 0) =$$

$$= \begin{pmatrix} -5/2 - k_1 & 1 \\ -1 - k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A + KC) \equiv (\lambda + 4)^2 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{5}{2} + k_1 & -1 \\ 1 + k_2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \left(\frac{5}{2} + k_1\right)\lambda + 1 + k_2 \equiv$$

$$\equiv \lambda^2 + 8\lambda + 16 \Rightarrow$$

$$k_1 = 8 - 2.5 = 5.5 \text{ och } k_2 = 16 - 1 = 15$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x})$$

där $\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} -2.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}$ $\underline{\underline{B = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}}}$ $\underline{\underline{C = (1 \ \ 0)}}$ $\underline{\underline{K = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 15 \end{pmatrix}}}$

(c) $$A - KC = \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ -16 & 0 \end{pmatrix}; \qquad = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} s+8 & -1 \\ 16 & s \end{pmatrix}^{-1} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{\underbrace{s^2 + 8s + 16}_{=(s+4)^2}} \begin{pmatrix} s & 1 \\ -16 & s+8 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{s+4-4}{(s+4)^2} & \frac{1}{(s+4)^2} \\ \frac{-16}{(s+4)^2} & \frac{s+4+4}{(s+4)^2} \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-4t} - 4t \cdot e^{-4t} & t e^{-4t} \\ -16t \cdot e^{-4t} & e^{-4t} + 4t \cdot e^{-4t} \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 - 4t & t \\ -16t & 1 + 4t \end{pmatrix}}}$$

3. Välj $L(s) = \gamma/s$, där $\gamma > 0$ är en konstant.

$$T(s) = \frac{\gamma/s}{1+\gamma/s} = \frac{\gamma}{s+\gamma} \Rightarrow |T(j\omega)| = \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+\gamma/s} = \frac{s}{s+\gamma} \Rightarrow |S(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}$$

$$V = |S(j\omega)| + |T(j\omega)| = \frac{\omega+\gamma}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}} \Rightarrow V^2 = \frac{\omega^2+2\gamma\omega+\gamma^2}{\omega^2+\gamma^2} =$$

$$= 1 + \frac{2\gamma\omega}{\omega^2+\gamma^2} > 1 \text{ för } \omega > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{1+\frac{2\gamma\omega}{\omega^2+\gamma^2}} > 1 \text{ för } \omega > 0 \quad \blacksquare$$

$\therefore$ <u>Påståendet att $|T(j\omega)| + |S(j\omega)| \equiv 1$ är fel!</u>

---

4. (a) $L(s) = \dfrac{\gamma(1-s)}{(1+s)^5} \Rightarrow s_1 = s_2 = \ldots = s_5 = -1$

dvs samtliga poler strikt i VHP $\Rightarrow$ Nyquist förenklade kriterium kan användas.

(b) $\gamma = 1 \Rightarrow L(j\omega) = |L(j\omega)| \cdot e^{j\angle L(j\omega)}$

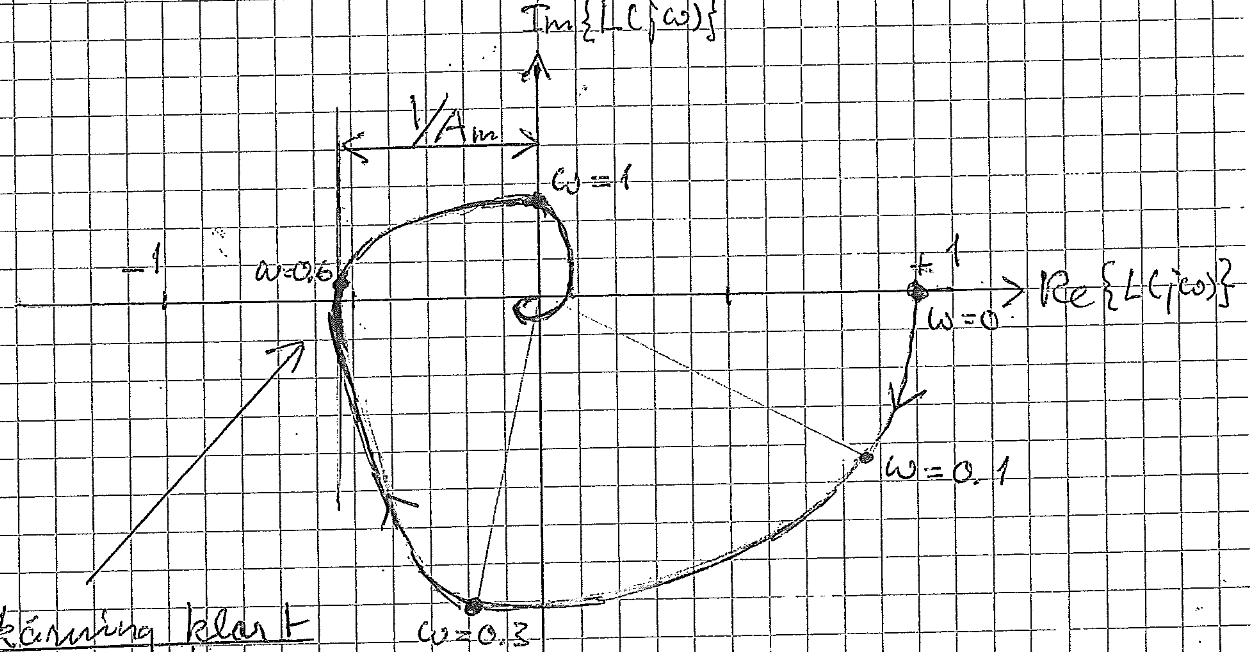
där $\angle L(j\omega) = -6\,\mathrm{atan}\,\omega$ och

$$|L(j\omega)| = \frac{\sqrt{1+(-\omega)^2}}{(\sqrt{1+\omega^2})^5} = \frac{1}{(\sqrt{1+\omega^2})^4} =$$

$$= \frac{1}{(1+\omega^2)^2}$$

4. (b) (fortsättning)

ω	$\lvert L \rvert$	$\angle L$
0	1	0°
0.1	0.98	-34°
0.3	0.84	-100°
0.6	0.54	-186°
1	0.25	-270°
∞	0	$-\infty$



Skärning klart till vänster om pkten −1 $\Longrightarrow$

Stabilt återk. system!

ω_π (fasöverkorsningsfrekvensen) är något lägre än 0.6 vilket framgår av N-diagrammet

$-180^\circ = -6 \cdot \mathrm{atan}\,\omega_\pi \Rightarrow 30^\circ = \mathrm{atan}\,\omega_\pi \Rightarrow \omega_\pi = 1/\sqrt{3}$

$$A_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \left(1+\omega_\pi^2\right)^2 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

eller $A_m = 20\log(16/9) = \underline{5\ dB}$

5. $G(s) = \frac{10}{4s+1} \cdot e^{-s/2}$

Inga kvarstående fel efter stegstörning
$\Rightarrow$ Välj PI eller PID! (PI enklast om det går!)

$\therefore \quad F(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$

$L(s) = G(s)F(s) = \frac{K_p(1+T_i s)}{T_i s} \cdot \frac{10}{4s+1} \cdot e^{-s/2}$

Välj $\underline{T_i = 4} \Rightarrow L(s) = \frac{2.5 * K_p}{s} \cdot e^{-s/2}$

$\varphi_m = \pi - \pi/2 - \omega_c/2 = \pi/3 \Rightarrow$

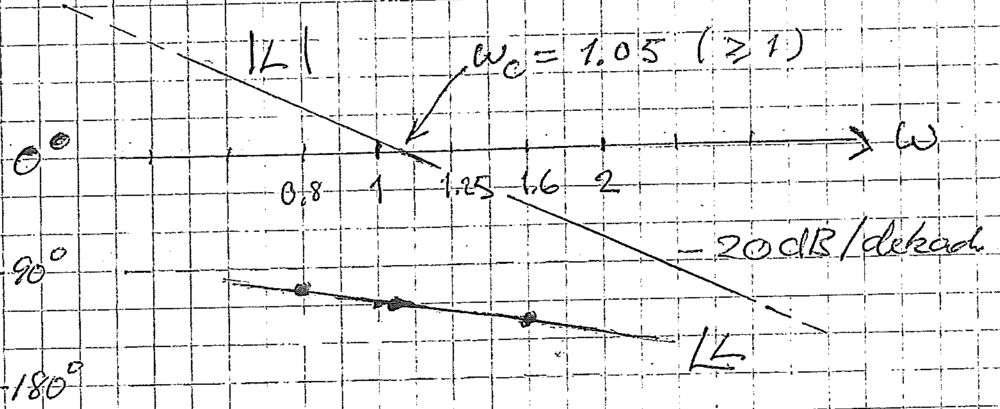
$\omega_c/2 = \pi/6 \Rightarrow \omega_c = \underline{\pi/3}$ rad/s ≥ 1
(≈ 1.05)

$|L(j\omega_c)| = \frac{2.5 K_p}{\omega_c} \cdot \underbrace{\left|e^{-j\omega_c/2}\right|}_{=1} = 1$

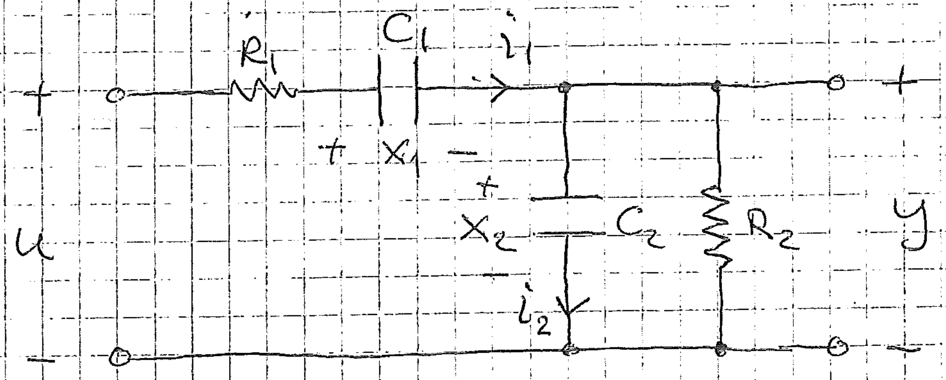
$\Rightarrow \underline{K_p} = 0.4 * \omega_c \approx \underline{0.42}$

$\therefore \quad F(s) = 0.42\left(1 + \frac{1}{4s}\right)$

Bodediagram över kretsöverföringen $L = \frac{1.05}{s} e^{-s/2}$



6. (a)



$$\begin{cases} u - R_1 i_1 - x_1 - x_2 = 0 \\ i_1 = C_1 \dot{x}_1 \,, \quad i_2 = C_2 \dot{x}_2 \\ x_2 - R_2(i_1 - i_2) = 0 \end{cases}$$ (Kirchhoffs lagar)

$$\left.\begin{aligned} R_1 C_1 \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 + u \\ R_2 C_1 \dot{x}_1 - R_2 C_2 \dot{x}_2 &= x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} R_1C_1 & 0 \\ R_2C_1 & -R_2C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\underline{\underline{\dot{x}}} = \frac{-1}{R_1C_1R_2C_2} \begin{bmatrix} -R_2C_2 & 0 \\ -R_2C_1 & R_1C_1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/R_1C_1 & 0 \\ 1/R_1C_2 & -1/R_2C_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \right\} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1/R_1C_1 & -1/R_1C_1 \\ -1/R_1C_2 & -(1/R_2C_2 + 1/R_1C_2) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/R_1C_1 \\ 1/R_1C_2 \end{pmatrix} u}}$$

$$y = x_2 \Rightarrow \underline{\underline{y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x}}$$

6. (b) $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

Inför $1/R_1C_1 = \nu_1$, $1/R_2C_2 = \nu_2$, $1/R_1C_2 = \nu_{12}$

$$\underline{G(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+\nu_1 & -\nu_1 \\ -\nu_{12} & s+\nu_2+\nu_{12} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_{12} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s+\nu_1)(s+\nu_2+\nu_{12}) - \nu_1\nu_{12}} *$$

$$* \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+\nu_2+\nu_{12} & -\nu_1 \\ -\nu_{12} & s+\nu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2 + (\nu_1+\nu_2+\nu_{12})s + \nu_1\nu_2} \begin{pmatrix} -\nu_{12} & s+\nu_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_{12} \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\nu_1 s}{s^2 + (\nu_1+\nu_2+\nu_{12})s + \nu_1\nu_2}}} \qquad \begin{cases} \nu_1 = \dfrac{1}{R_1C_1} \\ \nu_2 = \dfrac{1}{R_2C_2} \\ \nu_{12} = \dfrac{1}{R_1C_2} \end{cases}$$

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{\nu_{12}^2\omega^2}{\underbrace{(\omega^2 - \nu_1\nu_2)^2}_{\geq 0} + (\nu_1+\nu_2+\nu_{12})^2\omega^2} =$$

$$= \frac{\nu_{12}^2\omega^2}{\omega^4 + \underbrace{(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_{12}^2 + 2\nu_1\nu_{12} + 2\nu_2\nu_{12})}_{>0}\omega^2 + \underbrace{\nu_1^2\nu_2^2}_{>0}}$$

Sätt (t.ex.) $\omega^2 = x$ och studera uttrycket

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + \alpha x + \beta} \quad , \alpha > 0 \, , \beta > 0 \, , x \geq 0$$

Man inser (med elementär matematisk analys) att uttrycket har ett lokalt maximum för ett visst $x^* = \omega_0^{*2}$ (Detta behöver ej beräknas!)