CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för E3, ESS017, torsdagen 23 augusti 2012.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: M

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten meddelas senast den 11 september genom personligt e-mail. Granskning av rättningen är möjlig den 12 och 13 september, 12.30 -13.00, på plan 5 i E-huset (närmast Hörsalsvägen), vid rum 5422 (Viktor Larsson). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 25 poäng. Räknefel leder normalt till en halv poängs avdrag. Direkta följdfel leder inte till ytterligare avdrag såvida ingen orimlighet uppstår. Ofullständig lösning leder till större poängavdrag. Det gäller även fullständigt löst uppgift där grövre felaktigheter förekommer, eller om svaret är orimligt. Notera även att svaret på en ställd fråga alltid måste motiveras för poängbidrag. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 10 poäng
betyg FYRA: minst 15 poäng
betyg FEM : minst 20 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, ***Reglerteknik**-Grundläggande teori*, av Glad och Ljung, utan anteckningar.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Typgodkänd kalkylator med handhavandeinstruktion.

LYCKA TILL!

1. a) Ett system med överföringsfunktionen $G(s) = (1-10s)/(1+20s)^2$ skall P-regleras. Regulatorns parameter ökas från noll tills det återkopplade systemet självsvänger med konstant amplitud. Bestäm periodtiden hos självsvängningen, liksom motsvarande reglerförstärkning.

2 poäng

b) Ange överföringsfunktionen för motsvarande minimumfassystem, utgående från uppgift a.

1 poäng

c) Ange en tillståndsmodell för $G(s)$ på minimal form, vilket skall motiveras.

2 poäng

2. Ena sidan av en tunn metallfilm av tjocklek b och stor yta bestrålas likformigt av en styrbar värmekälla vars temperatur är $T_e(t)$. Metallfilmens specifika värme är c_p, densiteten är ρ och temperaturen är $T_s(t)$ (gradienter i filmen försummas). Effektflödet per ytenhet ges av Stefan-Boltzmanns strålningslag $p_h = \sigma(T_e^4 - T_s^4)$. Andra sidan av metallfilmen kyls av strömmande vatten, där flödet är så stort att vattentemperaturen $T_c(t)$ påverkar filmtemperaturen men inte tvärtom. Kyleffekten per ytenhet är $p_c = \alpha(T_s - T_c)$. Både σ och α anses vara konstanter. Följande dynamiska modell beskriver då systemet

$$\frac{d}{dt}\{b\rho c_p T_s(t)\} = p_h(t) - p_c(t)$$

där utsignalen fås genom pyrometrisk mätning av $T_s(t)$, medan $T_e(t)$ och $T_c(t)$ är insignaler och där arbetspunkten kan anses given: T_{s0}, T_{e0}, T_{c0}.

a) Visa att överföringsfunktionerna för små variationer runt arbetspunkten från insignalerna till utsignalen är respektive:

$$\frac{\Delta T_s(s)}{\Delta T_e(s)} = \frac{4\sigma T_{e0}^3}{b\rho c_p s + 4\sigma T_{s0}^3 + \alpha}, \quad \frac{\Delta T_s(s)}{\Delta T_c(s)} = \frac{\alpha}{b\rho c_p s + 4\sigma T_{s0}^3 + \alpha}$$

3 poäng

b) Betrakta variationen i kyltemperatur som en mätbar störning och bestäm en framkoppling som eliminerar dess inverkan. Rita ett blockdiagram över hela styrsystemet, som dessutom innehåller även en PI-regulator. (Design av PI-regulatorn ingår inte i uppgiften!)

2 poäng

3. För en värmeväxlare i ett visst fartygsmaskineri, beskriven av överföringsfunktionen $G(s)$, är styrstorheten ett ventilläge och utstorheten är en uppmätt temperatur. Experimentellt har man bestämt belopp och fas för några olika frekvenser:

Tabell 1:

ω (rad/s)	$\lvert G(i\omega)\rvert$ (dB)	$\arg G(i\omega)$ (grader)
0,1	10	-30
0,2	8,5	-50
0,4	7	-78
0,8	2	-123
1,6	-7	-180
2,5	-14,5	-220
4,0	-22	-261
8,0	-36	-305

Man vill använda denna information till att reglera värmeväxlaren, så att inga kvarstående fel efter stegstörningar vid processingången kan uppstå. Man har krav på stabilitet motsvarande en fasmarginal av minst 55 grader vid en överkorsningsfrekvens av minst 0,64 rad/min. Föreslå lämplig regulatortyp, bestäm lämpliga parametervärden, och upprita ett tydligt Bode-diagram över det kretsöverföringen $L(s)$, där det framgår att specifikationerna är uppfyllda.

5 poäng

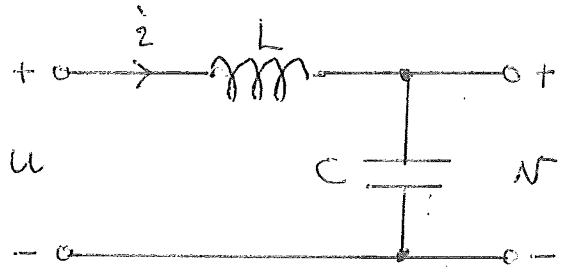
4. Som alternativ till amplitudmarginal och fasmarginal kan maximala värdet av beloppet av känslighetsfunktionen S användas vid analys av återkopplade system. Antag att design av en viss regulator leder till att villkoret

$$|S(i\omega)| < 2$$

är uppfyllt för alla frekvenser. Hur stor fasmarginal φ_m är garanterad genom en sådan design? Det kan i detta fall förutsättas att kretsöverföringen $L(s)$ saknar poler i högra halvplanet, eller på imaginäraxeln utanför origo.

5 poäng

5. Betrakta LC-kretsen i figuren nedan:



a) Visa att om spänningen över kapacitansen C och strömmen genom induktansen L väljs som tillståndsstorheter erhålls följande tillståndsekvation, där pålagd spänning u är insignal:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t)$$

1 poäng

b) Systemet samplas med intervallet h. Visa att motsvarande samplade tillståndsekvation blir

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & \rho\sin(\varphi) \\ -\frac{1}{\rho}\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1-\cos(\varphi) \\ \frac{1}{\rho}\sin(\varphi) \end{bmatrix} u(k)$$

där parametrarna definieras av $\varphi = h/\sqrt{LC}$, $\rho = \sqrt{L/C}$. Samplingen innebär i detta fall att insignalens värde är styckvis konstant under varje samplingsintervall.

2 poäng

c) Var ligger det samplade systemets egenvärden som funktion av φ, ρ , och vilken slutstas kan man dra om stabiliteten?

2 poäng

LÖSNING TILL TENTAMEN I REGLERTEKNIK 23/8 2012

ESS 017

1. a) KE: $K_p G(s) + 1 = 0 \Rightarrow (1+20s)^2 + K_p(1-10s) = 0$

$$400s^2 + (40 - 10K_p)s + 1 + K_p = 0$$

Självsvängning innebär rent imag. lösn. $\Rightarrow K_p^* = 4$

$s = j\omega_{sv} \Rightarrow -400\omega_{sv}^2 + 1 + 4 = 0 \Rightarrow \omega_{sv}^2 = 1/80$

$$\omega_{sv}^2 = \frac{20}{1600} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{40}\right)^2 \Rightarrow \omega_{sv} = \frac{\sqrt{5}}{20} = \frac{2\pi}{T_{sv}}$$

$$\underline{T_{sv}} = \frac{40\pi}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{8\pi\sqrt{5} = 56.2}} \quad \text{för } \underline{K_{sv} = 4}$$

b)

$$G(s) = G_{minfas}(s) \cdot \frac{1-10s}{1+10s} \Rightarrow \underline{\underline{G_{minfas}(s) = \frac{1+10s}{(1+20s)^2}}}$$

c)

$$G(s) = \frac{1-10s}{1+40s+400s^2} = \frac{-\frac{1}{40}s + \frac{1}{400}}{s^2 + \frac{1}{10}s + \frac{1}{400}} \Rightarrow$$

Obs. formen (exempelvis):

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -0.1 & 1 \\ -0.0025 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -0.025 \\ 0.0025 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

Då systemet $G(s)$ är av andra ordningen (2 poler) och A-matrisen är en 2×2-matris, är systemet på minimal form. (Notera att faktorn $1-10s$, ej kan ingå i $(1+20s)^2$!)

2. a) $b\rho c_p \frac{dT_s}{dt} = \sigma(T_e^4 - T_s^4) - \alpha(T_s - T_c)$

$$\Rightarrow \dot{T}_s(t) = f(T_s(t), T_e(t), T_c(t)) = \frac{\sigma}{b\rho c_p}(T_e^4 - T_s^4) - \frac{\alpha}{b\rho c_p}(T_s - T_c)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial T_s}\right]_{\substack{T_s = T_{s0}\\ T_e = T_{e0}\\ T_c = T_{c0}}} = -\frac{4\sigma T_{s0}^3}{b\rho c_p} - \frac{\alpha}{b\rho c_p}\,; \quad \left[\frac{\partial f}{\partial T_e}\right]_{\substack{T_s = T_{s0}\\ \vdots}} = \frac{4\sigma T_{e0}^3}{b\rho c_p}$$

Den linjäriserade modellen blir då:

$$\frac{d}{dt}\Delta T_s(t) + \frac{4\sigma T_{s0}^3 + \alpha}{b\rho c_p}\Delta T_s(t) = $$

$$= \frac{4\sigma T_{e0}^3}{b\rho c_p}\Delta T_e(t) + \frac{\alpha}{b\rho c_p}\Delta T_c(t)$$

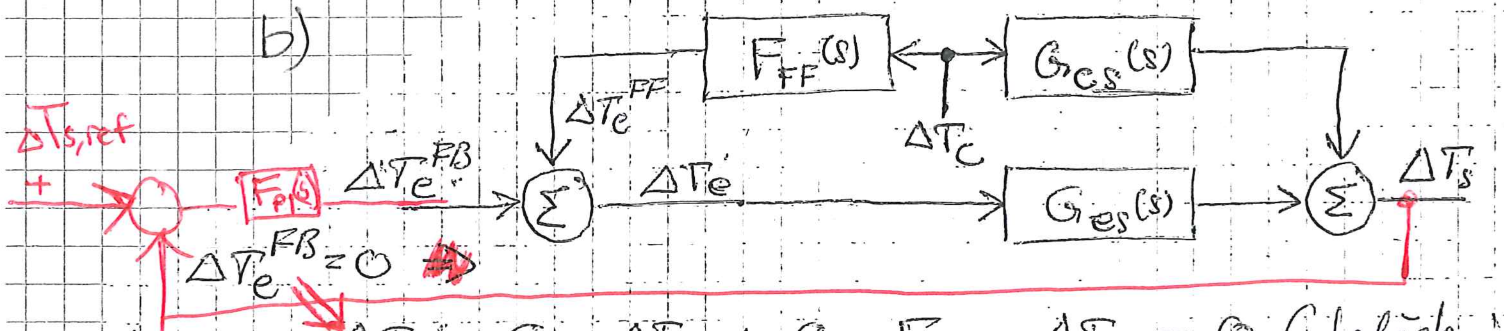
Laplacetransformering ger:

$$\Delta \tilde{T}_s(s) = \underline{\underline{\frac{4\sigma T_{e0}^3}{b\rho c_p s + 4\sigma T_{s0}^3 + \alpha}}} \cdot \Delta \tilde{T}_e(s) +$$

$$+ \underline{\underline{\frac{\alpha}{b\rho c_p s + 4\sigma T_{s0}^3 + \alpha}}} \cdot \Delta T_c(s)$$

De sökta överförings-funktionerna

b)



$\Delta T_s = G_{cs}\Delta T_c + G_{es}F_{FF}\Delta T_c = 0$ (utsläckning)

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{FF}(s)}} = -\frac{G_{cs}(s)}{G_{es}(s)} = \underline{\underline{-\frac{\alpha}{4\sigma T_{e0}^3}}}$$ (konstant framkoppling!)

3: En PI-regulator $(as+b)/s$ klarar stegstörninga

$$F(i\omega_c) = a + \frac{b}{i\omega_c}$$

Vid $\omega_c = 0.64$ gäller enl Bodediagrammet för Processen $G(i\omega)$:

$$|G(i0.64)| = 4 \text{ dB}$$

$$\arg\{G(i0.64)\} = -107^\circ$$

∵ Enligt def. av begr. överkorsn. frekv. och fasmarginal:

$$20\log\left|a - i\frac{b}{0{,}64}\right| + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\left|a - i\frac{b}{0{,}64}\right| = 10^{-4/20} = 0.631 \qquad (1)$$

$$\arg\left\{a - i\frac{b}{0{,}64}\right\} - 107^\circ + 180^\circ \geq 55^\circ$$

$$\arg\left\{a - i\frac{b}{0{,}64}\right\} \geq -18^\circ \qquad (2)$$

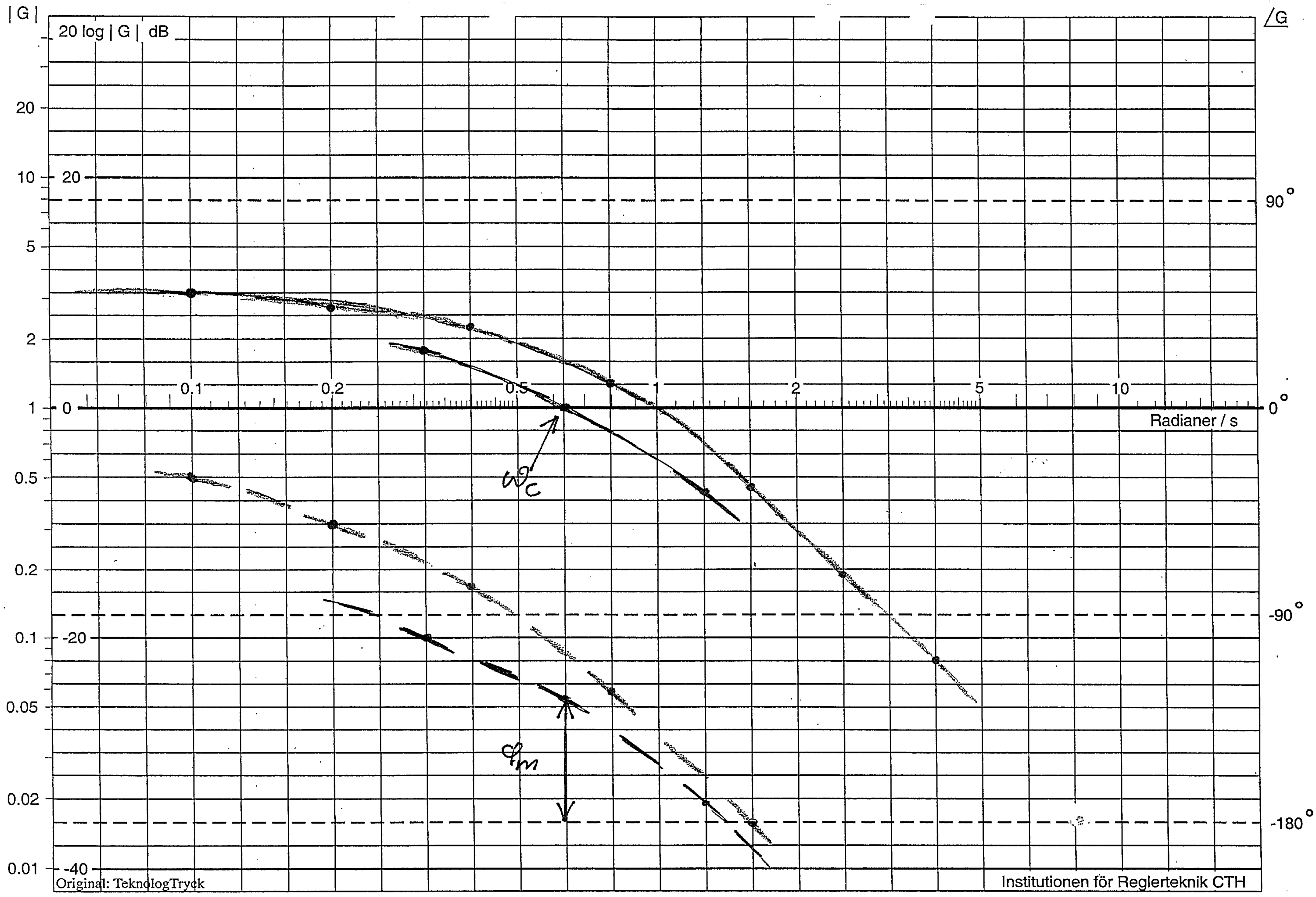
$$(1) \text{ och } (2) \Rightarrow a - i\frac{b}{0{,}64} = 0.60 - i0.195$$

$$\Rightarrow a = 0.60 \text{ och } b = 0.125$$

$$\underline{\underline{F(s) = 0.6 + \frac{1}{8s}}}$$

(Se diagram!)

ω	$\arg F(i\omega)$	$\|F(i\omega)\|$	$\|F(i\omega)\|_{dB}$
0.32	-33°	0.716	-3
0.64	-18°	0.631	-4
1.25	-9.5°	0.608	-4.5


|G|
20 log |G| dB
20
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
20
0
-20
-40
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
Radianer / s
/G
90°
0°
-90°
-180°
ωc
φm
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH

4. $L(s)$ saknas poler i HHP och på imaginära axeln utanför origo. $\Rightarrow L(j\omega)$ är väldef.

Antag att vid ω_c gäller att $L(j\omega_c) = e^{-j\psi_c}$

(Notera att $|L(j\omega_c)| = 1$!)

$$|S(j\omega_c)| = \frac{1}{|1+L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1+\cos\psi_c - j\sin\psi_c|}$$

$$\varphi_m = \pi + \arg\{L(j\omega_c)\} = \pi - \psi_c \Rightarrow \psi_c = \pi - \varphi_m$$

$$\cos(\pi - \varphi_m) = \cos\pi\cos\varphi_m + \sin\pi\sin\varphi_m = -\cos\varphi_m$$

$$\sin(\pi - \varphi_m) = \sin\pi\cos\varphi_m - \cos\pi \cdot \sin\varphi_m = \sin\varphi_m$$

$$|S(j\omega)| < 2 \Rightarrow |S(j\omega_c)| < 2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|1-\cos\varphi_m - j\sin\varphi_m|} < 2 \Rightarrow$$

$$1 < 4\left((1-\cos\varphi_m)^2 + \sin^2\varphi_m\right) \Rightarrow$$

$$1/4 < 1 + \cos^2\varphi_m - 2\cos\varphi_m + \sin^2\varphi_m = 2 - 2\cos\varphi_m$$

$$\frac{1}{8} < 1 - \cos\varphi_m \Rightarrow \cos\varphi_m < \frac{7}{8} \Rightarrow$$

$$\varphi_m > \arccos(7/8) \geq 28^\circ.955$$

$$\underline{\underline{\varphi_m \geq 29^\circ}}$$

5. a) $u - L\frac{di}{dt} - v = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}v + \frac{1}{L}u$

$$i - C\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}i$$

$$v = x_1 \text{ och } i = x_2 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 + \frac{1}{L}u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u = Ax + Bu$$

b) $\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(s-A)^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{pmatrix} s & -1/C \\ 1/L & s \end{pmatrix}^{-1}\right\} =$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}}\begin{pmatrix} s & 1/C \\ -1/L & s \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\frac{1}{LC}}\begin{pmatrix} s & \frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\sqrt{\frac{L}{C}} \\ -\frac{1}{\sqrt{LC}}\cdot\sqrt{\frac{C}{L}} & s \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\omega_0 t & \rho\sin\omega_0 t \\ -\frac{1}{\rho}\sin\omega_0 t & \cos\omega_0 t \end{pmatrix} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},\ \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$x(k+1) = F x(k) + G u(k)$$

$$\underline{\underline{F}} = e^{Ah} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\frac{1}{\rho}\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}}} \qquad \varphi = \omega_0 h$$

$$\underline{\underline{G}} = \int_0^h e^{At}B\,dt = \int_0^h (\ldots)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/L \end{pmatrix} dt = \int_0^h \begin{pmatrix} \omega_0\sin\omega_0 t \\ \frac{1}{L}\cos\omega_0 t \end{pmatrix} dt$$

$$= \Big[\begin{pmatrix} -\cos\omega_0 t \\ \frac{1}{L\omega_0}\sin\omega_0 t \end{pmatrix}\Big]_0^h = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1-\cos\varphi \\ \frac{1}{\rho}\sin\varphi \end{pmatrix}}}$$

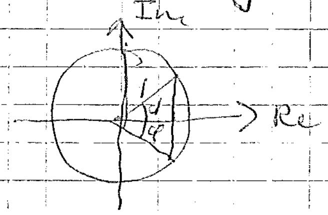
5. c) Egenvärden hos F-matrisen: $\det(\lambda I - F) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \cos\varphi & -\rho \sin\varphi \\ \frac{1}{\rho} \sin\varphi & \lambda - \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi = \lambda^2 - 2\cos\varphi\,\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi$$

$$\lambda_1 = \cos\varphi + j\sin\varphi$$
$$\lambda_2 = \cos\varphi - j\sin\varphi$$



dvs båda egenvärdena ligger på enhetscirkeln vilket innebär randen av stabilitetsområdet (innanför cirkeln). Enkelpoler på randen innebär ett marginellt stabilt system. (Jämför imaginära axeln för ett tidskont. system.)