CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för E3, ESS017, tisdagen 11 januari 2011.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: M

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten meddelas senast den 26 januari genom personligt e-mail. Granskning av rättning är möjlig den 27 och den 28 januari, 12.30 -13.00, på plan 3 i E-huset (närmast Hörsalsvägen). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 30 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Direkta följdfel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är helt orimligt. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 12 poäng
betyg FYRA: minst 18 poäng
betyg FEM : minst 24 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, dvs ***Reglerteknik**-Grundläggande teori*, av Glad och Ljung.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. Inga "laptop-datorer"!

LYCKA TILL!

1. En bil med totala massan M påverkas framför allt av två krafter $u(t)$ som är drivkraften från motorn, och $w(t)$ som är en bromsande kraft (t ex dynamisk friktion och luftmotstånd).

a) Ange överföringsfunktionen från drivkraften u till bilens hastighet v, då $w = 0$.

1 poäng

b) Ange överföringsfunktionen från drivkraften u till bilens acceleration a, då bromskraften w antas proportionell mot hastigheten v med proportionalitetskonstanten K.

2 poäng

c) Bromskraften w antas proportionell mot kvadraten på hastigheten v med proportionalitetskonstanten C. Betrakta små hastighetsavvikelser från det konstanta värdet v_0. Ange en överföringsfunktion från små variationer i drivkraften, Δu, till motsvarande hastighetsvariationer, Δv, nära v_0.

2 poäng

2. Antag att ett linjärt system hade viktfunktionen

$$g(t) = \frac{b}{t+a}, a > 0, b > 0$$

Vore detta system i så fall insignal-utsignalstabilt? (Problemet löses enklast utan användning av Laplacetransformer!)

3 poäng

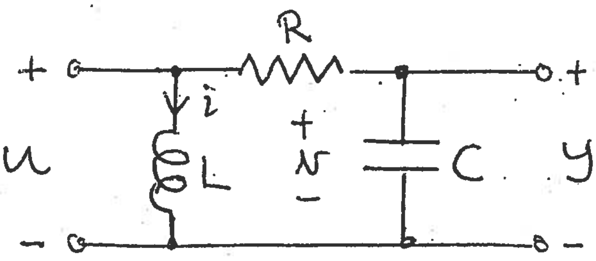
3. a) Ett återkopplat system har kretsöverföringen $L(j\omega) = 10/j\omega$. ***Med hur många dB*** kommer ***en systemstörning*** med frekvensen $\omega = 0,2$ rad/sek ***att dämpas***?

2 poäng

b) ***Med hur många dB*** kommer ***en mätstörning*** med frekvensen $\omega = 2$ rad/sek ***att dämpas***?

2 poäng

4. Figuren nedan visar en elektrisk krets.



a) Välj strömmen *i* genom induktansen och spänningen *v* över kapacitansen som tillståndsstorheter. Visa att systemets tillståndsmodell blir (dvs härled utgående från kretsens ekvationer):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} u(t), \; y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

4 poäng

b) Utred om tillståndsmodellen ovan en minimal representation av systemet?

2 poäng

5. Ett dynamiskt system utgörs approximativt som en ren integration (1/s) med insignalen u och utsignalen y. Ett reglersystem baserat på tillståndsåterkoppling med integralverkan skall styra detta system.

a) Utgå från tillståndsmodellen $dx_1/dt = u, y = x_1$, inför integraltillståndet x_2 genom relationen $X_2(s) = (R(s) - Y(s))/s$, och uppställ tillståndsekvationen över det sålunda "utvidgade" systemet. Rita också ett tydligt blockdiagram över systemet, inklusive återkopplingar.

3 poäng

b) Bestäm en tillståndsåterkoppling, $u = -Lx$, sådan att det återkopplade systemets poler hamnar i $s = -1 + j0,5$ och $s = -1 - j0,5$.

3 poäng

6. Utred ***med användning av Nyquistkriteriet*** om systemet med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-s/5}}{s-2}$$

kan stabiliseras med hjälp av en proportionell regulator $F(s) = K$.

6 poäng

(1)

Reglerteknik E, ESS017, 11 januari 2011 / EB

1. $m\dot{v} = u - w$

(a) $w = 0 \Rightarrow m\dot{v} = u \Rightarrow msV(s) = U(s) \Rightarrow$

$$\underline{\underline{G(s)}} = \frac{V(s)}{U(s)} = \underline{\underline{\frac{1}{ms}}}$$

(b) $w = Kv \Rightarrow m\dot{v} = ma = u - Kv$

$$ma = u - K\int a\,dt \Rightarrow \underline{m\dot{a} = \dot{u} - Ka}$$

$$msA(s) + KA(s) = sU(s)$$

$$\underline{\underline{G(s)}} = \frac{A(s)}{U(s)} = \underline{\underline{\frac{s}{ms+K}}}$$

(c) $w = Cv^2 \Rightarrow m\dot{v} = u - Cv^2$

$$v = v_0 \Rightarrow 0 = u_0 - Cv_0^2 \Rightarrow u_0 = Cv_0^2$$

$$m\frac{d}{dt}(v_0 + \Delta v) = u_0 + \Delta u - C(v_0 + \Delta v)^2$$

$$m\frac{d}{dt}(\Delta v) = \Delta u - 2Cv_0\Delta v - C(\Delta v)^2 \approx$$

$$\approx \Delta u - 2Cv_0\Delta v$$

$$ms\,\Delta V(s) + 2Cv_0\,\Delta V(s) = \Delta U(s) \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{G(s)}} = \frac{\Delta V(s)}{\Delta U(s)} = \underline{\underline{\frac{1}{ms + 2Cv_0}}}$$

2. $g(t) = \dfrac{b}{t+a}$, $a>0$, $b>0$

$$\int_0^T \underbrace{|g(t)|}_{(=g(t)\text{ här!})} dt = \int_0^T \frac{b}{t+a}\,dt = \Big[b \ln(t+a) \Big]_0^T =$$

$$= b\left[\ln(T+a) - \ln(a)\right] = b \ln\left(1 + \frac{T}{a}\right)$$

Systemet insignal-utsignalstabilt (BIBO) om $\int_0^\infty |g(t)|\,dt$ konvergerar.

$$\int_0^\infty |g(t)|\,dt = \lim_{T\to\infty} b \ln(1 + T/a) = \infty$$

$\Rightarrow$ Systemet ej BIBO-stabilt!

3. $L(j\omega) = 10/j\omega$

$$E(j\omega) = S(j\omega)\overbrace{W(j\omega)}^{\text{systemstörn.}} + T(j\omega)\overbrace{n(j\omega)}^{\text{mätstörning}}$$

(a) $$|S(j\omega)| = \left|\frac{1}{1+10/j\omega}\right| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+100}}$$

$$|S(j0.2)| \approx 0.2/10 = 2\cdot 10^{-2} =$$

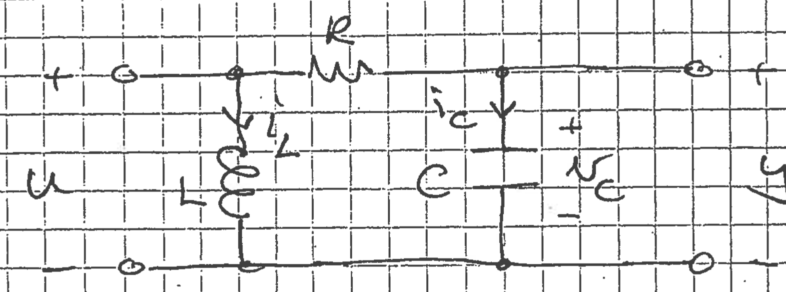
$$= 20\big[-2 + \underbrace{{}^{10}\log 2}_{\approx 0.3}\big] = -34\text{ dB}$$

(b) $$|T(j\omega)| = \left|\frac{10/j\omega}{1+10/j\omega}\right| = \frac{10}{\sqrt{\omega^2+100}}$$

$$|T(j2)| = \frac{10}{\sqrt{4+100}} = \frac{1}{\sqrt{1+0.04}} \approx \frac{1}{1+0.02} \approx 0.98 =$$

$$= -0.175\text{ dB} \approx -0.2\text{ dB}$$

4. (a)



$$①\begin{cases} x_1 = i_L \\ x_2 = v_C \end{cases}$$

$$q_C = C v_C \Rightarrow \Delta q_C = C \Delta v_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta q_C}{\Delta t} = C \frac{\Delta v_C}{\Delta t}$$

$$i_C = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q_C}{\Delta t} = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$②\begin{cases} u - L\frac{di_L}{dt} = 0 \text{ och} \\ u - R i_C - v_C = u - RC\frac{dv_C}{dt} - v_C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}①\\②\end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} L\dot{x}_1 = u \\ RC\dot{x}_2 = u - x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} u$$

Dessutom: $y = v_C = x_2 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

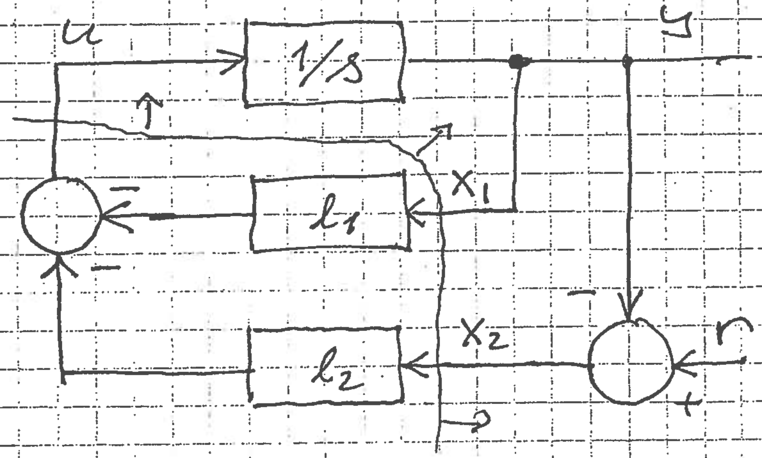
(b) Modellen minimal repr. av systemet $\Leftrightarrow$ Modellen är styrbar och Observerbar <u>eller</u> Förkortningar i överf. fkn:en erhållen ur modellen ej möjliga.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = (0 \;\; 1)\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s + \frac{1}{RC} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/L \\ 1/RC \end{pmatrix} =$$

$$= (0 \;\; 1)\begin{pmatrix} 1/s & 0 \\ 0 & 1/(s + 1/RC) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/L \\ 1/RC \end{pmatrix} = \left(0 \;\; \frac{1}{s + 1/RC}\right)\begin{pmatrix} 1/L \\ 1/RC \end{pmatrix}$$

$= \dfrac{1}{1 + RCs} \Rightarrow$ Systemet av 1:a ordn. och modellen av 2:a ordn. $\Rightarrow$ förkortn. förekommer $\Rightarrow$ Ej minimal repr.

5. (a) $Y(s) = \frac{1}{s} \cdot U(s) \Rightarrow \dot{x}_1 = u$, $y = x_1$



$x_2(s) = \frac{R(s) - Y(s)}{s}$

$\dot{x}_2(t) = r - y =$
$= r - x_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + r \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

(b) Tillståndsåterkoppling: $u = -Lx$

$u = -(l_1 \;\; l_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ återkopplade systemet

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [l_1 \;\; l_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r =$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 & -l_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \ldots \quad \text{polplacering} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + l_1 & l_2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + l_1\lambda - l_2 \equiv$$

$$\equiv (\lambda + 1 - j0.5)(\lambda + 1 + j0.5) = (\lambda + 1)^2 + 0.25 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1.25 \Rightarrow l_1 = 2 \text{ och } l_2 = -1.25$$

$$\therefore \; L = [\, 2 \quad -1.25 \,]$$

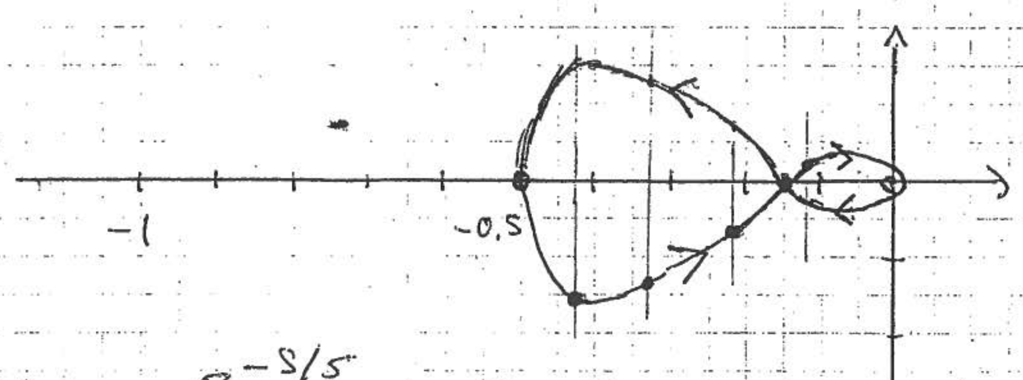
6. $$G(j\omega) = \frac{e^{-j\omega/5}}{j\omega - 2} = \frac{\cos(\omega/5) - j\sin(\omega/5)}{j\omega - 2} =$$

$$= \frac{[\cos(\omega/5) - j\sin(\omega/5)][-j\omega - 2]}{\omega^2 + 4} =$$

$$= -\frac{2\cos(\omega/5) + \omega\sin(\omega/5)}{\omega^2+4} -$$

$$- j\cdot\frac{\omega\cdot\cos(\omega/5) - 2\sin(\omega/2)}{\omega^2+4}$$

ω	ω^2+4	$\cos(\omega/5)$	$\sin(\omega/5)$	$R(\omega)$	$I(\omega)$
0	4	1	0	−0.500	0
1	5	0.980	0.199	−0.432	−0.156
2	8	0.921	0.389	−0.328	−0.133
4	20	0.697	0.717	−0.213	−0.068
8	68	−0.029	1.000	−0.114	+0.033
∞				0	0



$$G(s) = \frac{e^{-s/5}}{s-2} \Rightarrow P = 1$$

$$Z = P + N = 0 \Rightarrow N = -1$$

P-regulator $K > 2$

men $K < 7 \Rightarrow \underline{2 < K < 7}$

för stabilt återkopplat system.