CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för E3, ESS017, lördagen 16 oktober 2010.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: V

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten meddelas senast den 5 november genom personligt e-mail. Granskning av rättning kan ske den 8 och den 9 november, 12.30 -13.00, på plan 3 i E-huset (som vätter mot Hörsalsvägen). Iakttag granskningstiderna!

Tentamen omfattar totalt 30 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Direkta följdfel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är helt orimligt. Följande betygskala gäller:

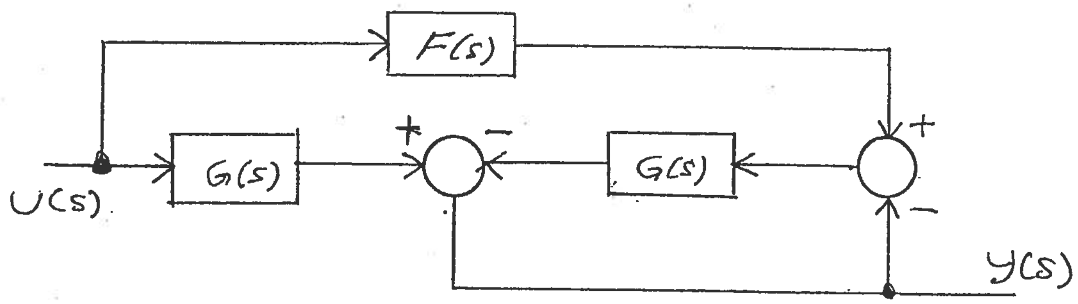
betyg TRE : minst 12 poäng
betyg FYRA: minst 18 poäng
betyg FEM : minst 24 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, dvs ***Reglerteknik**-Grundläggande teori*, av Glad och Ljung.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. Inga "laptop-datorer"!

LYCKA TILL!

1. Bestäm den resulterande överföringsfunktionen från insignalen u till utsignalen y för det system som beskrivs av nedanstående blockdiagram. (Svaret skall alltså bero på de ingående överföringsfunktionerna.)



2 poäng

2. Ett system som kan beskrivas av överföringsfunktionen $G(s) = 1/s^2$ skall PD-regleras.

a) Visa att en PD-regulator uppfyller att det återkopplade systemet för det första blir stabilt, och för det andra att rampformade referensändringar ej ger upphov till kvarstående fel.

4 poäng

b) Utför design av en PD-regulator så att fasmarginalen 45 grader uppnås vid överkorsnings-frekvensen 1 rad/sek. Skissera ett fullständigt Bodediagram över kretsöverföringen $L(j\omega)$. Markera både φ_m och ω_c i diagrammet.

5 poäng

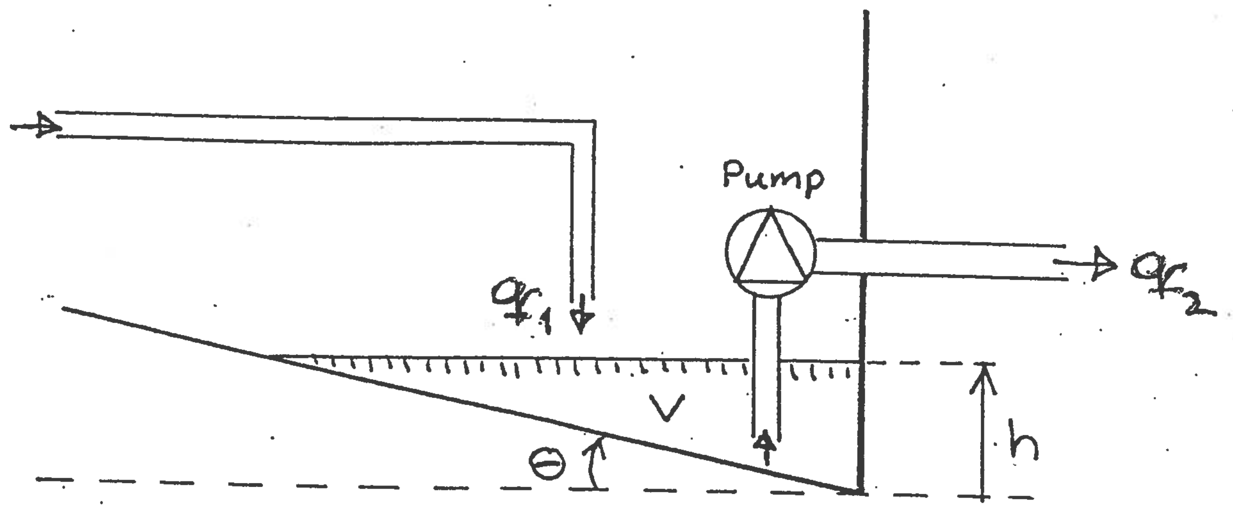
3. Två linjära tidsinvarianta system beskrivs av överföringsfunktionerna

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s^3-1},\ G_2(s) = \frac{s+1}{s^3+1}$$

Ange tillståndsbeskrivningar av de två systemen som är både styrbara och observerbara.

4 poäng

4. I ett vattenreningsverk rinner avloppsvatten ner i en ränna med en lodrät vägg och ett snett golv, som lutar vinkeln θ ($< 90^\circ$) mot markplanet. Rännans längd (vinkelrät mot papperet) är överallt L. Vattennivån, h, utefter den lodräta väggen mäts kontinuerligt. Vattenflödet till rännan varierar i tiden, och man vill därför konstruera ett reglersystem som håller konstant nivå i rännan, svarande mot en konstant volym V_0. Nivåregleringen sker genom att pumpa ut vatten (efter grovfiltrering genom ett galler).



Systemets (enda) tillståndsstorhet är vattenvolymen i rännan, V (m^3). Instorheter är flödet till rännan, q_1 (m^3/s) och pumpflödet från rännan, q_2 (m^3/s). Nivån i rännan, h (m), är utstorhet. Uppställ en överföringsfunktion $G(s)$, <u>som relaterar avvikelser i pumpflödet till nivåavvikelser,</u> då den stationära volymen antages vara V_0 (dvs från Δq_2 till Δh).

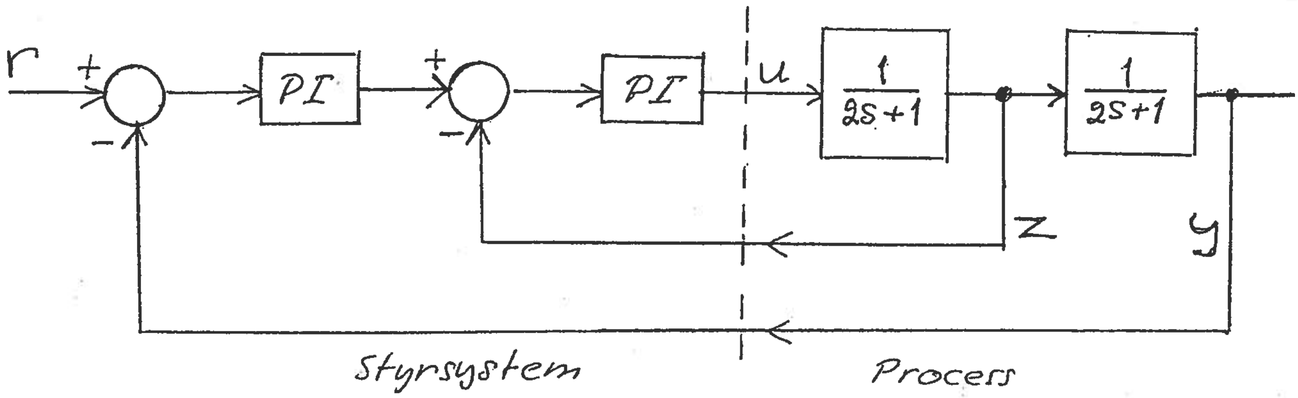
5 poäng

5. Ett envariabelt system (utan styrning) har den enkla tillståndsekvationen $\dot{z}(t) = -2 \cdot z(t)$. Ett problem är att vid mätning av z adderas en konstant men okänd offset b till z, det vill säga att $y(t) = z(t) + b$. Problemet kan dock lösas på följande sätt:

Inför nya tillståndsvariabler $x_1 = z$, $x_2 = b$, ställ upp tillståndsekvationerna och visa att detta system är observerbart. Bestäm en observatör där polerna placeras i $s = -1 + j$, $s = -1 - j$, och ett skattningsfilter $F(s)$, sådant att $\hat{Z}(s) = F(s)Y(s)$ (dvs att skattningar av variabeln z genom filtret fås av mätvärdena y).

5 poäng

6.



En process kan betraktas som två seriekopplade 1:a ordningens system, där såväl utsignalen y liksom en mellanliggande variabel z är tillgängliga för mätning. Ovanstående figur indikerar att reglersystemet är av kaskadtyp, och utrustat med två PI-regulatorer. Återkopplade systemet skall ha följande egenskaper:

1. Systemets (dvs det totala) fasmarginal skall vara 45 grader.

2. Om referensen r ändras stegvis skall utsignalen y ha svängt in (till 5%) på 5 sekunder.

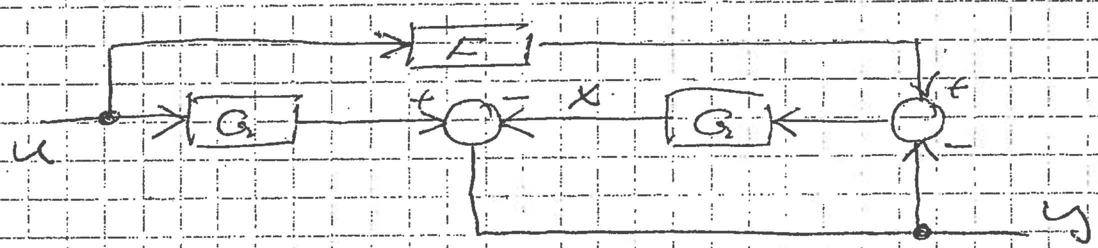
Bestäm parametrarna hos de två PI-regulatorerna så att kraven uppfylls.

5 poäng

Ledning *Genom "smarta" val av integrationstider blir det resulterande återkopplade systemet av andra ordningen, som kan skrivas på formen* konstant$/(s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2)$. *Insvängnings-tiden (till 5%) kan då approximativt uppskattas med hjälp av formeln:* $T_s \approx 3/(\zeta\omega_0)$.

Reglerteknik E, ESS017, 2010-10-16 / EB

1.



Inför en mellanvariabel, x, "någonstans i mitten":

$$Y = GU - X \quad , \quad X = G(FU - Y) \Rightarrow$$

$$Y = GU - G(FU - Y) = G(1-F)U + GY$$

$$(1 - G)Y = G(1-F)U \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)\frac{1 - F(s)}{1 - G(s)}}}$$

2. a) $F(s) = K\dfrac{1 + \tau s}{1 + \beta\tau s}$, $\beta \in (0, 1)$, $\tau > 0$

$$G(s) = 1/s^2 \Rightarrow L(s) = \frac{K(1+\tau s)}{s^2(1+\beta\tau s)}$$

Karakteristiska ekvationen: $1 + L(s) = 0 \Rightarrow$

$$\beta\tau s^3 + s^2 + K\tau s + K = 0$$

Rouths kriterium:

$\beta\tau$	$K\tau$	0
1	K	0
$K\tau - \beta K\tau$	0	0
K	0	0

Inga teckenväxl. för

$\Rightarrow K\tau(1-\beta) > 0$

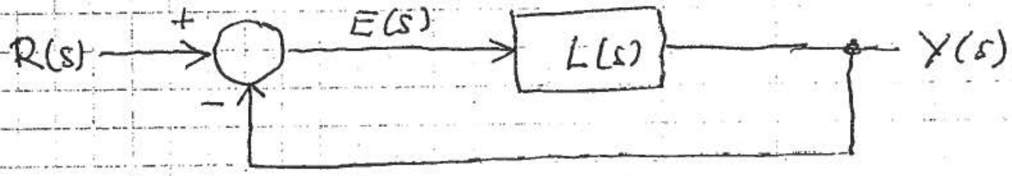
$\Rightarrow K > 0$

$\therefore$ Alltid stabilt för

$K > 0$, $0 < \beta < 1$, $\tau > 0$

2. a (forts)

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{s^2(1+\beta\tau s)}{s^2(1+\beta\tau s) + K(1+\tau s)}$$



$$E = R - Y = R - LE \Rightarrow (1+L)E = R \Rightarrow E = SR$$

$$E(s) = S(s) \cdot \frac{R_0}{s^2} = \frac{R_0(1+\beta\tau s)}{s^2(1+\beta\tau s) + K(1+\tau s)}$$

Då systemet är stabilt gäller slutvärdessatsen:

$$\underline{\underline{e(\infty)}} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \underline{\underline{0}} \quad \left(s \cdot \frac{R_0}{K} \to 0 \text{ då } s \to 0\right)$$

b) $\varphi_m = 180^\circ + \arg\{L(j\omega_c)\} \Rightarrow$

$$45^\circ = 180^\circ - 180^\circ + \psi = \psi$$

∴ Filtret måste ge fashöjning på 45° vid ω_c

$$\psi = \operatorname{atan}\frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}} \Rightarrow \frac{1-\beta}{2\sqrt{\beta}} = \tan\psi = 1 \Rightarrow$$

$$\beta + 2\sqrt{\beta} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{\beta} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\beta = (\sqrt{2}-1)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716$$

$$\tau = \frac{1}{\omega^* \sqrt{\beta}} = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

$$|L(j\omega_c)| = \frac{K\,|1 + j(\sqrt{2}+1)|}{1 \cdot |1 + j(\sqrt{2}-1)|} = 1 \Rightarrow$$

$$K^2 = \frac{1 + (\sqrt{2}-1)^2}{1 + (\sqrt{2}+1)^2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

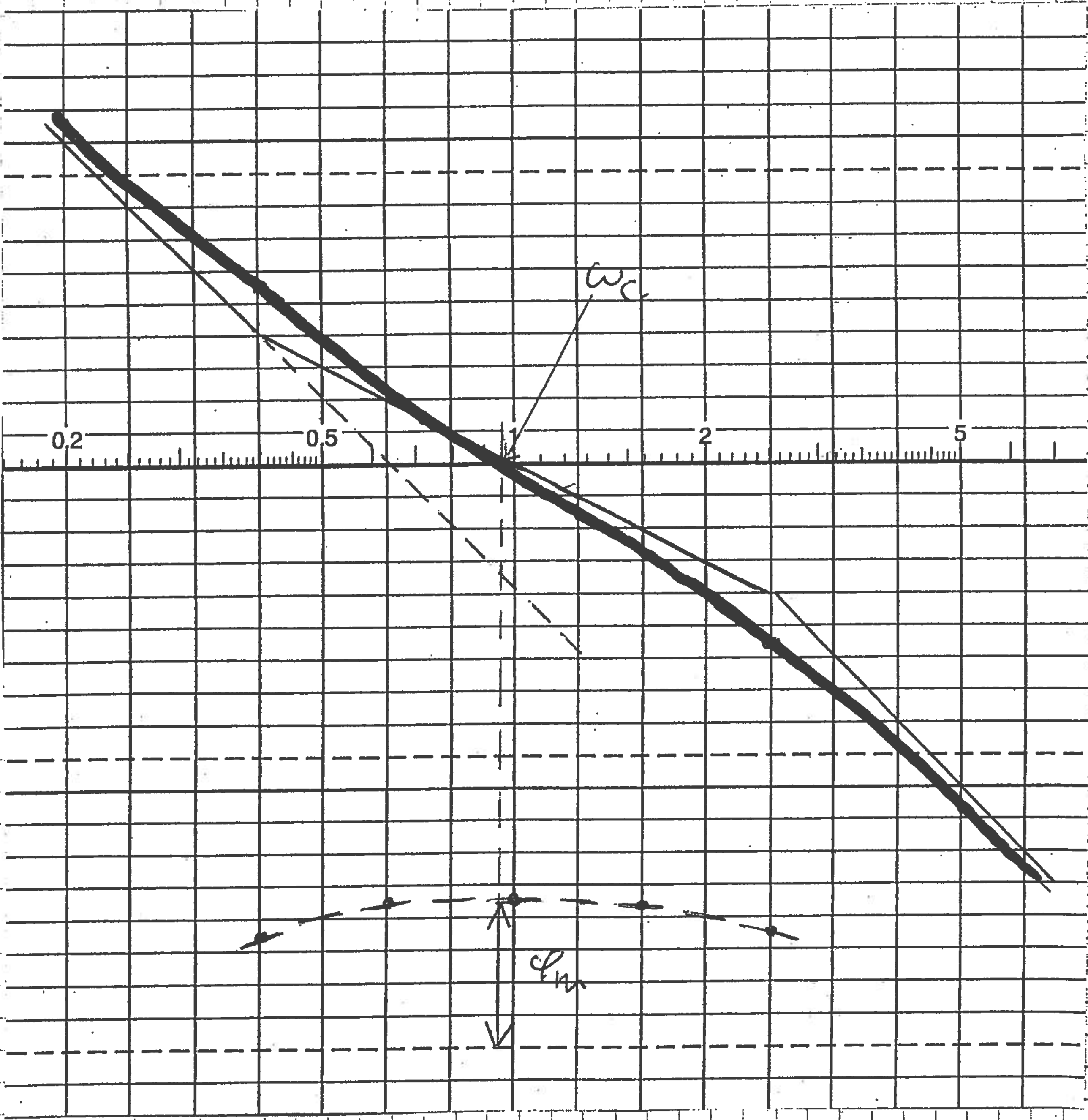
$$= (\sqrt{2}-1)^2 \Rightarrow K = \sqrt{2} - 1 = 0.414$$

$$F(s) \approx 0.414\,\frac{1 + 2.414 s}{\dots}$$

(3)

2.b (forts)
$$L(j\omega) = \frac{\frac{0.643^2}{0.414}(1+s/0.414)}{s^2(1+s/2.415)} \approx$$

$$\overset{*}{\approx} \frac{0.64^2(1+s/0.4)}{s^2(1+s/2.5)}$$



Ur diagrammet fås att $\varphi_m \approx 45^0$ och $\omega_c \approx 0.97$ rad/s. (Approximationer* för att ge enklare uppritning har dock gjorts.)

3. $$G_1(s) = \frac{s+1}{s^3-1} = \frac{s+1}{(s-1)\underbrace{(s^2+s+1)}_{\text{komplexa nollställen}}}$$

Förkortningar ej möjliga! Välj t.ex:

$$\underline{\underline{\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u}}, \quad \underline{\underline{y = [1 \ 0 \ 0]x}}$$

(obsformen)

Systemet är <u>både styrbart och observerbart</u>, då förkortningar i $G(s) = C(sI-A)^{-1}B$ ej går.

$$G_2(s) = \frac{s+1}{s^3+1} = \frac{s+1}{(s+1)(s^2-s+1)} = \frac{1}{s^2-s+1}$$

Efter förkortning:

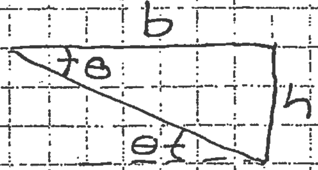
$$\underline{\underline{\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u}}, \quad \underline{\underline{y = [1 \ 0]x}}$$

(obsformen)

$$G(s) = (1 \ 0)\begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{s^2-s+1}\underbrace{(1 \ 0)\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}}_{=(s \ 1)}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2-s+1}$$

4. $\dot{V} = Q_1 - Q_2$



$$V = \frac{1}{2} h^2 \cot\theta \cdot L$$

$$\frac{h}{b} = \tan\theta \Rightarrow$$

$$b = h\cot\theta$$

$$h = \sqrt{\frac{2\tan\theta \cdot V}{L}}$$

$$h = h_0 + \left[\frac{\partial h}{\partial V}\right]_{h=h_0} \Delta V$$

$$\Delta h = h - h_0 = \sqrt{\frac{2\tan\theta}{L}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{V_0}} \cdot \Delta V$$

$$\Delta \dot{h} = \sqrt{\frac{\tan\theta}{2LV_0}} \cdot \Delta \dot{V} = \sqrt{\frac{\tan\theta}{2LV_0}} \left(\Delta Q_1 - \Delta Q_2\right)$$

$$s\,\Delta H(s) = \sqrt{\frac{\tan\theta}{2LV_0}} \cdot \left(\Delta Q_1(s) - \Delta Q_2(s)\right)$$

Då $\Delta H/\Delta Q_2$ sökes sättes $\Delta Q_1 = 0$:

$$\underline{\underline{\frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_2(s)} = \frac{-1}{\sqrt{2LV_0\cot\theta} \cdot s}}}$$

5. $$\left.\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -2\cdot z(t) \\ y(t) &= z(t) + b \end{aligned}\right\}\ \text{Inför: } x_1 = z(t),\ x_2 = b$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = x_1 + x_2 \qquad C = [1 \quad 1]$$

$$CA = [1 \quad 1]\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [-2 \quad 0]$$

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix};\ \det(\mathcal{O}) = 2 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Full rang $\Rightarrow$ Observerbart system!

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + K[y - C\hat{x}] = (A - KC)\hat{x} + Ky$$

$$A - KC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}(1 \quad 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_1 \\ k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -k_1 - 2 & -k_1 \\ -k_2 & -k_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A + KC) = \begin{vmatrix} \lambda + k_1 + 2 & k_1 \\ k_2 & \lambda + k_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + (k_1 + k_2 + 2)\lambda + 2k_2 \equiv$$

$$\equiv (\lambda + 1 - j)(\lambda + 1 + j) = (\lambda + 1)^2 + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\Rightarrow 2k_2 = 2 \Rightarrow k_2 = 1;\quad k_1 + 1 + 2 = 2 \Rightarrow k_1 = -1$$

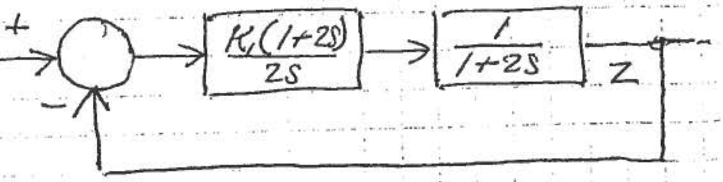
$$\frac{d}{dt}\hat{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\hat{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} y;\quad \hat{z} = (1 \quad 0)\hat{x} \Rightarrow$$

$$F(s) = (1 \quad 0)\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}\underbrace{(1 \quad 0)\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}}_{=(s+1 \quad 1)}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(s) \quad -s$$

7

6. Inre loopen:

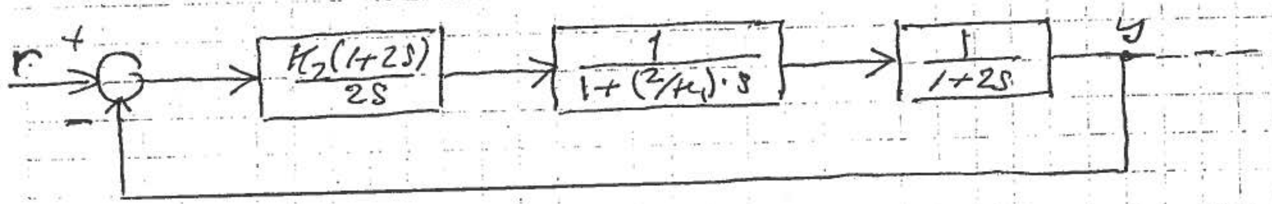


Efter förkortning fås

$$L_1(s) = \frac{K_1}{2s}$$

$$T_1(s) = \frac{K_1}{2s + K_1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{K_1} \cdot s}$$

Yttre loopen:



Efter förkortning fås

$$L_2(s) = \frac{K_2/2}{s(1 + 2/K_1 \cdot s)}$$

$$\varphi_m = 180^\circ + \arg\{L_2(j\omega_c)\} = 180^\circ - 90^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{2}{K_1}\omega_c\right) =$$

$$= 90^\circ - \operatorname{atan}\left(\frac{2}{K_1}\omega_c\right) = 45^\circ \Rightarrow \frac{2}{K_1}\omega_c = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_c = \frac{K_1}{2}}$$

$$|L_2(j\omega_c)| = \frac{K_2/2}{(K_1/2)\left|1 + j\frac{2}{K_1}\cdot\frac{K_1}{2}\right|} =$$

$$= \frac{K_2}{K_1|1+j|} = \frac{K_2}{K_1\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \underline{K_2 = \sqrt{2}\cdot K_1}$$

$$T_2(s) = \frac{L_2(s)}{1 + L_2(s)} = \frac{K_2/2}{s\left(1 + \frac{2}{K_1}s\right) + \frac{K_2}{2}} = \frac{K_1/\sqrt{2}}{\frac{2}{K_1}s^2 + s + \frac{K_1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{s^2 + \frac{K_1}{2}s + \frac{K_1^2}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = K_1/\sqrt{2\sqrt{2}} \Rightarrow K_1/2 = 2\zeta K_1/\sqrt{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$$

$$\zeta \approx 0.42 \Rightarrow \omega_0 \approx \frac{3}{T_s} = \frac{3}{\ldots} \approx 1.43$$

$$\left.\begin{array}{l} K_1 = \sqrt{2\sqrt{2}}\cdot\omega_0 \approx 2.405 \\ K_2 = \sqrt{2}\cdot K_1 \approx 3.400 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Yttre PI} = 3.4\left(1 + \frac{1}{2s}\right)}}, \ \underline{\underline{\text{Inre PI} = 2.4\left(1 + \frac{1}{2s}\right)}}$$