CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för E3, ESS017, måndagen 20 augusti 2009.

Tid: Kl 14.00 - 18.00

Lokal: V

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718

Tentamensresultaten anslås senast den 8 september på institutionens anslagstavla. Granskning av rättning kan ske den 8 och den 9 september, 12.30 -13.00, på institutionen, plan 5 i E-huset. Iakttag granskningstiderna! Det är dock möjligt att avge skriftliga klagomål mot rättningen, till och med den 23 september 2009.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Ett direkt följdfel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är fullständigt orimligt. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 12 poäng
betyg FYRA: minst 18 poäng
betyg FEM : minst 24 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, dvs ***Reglerteknik****-Grundläggande teori*, av Glad och Ljung.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. Inga "laptop-datorer"!

LYCKA TILL!

1. Ett rent integrerande system beskrivs av överföringsfunktionen $G(s) = 1/s$. Systemet som skall styras med en rent proportionell regulator $F(s) = K_p$, utsätts (relativt sällan) för impulsformade störningar $v(t) = v_0 \cdot \delta(t)$ på systemingången (som alltså adderas till styrsignalen).

a) Bestäm för vilka regulatorparametrar K_p som det återkopplade systemet är stabilt.

1 poäng

b) Antag ett värde på K_p som leder till ett stabilt system. Vad blir kvarstående felet efter en börvärdesändring från noll till r_0? (Störningen kan bortses ifrån vid denna beräkning.)

1 poäng

c) Antag ett värde på K_p som leder till ett stabilt system. Visa att kvarstående felet efter en impulsformad störning $v(t) = v_0 \cdot \delta(t)$ (enligt ovan) blir noll. (Börvärdet kan bortses ifrån vid denna beräkning.)

1 poäng

d) Man vill bestämma K_p så att felet avtar snabbt, men utan att för stora styrsignaler uppstår, då sådana kan tänkas leda till mättning (ett olinjärt fenomen som inte är önskvärt). Detta kan åstadkommas genom en kompromiss som innebär att följande kriterium minimeras:

$$J = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \rho \cdot u^2(t)]dt$$

Parametern ρ väljs som ett positivt tal. Förklara med ett kort resonemang (utan ekvationer) hur detta val (dvs låga respektive höga värden) påverkar regleringen.

2 poäng

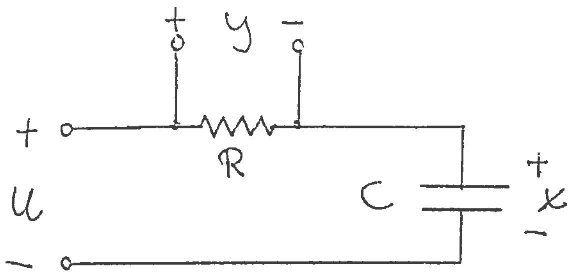
e) Antag ett värde på K_p som leder till ett stabilt system, och att en impulsformad störning $v(t) = v_0 \cdot \delta(t)$ plötsligt (vid tiden noll) adderas till styrsignalen. Vad blir reglerfelet $e(t)$ och styrsignalen $u(t)$ som funktioner av tiden? (Svaret beror av K_p och av störningens storlek v_0. Bortse från börvärdets inverkan.)

2 poäng

f) I fallet enligt uppgift e, vilket värde på reglerparametern K_p leder, för ett visst givet ρ, till ett minsta möjliga värde på kriteriet J?

3 poäng

2. Betrakta RC-kretsen i figuren nedan:



Systemets insignal är pålagd spänning u och dess utsignal är spänningen y över resistansen R. Som tillståndsstorhet har valts spänningen x över kapacitansen C.

a) Ange systemmatriserna (som är skalärer i detta fall) i en linjär tillståndsmodell på formen

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; y = Cx + Du$$

3 poäng

b) Systemet samplas med samplingsintervallet h. Bestäm matriserna i motsvarande samplade tillståndsmodell (C och D påverkas inte av samplingen.)

$$x(kh+h) = Fx(kh) + Gu(kh)$$

2 poäng

3. Ett system som har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-s/2}}{10s}$$

skall regleras med en P-, PI-, PD-, eller PID-regulator så att följande specifikationer uppfylls:

(1) Systemets utsignal skall följa en ***rampformad*** referens utan kvarstående fel mellan utsignal $y(t)$ och referens $r(t) = r_0 \cdot t \cdot \sigma(t)$ där r_0 är konstant och $\sigma(t)$ betecknar ett enhetssteg.

(2) Systemets fasöverkorsningsfrekvens, ω_p, skall vara minst 2,5 rad/minut.

(3) Systemets amplitudmarginal, A_m, skall vara minst 6 dB.

Välj och <u>motivera</u> lämplig regulatortyp, och <u>beräkna</u> dess parametervärden så att ovanstående specifikationer uppfylls.

5 poäng

4. Ett roterande mekaniskt system består av en vek axel, där den ena sidan av axeln påverkas av ett styrbart drivande moment τ. På andra sidan av det veka axelpartiet finns ett svänghjul, vars position skall styras. Svänghjulets position ϕ_2 liksom dess vinkelhastighet ω_2 är mätbara. Utgående från mekanikens lagar kan systemet beskrivas matematiskt på följande vis:

$$\tau - D \cdot (\phi_1 - \phi_2) - B \cdot \frac{d\phi_1}{dt} = 0$$

$$D \cdot (\phi_1 - \phi_2) - J \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega_2$$

Parametrarna B, D och J betraktas som givna konstanter. Naturliga tillståndsstorheter är här vinklarna ϕ_1, ϕ_2 och vinkelhastigheten ω_2. Utred om systemet är styrbart från momentet τ. Utred också om systemet är observerbart från ϕ_2 eller från ω_2.

5 poäng

5. Ett återkopplat system har kretsöverföringen

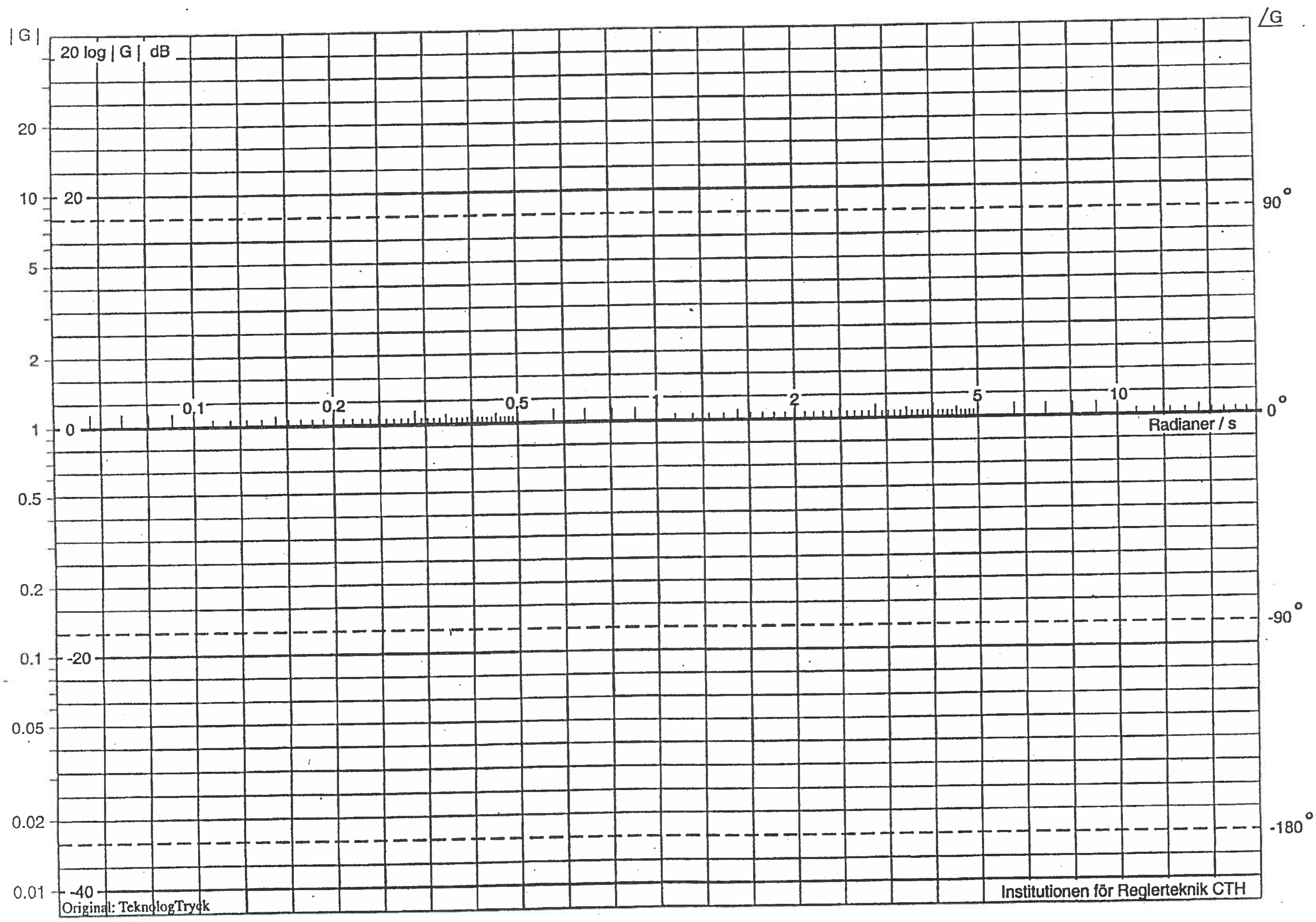
$$L(s) = \frac{\gamma(1-s)}{(1+s)^5}$$

a) Varför kan i detta fall Nyquists förenklade kriterium användas?

1 poäng

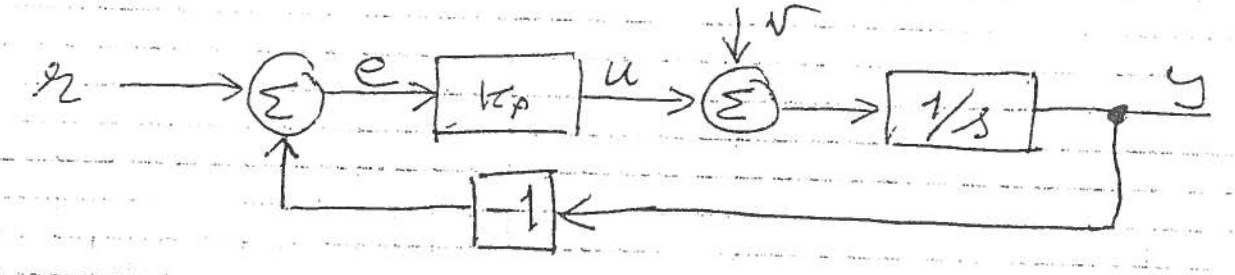
b) Skissera systemets Nyquistkurva och använd Nyquists förenklade kriterium till att avgöra det återkopplade systemets stabilitet då förstärkningen $\gamma = 1$.
Vad är systemets amplitudmarginal?

4 poäng


|G|
20 log |G| dB
20
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
20
0
-20
-40
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
Radianer / s
∠G
90°
0°
-90°
-180°
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH

LÖSNING TILL REGLERTEKNIK E3 (ESS017) 2009-08-20

1.



a) KE $K_p \cdot \frac{1}{s} + 1 = 0 \Rightarrow s + K_p = 0$

Systemet stabilt för $\underline{\underline{K_p > 0}}$.

b) $Y(s) = \frac{K_p/s}{1 + K_p/s} R(s)$; $E(s) = R(s) - Y(s) = \frac{s}{s+K_p} \cdot R(s)$

$R(s) = r_0/s \Rightarrow E(s) = \frac{r_0}{s+K_p} \Rightarrow e(t) = r_0 e^{-K_p t}$

$e(\infty) = \lim_{s \to 0} e(t) = 0$ (alternativt använd slutvärdessatsen!)

c) $E(s) = -\frac{1}{s}[V(s) + U(s)] = -\frac{1}{s}[v_0 \cdot 1 + K_p \cdot E(s)]$

$(s + K_p)E(s) = -v_0 \Rightarrow e(t) = -v_0 e^{-K_p t} \Rightarrow$

$e(\infty) = \lim_{s \to 0} e(t) = 0$

d) $J = \int_0^\infty [e^2 + \rho u^2] dt$

Lågt värde på $\rho \Rightarrow$ Lösningar som innebär stora styrsignaler främjas, då de ger ett lågt bidrag till J, vilket inte är bra. Däremot motverkas e effektivt och snabbt, vilket är bra.

Högt värde på $\rho \Rightarrow$ Små styrsignaler främjas, vilket är bra, men felet, e, avtar långsamt vilket [illegible]

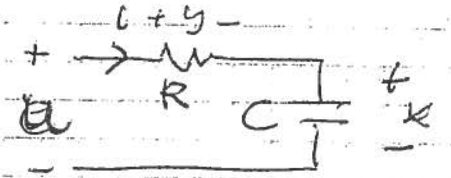
e) Som tidigare fås $e(t) = -v_0 e^{-K_p t}$.

$u = K_p \cdot e \Rightarrow u(t) = -K_p v_0 e^{-K_p t}$.

f)
$$J = \int_0^\infty \left[v_0^2 \cdot e^{-2K_p t} + \rho \cdot K_p^2 v_0^2 e^{-2K_p t} \right] dt$$
$$= \left[1 + \rho K_p^2\right] v_0^2 \int_0^\infty e^{-2K_p t}\, dt =$$
$$= \left[1 + \rho K_p^2\right] v_0^2 \Big[\left(-\frac{1}{2K_p}\right) e^{-2K_p t} \Big]_0^\infty = \left(\frac{1}{K_p} + \rho K_p\right) \cdot \frac{v_0^2}{2}$$
$$\frac{dJ}{dK_p} = \left(-\frac{1}{K_p^2} + \rho\right) \cdot \frac{v_0^2}{2} = 0 \Rightarrow K_p^2 = \rho^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{K_p = 1/\sqrt{\rho}}}$$

---

2. a) $u - R \cdot i - x = 0$



$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cx) =$

$= C\dot{x}$ (elementär ellära) $\quad y = R \cdot i = u - x$

$$RC\dot{x} = u - x \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{RC} \cdot x + \frac{1}{RC} \cdot u \\ y = -x + u \end{cases}$$

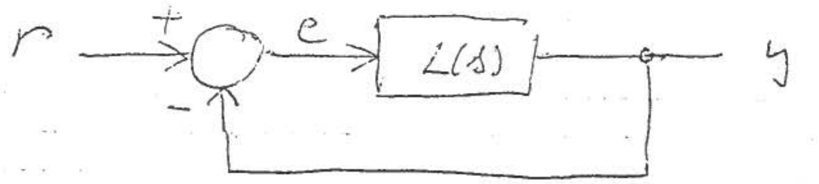
$$\begin{pmatrix} A = -1/RC, & B = 1/RC \\ C = -1, & D = 1 \end{pmatrix}$$

b) $e^{At} = e^{-t/RC}$; $\quad x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$

$t = kh + h$, $t_0 = kh \Rightarrow$

$$x(kh+h) = e^{Ah} \cdot x(kh) + \int_{kh}^{kh+h} e^{A(\overbrace{kh+h-\tau}^{=r})} B \cdot \overbrace{u(kh)}^{\text{konstant!}}\, d\tau =$$
$$= e^{Ah} x(kh) + \int_h^0 e^{Ar} B\, u(kh)(-dr) = e^{-h/RC} \cdot x(kh) +$$
$$+ \underbrace{\int_0^h e^{-\frac{r}{RC}} dr}_{= \left[-RC \cdot e^{-\frac{r}{RC}}\right]_0^h = RC(1 - e^{-\frac{h}{RC}})} \cdot \frac{1}{RC} \cdot u(kh) \quad \Bigg\} \Rightarrow \quad \underline{\underline{F = e^{-\frac{h}{RC}}}} \qquad \underline{\underline{G = 1 - e^{-\frac{h}{RC}}}}$$

3.



$$Y = \frac{L}{1+L}\cdot R \Rightarrow E = \left(1 - \frac{L}{1+L}\right)R = \frac{R}{1+L} =$$

$$= \frac{r_0/s^2}{1 + \frac{e^{-s/2}}{10\cdot s}\cdot F(s)} = \frac{r_0}{s^2 + \frac{e^{-s/2}}{10}\cdot s\cdot F(s)}$$

Om stabiliserande regulator antages, fås:

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{r_0}{s + \frac{e^{-s/2}}{10}\cdot F(s)} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{r_0}{s + 0.1\cdot e^{-s/2}\left(\ldots + \frac{K_I}{s}\right)} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{r_0\cdot s}{s + 0.1\cdot e^{-s/2}\left[s(\ldots) + K_I\right]}$$

$$e(\infty) = 0 \Leftrightarrow K_I \neq 0 \text{ (om stabilt)}$$

Dvs PID (eller PI) krävs. Testa PI, ty det är enklast om det räcker med det.
($K_i = 0 \Rightarrow e(\infty) = r_0/[0.1 * F_0(0)]$, där $F_0(s)$ är den del av regulatorn som saknar integration.)

$$L(s) = \frac{e^{-s/2}}{10\cdot s}\left[K_p + \frac{K_I}{s}\right];\quad \angle L(j\omega_\pi) = -\pi$$

$$-\pi = -\pi + \angle K_I + j\omega_\pi K_p - \omega_\pi/2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{\omega_\pi K_p}{K_I}\right) = \frac{\omega_\pi}{2};\quad \left(\frac{\sqrt{K_p^2\omega_\pi^2 + K_I^2}}{10\omega_\pi^2}\right)^{-1} = \underset{(6\,dB)}{2} \\ \overset{25}{\cancel{100}}\,\omega_\pi^4 = K_p^2\omega_\pi^2 + K_I^2; \end{cases}$$

$$\omega_\pi = 2.5 \Rightarrow \frac{2.5 K_p}{K_I} = \tan\left(\frac{2.5}{2}\right) \approx 3 \Rightarrow K_p \approx 1.2 * K_I$$

④

3 (forts.) $1{,}2^2 \times K_I^2 \times 2{,}5^2 + K_I^2 = [\underbrace{(1{,}2 \times 2{,}5)^2}_{=3} + 1] K_I^2$

$10 K_I^2 = \cancel{400}\,25 \times 2{,}5^4 \Rightarrow$ ~~...~~

$K_I^2 = 2{,}5^5$

$K_I \approx 9{,}9 \qquad K_p = \cancel{\ldots}\ 11{,}9$

Testa PI-regulator $\underline{K_p = \cancel{\ldots}\ 9{,}9}$ och $\underline{K_I = \cancel{\ldots}\ 11{,}9}$

---

4. $$\begin{cases} \tau - D(\phi_1 - \phi_2) - B\dot{\phi}_1 = 0 \\ D(\phi_1 - \phi_2) - J\dot{\omega}_2 = 0 \\ \dot{\phi}_2 - \omega_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi_1 = x_1 \\ \phi_2 = x_2 \\ \omega_2 = x_3 \\ \tau = u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{D}{B} x_1 + \frac{D}{B} x_2 + \frac{1}{B} u \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{D}{J} x_1 - \frac{D}{J} x_2 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -D/B & D/B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ D/J & -D/J & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{cases} y_1 = [\,0 \quad 1 \quad 0\,]\, x = C_1 x \\ y_2 = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]\, x = C_2 x \end{cases}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -D/B^2 \\ 0 \\ D/BJ \end{bmatrix} ; \quad A^2B = \begin{bmatrix} -D/B & D/B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ D/J & -D/J & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D/B^2 \\ 0 \\ D/BJ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D^2/B^3 \\ D/BJ \\ -D^2/B^2J \end{bmatrix} ; \quad S = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1/B & -D/B^2 & D^2/B^3 \\ 0 & 0 & D/BJ \\ 0 & D/BJ & -D^2/B^2J \end{bmatrix}$$

$$\det(S) = -\frac{D^2}{B^3J^2} \neq 0 \Rightarrow \text{Styrbart system!}$$

4 (forts)

$$C_1A = [0 \;\; 1 \;\; 0] \begin{bmatrix} -D/B & D/B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ D/J & -D/J & 0 \end{bmatrix} = [0 \;\; 0 \;\; 1]$$

$$C_1A^2 = (C_1A)A = [0 \;\; 0 \;\; 1] \begin{bmatrix} -D/B & D/B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ D/J & -D/J & 0 \end{bmatrix} = [D/J \;\; -D/J \;\; 0]$$

$$\mathcal{O}_1 = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A \\ C_1A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ D/J & -D/J & 0 \end{bmatrix} \; ; \det(\mathcal{O}_1) = D/J \neq 0$$

$$C_2A = [0 \;\; 0 \;\; 1]A = [D/J \;\; -D/J \;\; 0]$$

$$C_2A^2 = [D/J \;\; -D/J \;\; 0] \begin{bmatrix} -D/B & D/B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ D/J & -D/J & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= [-D^2/BJ \;\; D^2/BJ \;\; -D/J]$$

$$\mathcal{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ D/J & -D/J & 0 \\ -D^2/BJ & D^2/BJ & -D/J \end{bmatrix} \; ; \det(\mathcal{O}_2) = \frac{D^3}{BJ^2} - \frac{D^2}{BJ^2} = 0$$

∴ Systemet ~~styrbar~~ observerbart från θ_2, men inte från ω_2.

---

5. a) Nyquists förenklade kriterium kan (i princip*) användas då $P = 0$ (dvs inga openloop poles in RHP)

* Det förenklade kriteriet kan i praktiken vara "svåranvänt", då N-kurvan slingrar sig "som en orm" runt realaxeln, även om $P=0$.

5. b)

$$L(s) = \frac{\gamma(1-s)}{(1+s)^5}$$

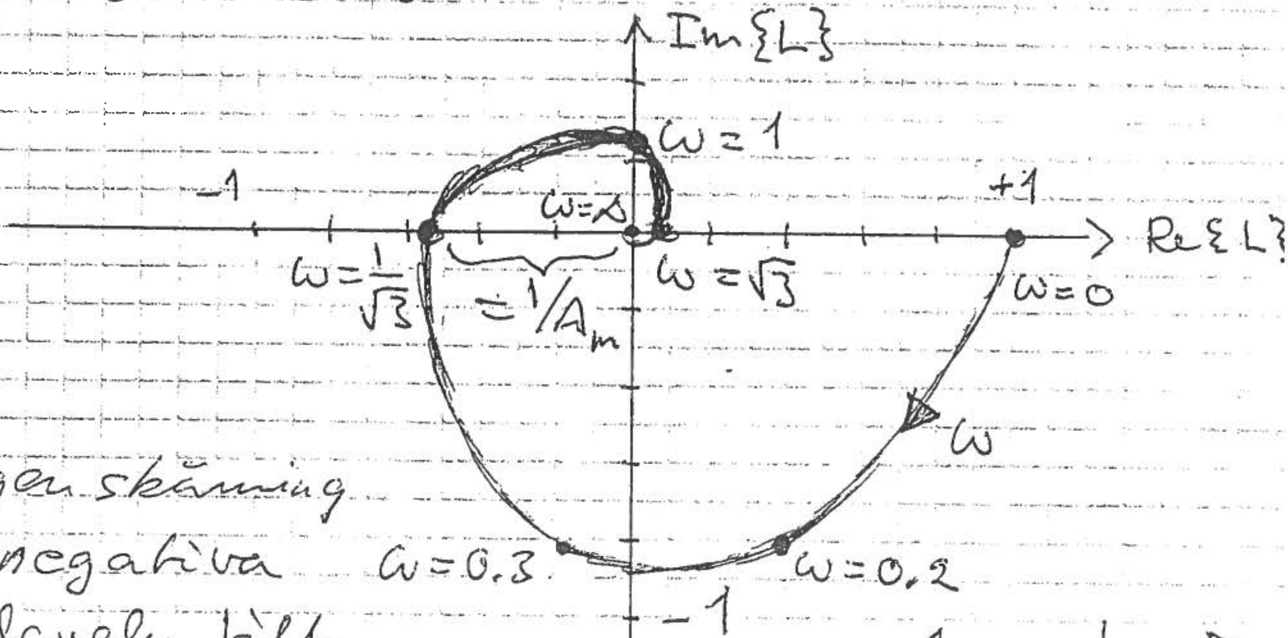
$$L(j\omega) = \gamma \frac{1-j\omega}{1+j\omega} \cdot \frac{1}{(1+j\omega)^4}$$

$$|L(j\omega)| = \frac{\gamma}{(1+\omega^2)^2}$$

$$\arg\{L(j\omega)\} = -6 \arctan \omega$$

ω	$\lvert L \rvert$	$\arg\{L\}$
0	1	0
$1/\sqrt{3}$	9/16	$-180°$
1	1/4	$-270°$
$\sqrt{3}$	1/16	$-360°$
∞	0	$-\infty$
0.2	0.92	$-68°$
0.3	0.84	$-100°$

$(\gamma = 1.)$



Ingen skärning av negativa realaxeln till vänster om pkten -1.

$\Rightarrow$ Stabilt återkopplat system för $\gamma = 1$.

$$\frac{1}{A_m} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$A_m = \sqrt{3} = 4.8 \text{ dB}$$