CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för E3, ESS017, måndagen 20 oktober 2008.

Tid: Kl 08.30 - 12.30

Lokal: V

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718
Lärare som besöker skrivsalen: Magnus Nilsson, telefon Chalmers 3697

Tentamensresultaten anslås senast den 6 november på institutionens anslags-tavla. Granskning av rättning kan ske den 6 och den 7 november, 12.30 -13.00, på institutionen, plan 5 i E-huset. Iakttag granskningstiderna! Den som kommer senare får endast avge skriftliga klagomål mot rättningen, som skall inlämnas senast två veckor efter granskningsdagarna.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Ett direkt följdfel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är fullständigt orimligt. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 12 poäng
betyg FYRA: minst 18 poäng
betyg FEM : minst 24 poäng

Tillåtna hjälpmedel:

1. Kursboken, dvs ***Reglerteknik-Grundläggande teori***, av Glad och Ljung.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. Inga "laptop-datorer"!

LYCKA TILL!

1. Ett linjärt tidsinvariant system har överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1-s^2}{(1+s+s^2)^2}$$

(a) Ange samtliga poler till systemet G(s). Är systemet insignal-utsignalstabilt? (Motivera!)

1 poäng

(b) Är systemet av minimumfastyp? (Motivera!) Om inte, ange det minimumfassystem som har samma beloppsfunktion som G(s).

2 poäng

2. Ett system med överföringsfunktionen G(s) styrs med PI-regulatorn $F(s) = K_p + K_i/s$.

$$G(s) = \frac{2-s}{s-1}$$

Definiera och upprita det område i $K_i K_p$ -planet som motsvarar ett stabilt återkopplat system.

2 poäng

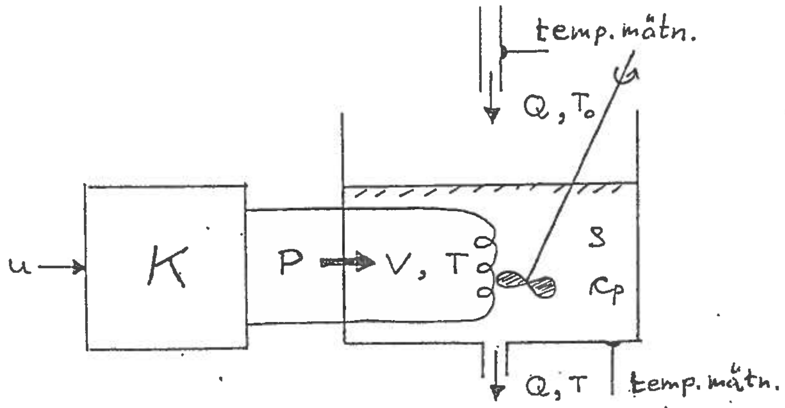
3. Kemiska tankreaktorer behöver (oftast) en omrörare, för att undvika stora koncentrations- och temperaturgradienter i reaktorkärlet. Omröraren kan exempelvis bestå av en "propeller" som roterar med hastigheten ω, och drivs av en elektrisk motor vars styrspänning är u. Sambandet mellan varvtal och styrspänning beskrivs av den olinjära differentialekvationen

$$\left[J \cdot \frac{d\omega}{dt} + K_G \cdot \omega^2\right] \cdot \frac{R}{K_T} + K_E \cdot \omega = u$$

där motoraxeln och omröraren tillsammans antas ha tröghetsmomentet J, resistansen i motorns drivkrets är R, medan K_T och K_E är givna konstanta parametrar, karakteristiska för elmotorn. Den kvadratiska termen representerar det bromsande momentet vid omrörning, där parametern K_G anses känd. Genom att sätta accellerationstermen till noll kan man enkelt bestämma vilket stationärt varvtal, ω_0, som fås vid den konstanta motorspänningen u_0 (behöver ej göras här). Ange den överföringsfunktion som relaterar små spänningsändringar, Δu, till motsvarande små ändringar i varvtalet, Δω, i närheten av jämviktspunkten (ω_0, u_0).

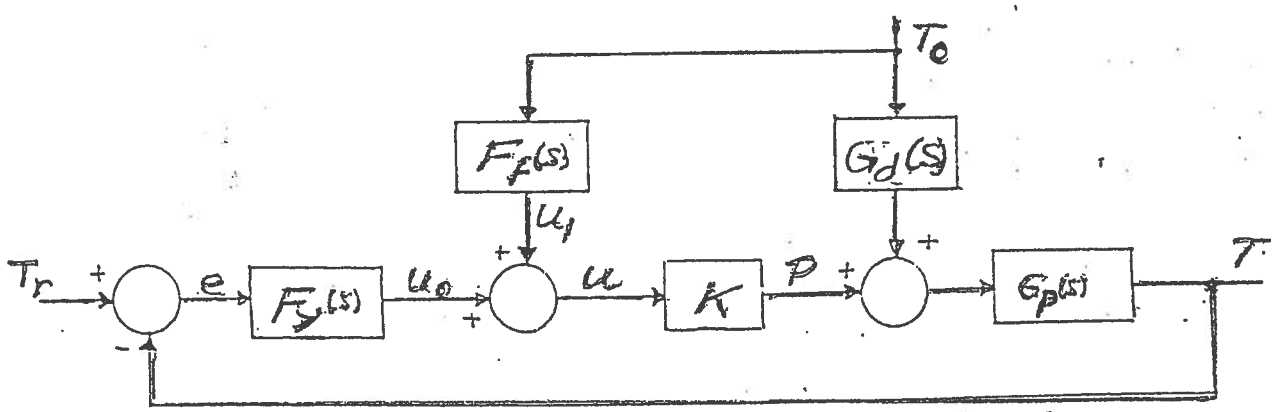
5 poäng

4. En uppvärmningsprocess med tillflöde, avlopp och elektrisk värmare med god omrörning visas i nedanstående figur. Volymen V och volymsflödet Q betraktas som konstanta parametrar. Den tillförda effekten är approximativt proportionell mot styrsignalen, dvs $P = K \cdot u$, där K är en konstant. Temperaturerna i tank och i tillflöde, T respektive T_0, är båda (kontinuerligt) mätbara. Vätskans densitet och specifika värme är konstanter och betecknas ρ respektive c_p.



Uppvärmningsprocessen kan beskrivas matematiskt av den linjära differentialekvationen:

$$\frac{d}{dt}\{V\rho c_p T\} = P - Q\rho c_p(T - T_0)$$



Bestäm överföringsfunktionerna $G_p(s)$, $G_d(s)$ i ovanstående blockdiagram, och bestäm framkopplingsfiltret $F_f(s)$, så att inverkan av variationer i tillflödestemperaturen T_0 fullständigt elimineras. Observera speciellt att beräkning av regulatorn $F_y(s)$ inte ingår i uppgiften!

5 poäng

5. Betrakta systemet, vars insignal är u och utsignal är y, som beskrivs av tillståndsmodellen

$$\frac{d}{dt}z(t) = (-1 + i \cdot 2)z(t) + (1 - i)u(t) \text{ och } y(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\}$$

där $u \in R$, $z \in C$, $y \in R$. (Tillämpningar av sådana system finns bl a för asynkronmaskiner.)

a) Definiera en reell tillståndsmodell med tillståndsvektorn $x \in R^2$ vars komponenter ges av:

$$x_1 = \mathrm{Re}\{z\}, x_2 = \mathrm{Im}\{z\}$$

Den nya modellen skall alltså ha formen $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, där A, B och C samtliga är reella matriser som skall anges numeriskt.

2 poäng

b) Är systemet ovan insignal-utsignalstabilt? Är tillståndsmodellen styr- och observerbar?

3 poäng

6. För en värmeväxlare (G) i ett fartygsmaskineri, där styrstorheten är ett ventilläge och utstorheten är en temperatur, har belopp och fas bestämts experimentellt för några olika frekvenser:

Tabell 1:

ω rad/min	$\lvert G(i\omega) \rvert$ dB	$\arg G(i\omega)$ grader
0,1	10	-30
0,2	8,5	-50
0,4	7	-78
0,8	2	-123
1,6	-7	-180
2,5	-14,5	-220
4,0	-22	-261

Värmeväxlaren skall regleras, så att kvarstående fel efter stegstörningar ej uppstår. Stabilitetskravet är en fasmarginal av minst 55 grader vid överkorsningsfrekvensen 0,64 rad/min. Föreslå regulatortyp och bestäm lämpliga parametervärden. Upprita även ett fullständigt Bodediagram för det kompenserade systemet, där det klart framgår att specifikationerna är uppfyllda.

5 poäng

7. Betrakta det linjära tidsinvarianta systemet

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + u(t) + v_1(t) \text{ och } y(t) = x(t) + v_2(t)$$

De stokastiska störningarna v_1 och v_2 är båda Gaussiska, vita, med medelvärden noll och varianser ett (för enkelhets skull).

En allmän observatör till ett linjärt system kan som bekant skrivas

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K[y(t) - C\hat{x}(t)]$$

Den observatör som är ***optimal***, både med beaktande av systemets dynamik och på tillgänglig statistisk information om system- och mätstörningar, kallas ***Kalman-filter***. I detta fall väljer vi speciellt observatörsmatrisen

$$K = PC^TR_2^{-1}$$

där $n \times n$ -matrisen P är lösningen till den så kallade *Riccatiekvationen*

$$AP + PA^T + R_1 = PC^TR_2^{-1}CP$$

som är en andra gradens matrisekvation, och där den *positivt definita lösningen* skall väljas. (I specialfallet då $n = 1$ är *positivt definit* och > 0 samma sak.)

Kalmanfiltret (liksom även andra observatörer) kan uttryckas på formen

$$\hat{X}(s) = H_y(s)Y(s) + H_u(s)U(s)$$

Bestäm i ovanstående fall Kalmanfiltrets överföringsfunktioner, H_y, H_u, samt upprita ett enkelt blockdiagram som visar hur $\hat{x}(t)$ erhålles ur signalerna $y(t)$ och $u(t)$.

5 poäng

1. (a) $s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ dubbelpoler i $s = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ och i $s = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ Samtliga poler i VHP

$\Rightarrow$ Insignal-utsignalstabilt system.

(b) $1 - s^2 = (1-s)(1+s) = 0 \Rightarrow s = \pm 1$

$\Rightarrow$ Nollställen i $s = 1$ och i $s = -1$

Ett nollställe ($s = 1$) i HHP $\Rightarrow$

Icke-minimumfassystem.

$$G(s) = \frac{(1-s)(1+s)}{(1+s+s^2)^2} \cdot \frac{1+s}{1+s} =$$

$$= \underbrace{\frac{(1+s)^2}{(1+s+s^2)^2}}_{= \text{Motsv. minfassystem}} \cdot \left(\frac{1-s}{1+s}\right)$$

2. $$L(s) = G(s)F(s) = \frac{(K_p s + K_i)(2-s)}{s(s-1)}$$

KE: $L(s) + 1 = 0$, dvs

$$(1 - K_p)s^2 + (2K_p - K_i - 1)s + 2K_i = 0$$

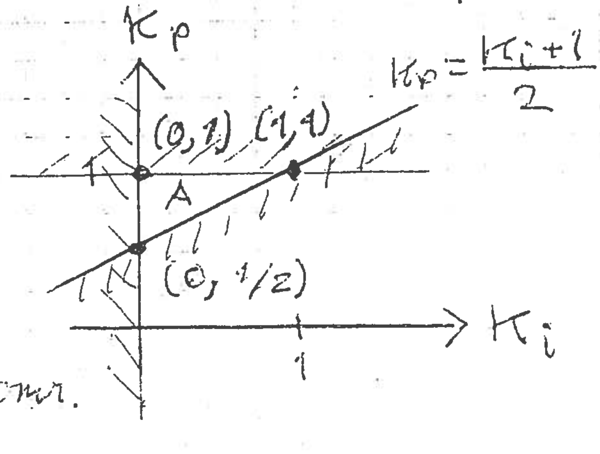
2:a ordn. system $\Rightarrow$ Stabilt om alla koeff. > 0:

$1 - K_p > 0 \Rightarrow K_p < 1$

$2K_i > 0 \Rightarrow K_i > 0$

$2K_p - K_i - 1 > 0 \Rightarrow$

$K_p > \frac{K_i}{2} + \frac{1}{2}$



Triangeln A är det stabila omr.

2

3. $$J\dot{\omega} + K_G\omega^2 + \frac{K_E K_T}{R}\cdot\omega = \frac{K_T}{R}u$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{K_T}{RJ}u - \frac{K_G}{J}\omega^2 - \frac{K_E K_T}{RJ}\omega =$$

$$= f(\omega, u)$$

$$f(\omega,u) = \overbrace{f(\omega_0, u_0)}^{=0} + \left[\frac{\partial f}{\partial \omega}\right]_{\substack{\omega=\omega_0\\ u=u_0}} \cdot \overbrace{(\omega-\omega_0)}^{=\Delta\omega}$$

$$+\left[\frac{\partial f}{\partial u}\right]_{\substack{\omega=\omega_0\\ u=u_0}} \overbrace{(u-u_0)}^{=\Delta u} + \ldots$$

"Små" avvikelser $\Rightarrow$ Högre ordn. termer ≈ 0

$f(\omega_0, u_0) = 0$ ty (ω_0, u_0) jämviktspunkt

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{K_T}{RJ}, \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} = -\frac{2K_G}{J}\omega - \frac{K_E K_T}{RJ}$$

$$\frac{d}{dt}[\omega_0 + \Delta\omega] = \frac{d}{dt}\Delta\omega = \Delta\dot{\omega}$$

$$\Delta\dot{\omega} = \frac{K_T}{RJ}\Delta u - \left[\frac{2K_G\omega_0}{J} + \frac{K_E K_T}{RJ}\right]\Delta\omega$$

(3p)

$\mathcal{L}$-transformering ger:

$$s\Delta\Omega(s) + [\ldots]\Delta\Omega(s) = \frac{K_T}{RJ}\Delta U(s)$$

$$\underline{\underline{G(s)}} = \frac{\Delta\Omega(s)}{\Delta U(s)} = \underline{\underline{\frac{\frac{K_T}{RJ}}{s + \frac{2K_G\omega_0}{J} + \frac{K_E K_T}{RJ}}}}$$

(2p)

4. $$V \rho c_p \frac{dT}{dt} = P - Q \rho c_p (T - T_0)$$

$$\frac{V}{Q} \cdot \frac{dT}{dt} + T = \frac{1}{Q \rho c_p} P + T_0$$

Laplacetransformering ger:

$$\left(\frac{V}{Q} s + 1\right) T(s) = \frac{1}{Q \rho c_p} \cdot P(s) + T_0(s)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G_p(s)}} = \frac{T(s)}{P(s)} = \underline{\underline{\frac{(Q \rho c_p)^{-1}}{\frac{V}{Q} s + 1}}} \qquad (1p)$$

$$G_p(s) \cdot G_d(s) = \frac{T(s)}{T_0(s)} = \frac{1}{\frac{V}{Q} s + 1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{G_d(s) = Q \rho c_p}} \qquad (1p)$$

$$T(s) = G_p(s) \left[G_d(s) \cdot T_0(s) + K(U_0(s) + u(s)) \right]$$

$$= G_p(s) \cdot K \cdot U_0(s) +$$

$$+ G_p(s) \left[G_d(s) T_0(s) + K \cdot F_f(s) T_0(s) \right] =$$

$$= \ldots + G_p(s) \underbrace{\left[G_d(s) + K F_f(s) \right]}_{= 0} T_0(s)$$

$$\therefore \underline{\underline{F_f(s)}} = -\frac{G_d(s)}{K} = \underline{\underline{-\frac{Q \rho c_p}{K}}} \qquad (3p)$$

5. a) $\frac{d}{dt}(R_z + iI_z) = (-1+i2)(R_z + iI_z) +$
$+ (1-i)u$

$$\begin{cases} \dot{R}_z = -R_z - 2I_z + u \\ \dot{I}_z = 2R_z - I_z - u \end{cases}$$

$y = R_z$ $\qquad x = \begin{bmatrix} R_z \\ I_z \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u}}, \quad \underline{\underline{y = [1 \quad 0]x}}$$

b) $\underline{\underline{G(s)}} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{(s+1)^2+4} \underbrace{[1 \quad 0] \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}}_{=[s+1 \quad -2]} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{s+1-2\cdot(-1)}{(s+1)^2+4} = \underline{\underline{\frac{s+3}{s^2+2s+5}}}$$

Poler är $-1 \pm i2 \Rightarrow$ båda poler i VHP

$\Rightarrow$ <u>Systemet är insignal-utsignalstabilt!</u>

Inga förkortningar mellan poler och nollställen $\Rightarrow$ minimal form $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>Styr- och observerbart!</u>

6. En PI-regulator $(as+b)/s$ klarar stegstörningar

$$F(i\omega_c) = a + \frac{b}{i\omega_c}$$

Vid $\omega_c = 0.64$ gäller enl Bodediagrammet för Processen $G(i\omega)$:

$$|G(i0.64)| = 4 \text{ dB}$$

$$\arg\{G(i0.64)\} = -117^\circ$$

$\because$ Enligt def. av begr. överkorsn.frekv. och fasmarginal:

$$20 \log\left|a - i\frac{b}{0{,}64}\right| + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\left|a - i\frac{b}{0{,}64}\right| = 10^{-4/20} = 0.631 \qquad (1)$$

$$\arg\left\{a - i\frac{b}{0{,}64}\right\} - 107^\circ + 180^\circ \geq 55^\circ$$

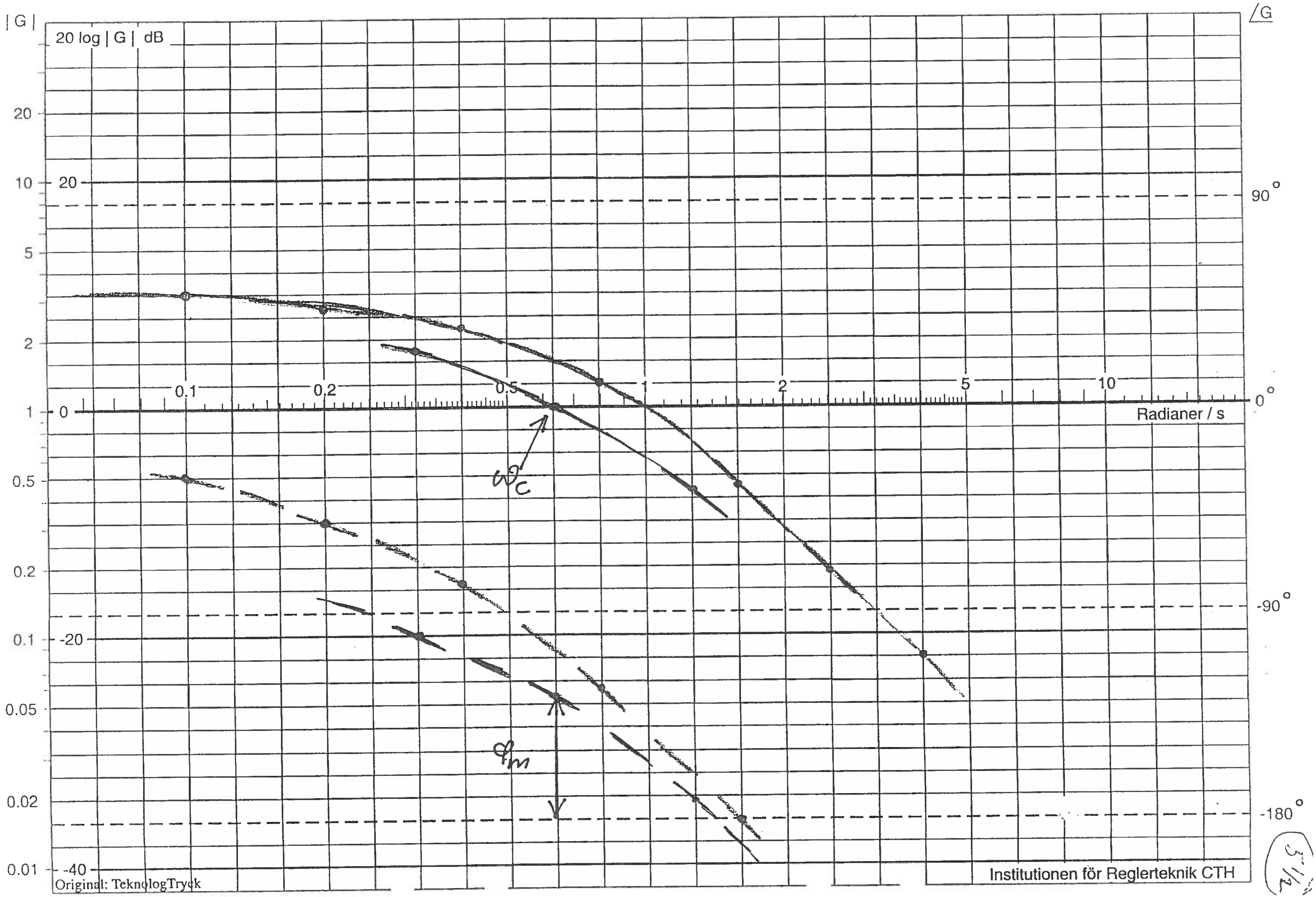
$$\arg\left\{a - i\frac{b}{0{,}64}\right\} \geq -18^\circ \qquad (2)$$

(1) och (2) $\Rightarrow$ $a - i\frac{b}{0{,}64} = 0.60 - i0.195$

$\Rightarrow$ $a = 0.60$ och $b = 0.125$

$$\underline{\underline{F(s) = 0.6 + \frac{1}{8s}}}$$ (Se diagram!)

ω	$\arg F(i\omega)$	$\lvert F(i\omega)\rvert$	$\lvert F(i\omega)\rvert_{dB}$
0.32	-33°	0.716	-3
0.64	-18°	0.631	-4
1.25	-9.5°	0.608	-4.5


|G|
20 log |G| dB
∠G
20
10
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
20
0
-20
-40
90°
0°
-90°
-180°
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
Radianer / s
ω_c
φ_m
Original: TeknologTryck
Institutionen för Reglerteknik CTH

7. $\dot{x} = -x + u + v_1 \Rightarrow Ev_1 = 0 \; , \; Ev_1^2 = 1 = R_1$

$y = x + v_2 \Rightarrow Ev_2 = 0 \; , \; Ev_2^2 = 1 = R_2$

$A = -1 \; , \; B = 1 \; , \; C = 1$ (alla skalärer!)

Riccatiekvationen: $AP + PA^T + R_1 = PC^T R_2^{-1} CP$

$\Rightarrow -p - p + 1 = P \cdot 1 \cdot 1^{-1} \cdot 1 \cdot P$

$\Rightarrow p^2 + 2p - 1 = 0 \Rightarrow P = -1 (\pm) \sqrt{2} > 0$

$K = PC^T R_2^{-1} = (\sqrt{2} - 1) \cdot 1 \cdot 1^{-1} = \sqrt{2} - 1$

Observatören: $\frac{d}{dt}\hat{x} = A\hat{x} + Bu + K[y - C\hat{x}]$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{x} = -\hat{x} + u + (\sqrt{2} - 1)[y - \hat{x}] =$

$= [-1 - (\sqrt{2} - 1)]\hat{x} + u + (\sqrt{2} - 1)y =$

$= -\sqrt{2}\hat{x} + u + (\sqrt{2} - 1)y$

$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) + \sqrt{2} \cdot \hat{x}(t) = u(t) + (\sqrt{2} - 1)y(t)$

$(s + \sqrt{2})\hat{X}(s) = U(s) + (\sqrt{2} - 1)Y(s)$

$$\underline{\underline{\hat{X}(s) = \frac{\sqrt{2} - 1}{s + \sqrt{2}} \cdot Y(s) + \frac{1}{s + \sqrt{2}} \cdot U(s)}}$$

Observatörens (Kalmanfiltrets) struktur: