CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Avdelningen för reglerteknik

Tentamen i Reglerteknik för E3, ESS017, tisdagen 21 augusti 2008.

Tid: Kl 14.00 - 18.00

Lokal: M

Examinator: Claes Breitholtz, telefon Chalmers 3718
Lärare som besöker skrivsalen: Claes Lindeborg, telefon Chalmers 3719

Tentamensresultaten anslås senast den 10 september på institutionens anslags-tavla. Granskning av rättningen kan ske den 10 och den 11 september, 12.30 - 13.00, på institutionen, plan 5 i E-huset. Iakttag granskningstiderna! Den som kommer senare får endast avge <u>skriftliga</u> klagomål mot rättningen, som skall inlämnas <u>senast</u> två veckor efter granskningsdagarna.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng. Räknefel leder normalt till en poängs avdrag. Ett direkt följdfel (såvida ingen orimlighet "dyker upp") leder inte till ytterligare poängavdrag. Ofullständiga lösningar leder till större poängavdrag. Detta gäller även fullständigt lösta uppgifter där grövre felaktigheter förekommer, alternativt om svaret är fullständigt orimligt. Följande betygskala gäller:

betyg TRE : minst 12 poäng
betyg FYRA: minst 18 poäng
betyg FEM : minst 24 poäng

<u>Tillåtna hjälpmedel</u>:

1. Kursboken, dvs ***Reglerteknik**-Grundläggande teori*, av Glad och Ljung.
2. Matematiska och fysikaliska tabeller (t ex *BETA* och *Physics handbook*).
3. Skriv- och ritmaterial inklusive gradskiva. Diagram fås av vakten.
4. Valfria räknare med handhavandeinstruktion. <u>Inga "laptop-datorer"!</u>

LYCKA TILL!

1. Antag att ett linjärt system hade viktfunktionen

$$g(t) = \frac{b}{t+a}, \; a > 0, b > 0$$

Vore detta system i så fall insignal-utsignalstabilt? (Problemet löses enklast utan användning av Laplacetransformer!)

2 poäng

2. Ett återkopplat system har kretsöverföringen $L(j\omega) = 10/j\omega$. ***Med hur många dB*** kommer ***en störning*** med frekvensen $\omega = 0,2$ rad/sek ***att undertryckas*** (dvs dämpas)?

2 poäng

3. En tillstånds modell definieras av

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \text{ och } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Bestäm den relativa dämpningen ζ hos motsvarande överföringsfunktion $G(s)$.

2 poäng

4. Karakteristiska ekvationen för ett återkopplat system som innehåller modellparametern β är:

$$s^3 + (4\beta - 1)s^2 + s + \beta = 0$$

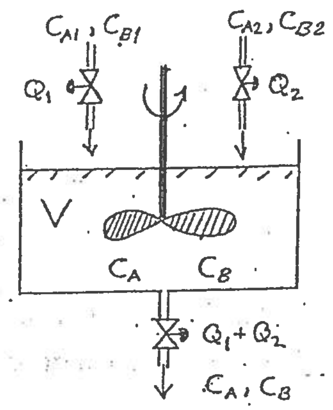
För vilka värden på β är detta återkopplade system stabilt?

2 poäng

5. En termometer kan ses som ett första ordningens system med tidskonstanten 1,5 minut. Om termometern skall registrera temperauren i ett bad, som approximativt antas konstant öka med 0,40 °C per minut, vilken stationär felvisning av temperauren kan då förväntas?

2 poäng

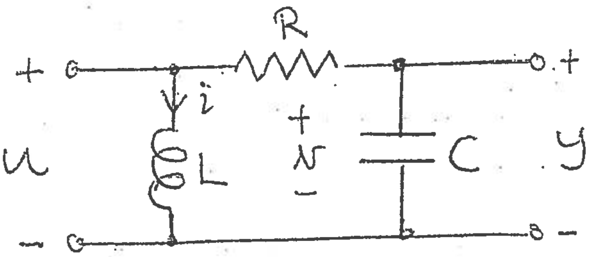
6. Figuren visar ett system för blandning av två konstanta vätskeflöden, Q_1 och Q_2, som var-dera innehåller två komponenter med tidsvariabla koncentrationer C_{1A}, C_{1B}, C_{2A} och C_{2B}. De utgör systemets insignaler. Omrörningen i karet, med den konstanta volymen V, kan antas vara effektiv. (Flöden har dimensionen liter/minut och koncentrationer dimensionen mol/minut.)



Ställ upp tillståndsekvationerna (på matrisform) för blandningssystemet. Koncentrationerna, C_A och C_B, utgör systemets tillståndsstorheter och är samtidigt dess utsignaler. Är systemet insignal-utsignalstabilt?

5 poäng

7. Figuren nedan visar en elektrisk krets.



a) Välj strömmen i genom induktansen och spänningen v över kapacitansen som tillståndsstorheter. Visa att systemets tillståndsmodell blir (dvs härled utgående från kretsens ekvationer):

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} u(t), \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

3 poäng

b) Utgör tillståndsmodellen ovan en minimal representation av systemet?

2 poäng

8. En instabil process skall styras med en PI-regulator. Processens överföringsfunktion är

$$G(s) = \frac{s+1}{2s^2 - s - 1}$$

medan PI-regulatorn har proportionella förstärkningen $K_p = 4$ och integrationstiden $T_i = 2$.

Upprita systemets ***Nyquistdiagrammet***, och utred utgående från detta om det återkopplade systemet är stabilt. (Eventuellt kan kretsöverföringen $L(s) = G(s)F(s)$ förenklas något.)

5 poäng

9. Det linjära tidsinvarianta systemet $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ skall styras optimalt så att det kvadratiska kostnadskriteriet J minimeras (linjärkvadratisk optimering, sid 187 i kursboken).

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

Viktsmatriserna Q och R skall vara positivt semidefinit, respektive positivt definit. Notera att flervariabla problem kan hanteras med denna metod (dvs u får vara en vektor). Om systemet är styrbart och om systemet är observerbart från den fiktiva utsignalen $z = Qx$ så finns det en optimal styrlag $u^* = -Lx$, där det således gäller att beräkna den optimala tillståndsåterkopplingsmatrisen L. Resultatet blir: $L = R^{-1}B^TP$, där P är den symmetriska och positivt definita lösningen till Riccatiekvationen $Q + A^TP + PA - PBR^{-1}B^TP = 0$. Detta utgör (i sin enklaste form) resultaten från teorin för linjärkvadratisk optimering, då tillståndet x är fullständigt känt.

a) Vi undersöker ett enkelt system, $G(s) = 1/(1 + \tau s)$, med insignalen u och utsignalen x som skall regleras med tillståndsåterkoppling. Skriv systemet på tillståndsekvationsform, och identifiera A och B (skalärer här). Sök den optimala reglermatrisen L som minimerar kriteriet

$$J = \int_0^\infty [\rho \cdot x^2(t) + u^2(t)]dt \quad \text{där } \rho > 0$$

Identifiera Q och R, lös Riccatiekvationen och bestäm den optimala förstärkningen L.

3 poäng

b) Man kan utvidga styrlagen, så att en ny insignal (referenssignal) till återkopplade systemet kan införas: $u^* = -Lx + Kr$. L har exakt samma betydelse och bestäms på exakt samma sätt som ovan, medan K bestäms så att utsignalens DC-värde blir lika med referensens DC-värde. Beräkna förstärkningen K (använd L enligt uppgift a).

2 poäng

Lösning till ESS017, Reglerteknik E, 2008-08-21. /BB

1. $\int_0^\infty |g(t)|\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T |g(t)|\,dt < \infty$ $\left(\Longleftrightarrow \text{ Villkor för in-ut-stab.}\right)$

$$\int_0^T |g(t)|\,dt = \int_0^T \frac{b}{t+a}\,dt = b\Big[\ln(t+a)\Big]_0^T =$$

$(a>0,\ b>0)$

$$= b\ln\left(\frac{T+a}{a}\right);\quad \lim_{T\to\infty} b\cdot\ln\left(1+\frac{T}{a}\right) = \infty$$

$\Rightarrow \int_0^\infty |g(t)|\,dt = \infty \Rightarrow$ Systemet inte insignal-utsignalstabilt!

2. $L(j\omega) = \dfrac{10}{j\omega} \Rightarrow S(j\omega) = \dfrac{j\omega}{j\omega+10}$

Störningen förstärks med $|S(j\omega)|$.
Om $\omega \ll 10$ $(\omega = 0.2 \ll 10)$
gäller att förstärkningen blir $\approx \omega/10 = 0{,}02$

$$20\log(0{,}02) = 20\Big[\underbrace{\log(2)}_{=0.3} + \underbrace{\log(0{,}01)}_{=-2}\Big] = 20(-1.7) = -34;$$

Dämpningen blir 34 dB.

3. $$G(s) = (1\ \ 0)\begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)s+1}\underbrace{(1\ \ 0)\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s+1\end{pmatrix}}_{=(s\ \ 1)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{s^2+2\xi\omega_0 s+\omega_0^2};$$

Identifiering ger $\omega_0 = 1$ och $2\cdot\xi\cdot 1 = 1 \Rightarrow$
Relativa dämpningen är $\xi = 0.5$.

4. $s^3 + (4\beta - 1)s^2 + s + \beta = 0$

Routh:

1	1	0	...
$4\beta-1$	β	0	...
$\frac{3\beta-1}{4\beta-1}$	0	0	...
β	0	0	...

Villkor: $\left.\begin{array}{l} 4\beta - 1 > 0 \Rightarrow \beta > 1/4 \\ 3\beta - 1 > 0 \Rightarrow \beta > 1/3 \\ \text{och dessutom } \beta > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\underline{\underline{\beta > 1/3 \text{ för stabilitet.}}}$

5. Termometers utsignal är:

$Y(s) = \frac{1}{1+1.5s} \cdot \frac{0.40}{s^2}$

Badets temperatur är:

$Y_{ref}(s) = \frac{0.40}{s^2}$

Felet är $E(s) = Y_{ref}(s) - Y(s) =$

$= \frac{0.40}{s^2}\left(1 - \frac{1}{1+1.5s}\right) = \frac{0.40 \cdot 1.5s}{s^2(1+1.5s)} =$

$= \frac{0.6}{s(1+1.5s)}$; $\underline{\underline{e(\infty)}} = \lim_{s\to 0} sE(s) =$

$= \lim_{s \to 0} \frac{0.6}{1+1.5s} = \underline{\underline{0.6\ ^\circ C}}$

6. $\frac{d}{dt}$(accumulerat per komponent) = nettoinflöde − nettoutflöde

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(VC_A) = Q_1 C_{A1} + Q_2 C_{A2} - (Q_1+Q_2)C_A \\ \frac{d}{dt}(VC_B) = Q_1 C_{B1} + Q_2 C_{B2} - (Q_1+Q_2)C_B \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} C_A \\ C_B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Q_1+Q_2}{V} & 0 \\ 0 & -\frac{Q_1+Q_2}{V} \end{bmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} C_A \\ C_B \end{pmatrix} +$$

$$+ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{Q_1}{V} & \frac{Q_2}{V} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q_1}{V} & \frac{Q_2}{V} \end{bmatrix}}_{=B} \begin{pmatrix} C_{A1} \\ C_{A2} \\ C_{B1} \\ C_{B2} \end{pmatrix}$$

Tillståndsstorheterna är samtidigt utsignaler ⇒ C-matrisen = I och D-matrisen = 0.

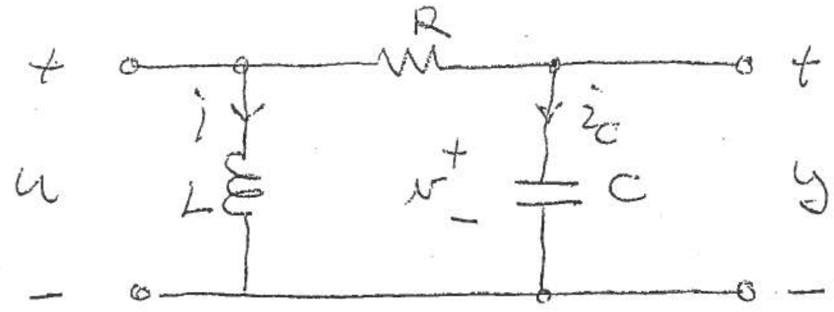
$$\begin{vmatrix} \lambda + \frac{Q_1+Q_2}{V} & 0 \\ 0 & \lambda + \frac{Q_1+Q_2}{V} \end{vmatrix} = \left(\lambda + \frac{Q_1+Q_2}{V}\right)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -(Q_1+Q_2)/V < 0 \Rightarrow$$

<u>Systemet är insignal-utsignalstabilt.</u>

(Samtl. egenv. stabila)

7. a)



$$u - L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}u$$

$$v = \frac{1}{C}\int i_C\,dt \Rightarrow i_C = C\frac{dv}{dt}$$

$$u - R\cdot i_C - v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{RC}u - \frac{1}{RC}v$$

$i = x_1$ och $v = x_2$ samt $y = v = x_2$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{RC} \end{pmatrix} u$$

$$\underline{\underline{y = (0 \quad 1)\,x}}$$

v.s.v.

b) Minimal representation $\Leftrightarrow$ Styrbart och Observerbart system

$$S = (B \quad AB) = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{R^2C^2} \end{pmatrix}$$

S har fullrang $(=2) \Rightarrow$ Styrbart!

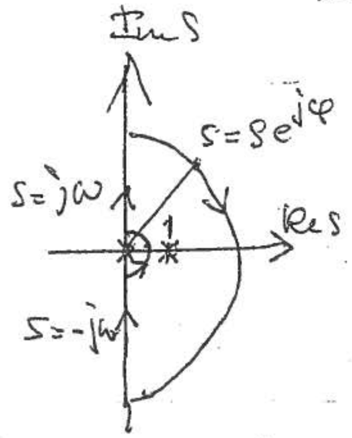
$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{O}$ har rang 1 (ej fullrang) $\Rightarrow$ Inte obs.bart!

Tillståndsmodellen utgör inte en minimal representation av systemet.

8. $L(s) = \frac{\cancel{2}^{2}\cancel{(2s+1)}}{\cancel{2}s} \cdot \frac{s+1}{\cancel{(2s+1)}(s-1)} = \frac{2(s+1)}{s(s-1)}$

$L(j\omega) = \frac{2(1+j\omega)}{j\omega(-1+j\omega)} \cdot \frac{-1-j\omega}{-1-j\omega} = \frac{-2(1+j\omega)^2}{j\omega(1+\omega^2)} =$



$= -2\frac{1-\omega^2+j2\omega}{j\omega(1+\omega^2)} =$

$= -\frac{4}{1+\omega^2} + j\frac{2(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)} = R + jI$

ω	$R(\omega)$	$I(\omega)$
0	−4	+∞
1/2	−3.2	2.4
1	−2	0
2	−0.8	−0.6
∞	0	0

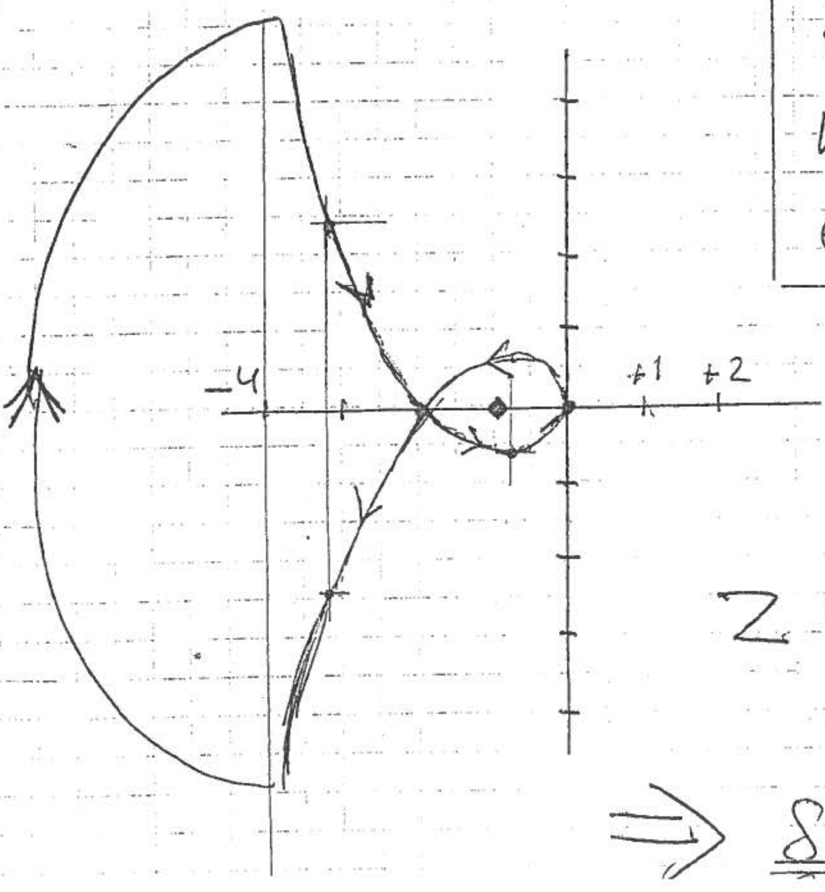
$s = \rho \cdot e^{j\varphi}$ då $\rho \to \infty \Rightarrow$ $\Rightarrow L(s) \to \frac{2}{\rho} \cdot e^{-j\varphi} \to 0$

$s = -j\omega \Rightarrow$ spegling!

$s = \varepsilon \cdot e^{j\theta}$ där $\varepsilon \to 0 \Rightarrow$

$L(s) \to -\frac{2}{\varepsilon e^{j\theta}} = -\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \cdot e^{-j\theta}$

$\theta = 0 \Rightarrow L = -\infty$



Ett varv moturs runt pkten $-1+j0$

$\Rightarrow N = -1$

$Z = N + P =$

$= -1 + 1 = 0$

$\Rightarrow$ Stabilt återkopplat

9. a) $X(s) = \frac{1}{1+\tau s}\cdot U(s) \Rightarrow$

$$\tau \dot{x}(t) + x(t) = u(t)$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{\tau}\cdot x(t) + \frac{1}{\tau}\cdot u(t)$$

$\Rightarrow A = -1/\tau$ och $B = 1/\tau$

$J = \int_0^\infty [\delta x^2 + u^2]\,dt \Rightarrow Q = \delta$ och $R = 1$.

Riccatiekvationen: $\delta + (-\frac{1}{\tau})p + (-\frac{1}{\tau})p =$

$$= \delta - \frac{2}{\tau}p = \frac{1}{\tau^2}p^2 \Rightarrow p^2 + 2\tau p - \delta\tau^2 = 0$$

$$p = -\tau \pm \sqrt{\tau^2 + \delta\tau^2}$$

p är den positiva roten, dvs

$$p = \tau\left[\sqrt{1+\delta} - 1\right]$$

$$\underline{\underline{L}} = R^{-1}B^T P = 1\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\tau[\ldots] =$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{1+\delta} - 1}}$$

b) $\dot{x} = -\frac{1}{\tau}x + \frac{1}{\tau}(-Lx + Kr) =$

$$= -\frac{1}{\tau}x - \frac{\sqrt{1+\delta}}{\tau}x + \frac{1}{\tau}x + \frac{K}{\tau}r \Rightarrow$$

$$\tau\dot{x} + \sqrt{1+\delta}\,x = Kr \Rightarrow X(s) = \frac{K}{\tau s + \sqrt{1+\delta}}\cdot R(s)$$

Låt $r(t)$ vara ett steg $r(t) = r_0\cdot\sigma(t)$

$$X(s) = \frac{K r_0}{s(\tau s + \sqrt{1+\delta})} \Rightarrow x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) =$$

$$= \frac{K r_0}{\sqrt{1+\delta}} = r_0 \text{ (krav!)} \Rightarrow \underline{\underline{K = \sqrt{1+\delta}}}$$