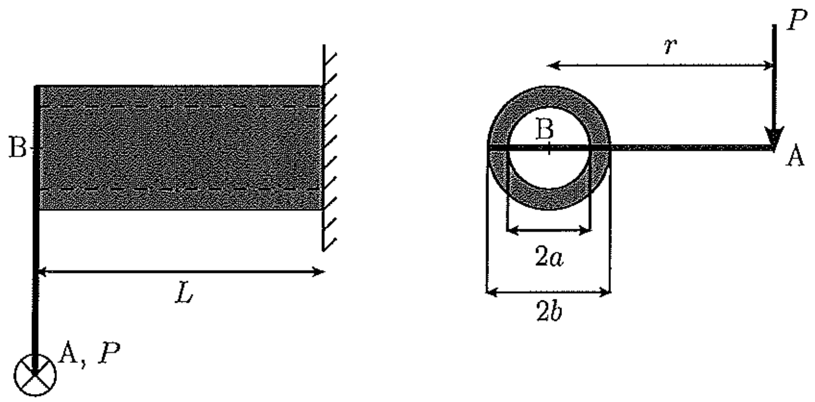
2012-05-23, Tentamen i

Hållfasthetslära och maskinelement för I3, TME060

- **Tid:** 8.30-12.30 **Lokal:** "Maskin"-salar
- **Ansvarig lärare:** Göran Brännare, tel 7721364
- **Hjälpmedel**
  - "Grundläggande hållfasthetslära", Hans Lundh, KTH, Stockholm.
  - Publicerade matematiska, fysikaliska och tekniska formelsamlingar.
  - "Handbok och formelsamling i hållfasthetslära", Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga
  - "Formelsamling i hållfasthetslära", Tillämpad mekanik, Ekh och Hansbo
  - Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.
  - Ordböcker.
  - "Lärobok i Maskinelement" eller "Kompendium i Maskinelement", Mägi, M., Melkersson, K.
  - Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i "Grundläggande hållfasthetslära" och i "Lärobok i Maskinelement" eller "Kompendium i Maskinelement", dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar.
- **Lösningar**: Anslås 2011-05-24 på kurshemsidan.
- **Resultat**: Anslås senast 2011-06-11 på kurshemsidan
- **Granskning**: Vid PPU-labbet efter överenskommelse.
- **Poängbedömning**: Maxpoäng är 25. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läslig och uppställda ekvationer klart motiverade. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.
- **Betygsgränser**: 0-9.5p=underkänt, 10-14.5p= betyg 3, 15-19.5p= betyg 4, 20p- =betyg 5.

Uppgift 1

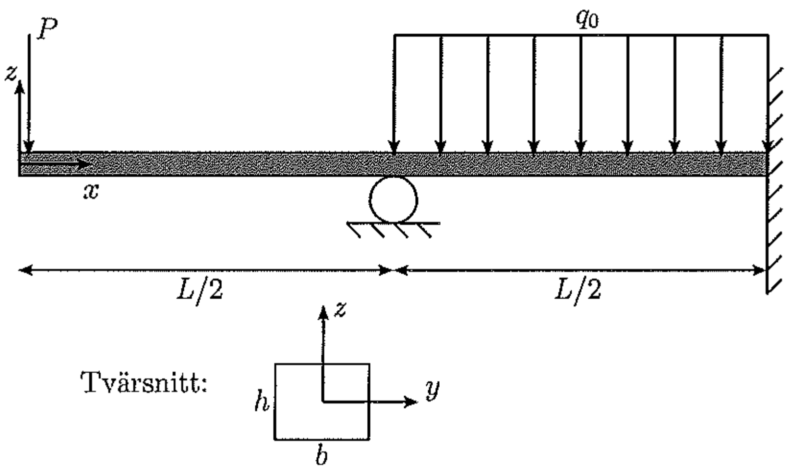


Ett tjockväggigt rör med längd L, innerradie a och ytterradie b är fast inspänt i en vägg. En *stel* stång är fastsvetsad i andra änden enligt figur. En kraft P appliceras i stångens yttre ände A (vilken befinner sig på längden r från rörets mittlinje). Röret har elasticitetsmodul E och skjuvmodul G. Vänstra figuren visar röret sett uppifrån, högra figuren röret sett rakt framifrån, in mot väggen.

Bestäm
(a) stången vridningsvinkel, **(2p)**
(b) nedböjningen av röret (i punkt B), **(2p)**
(c) den vertikala förflyttningen av punkten A. **(1p)**

Ledning: Betrakta röret som en balk och som en axel i två separata analyser och använd superpositionsprincipen. Kraften P kan ersättas med en lämpligt placerad kraft med samma magnitud samt ett moment.

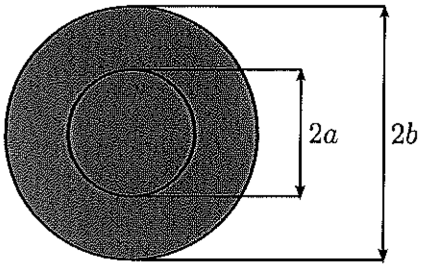
Uppgift 2



En balk med längd L, elasticitetsmodul E och rektagulärt tvärsnitt är fast inspänd i en vägg och vilar på ett rullstöd enligt figur. Balken belastas av en utbredd last $q_0 = 8P/L$ och en punktkraft P enligt figur (kraften P verkar i själva verket längst ut på balken).

(a) Bestäm reaktionskraften från rullstödet på balken. **(2p)**
(b) Ta fram uttryck för $T(x)$ och $M(x)$ för $0 < x < L$. **(3p)**

Uppgift 3



Ett elastisk plugg med cirkulärt tvärsnitt med radie a förs in i ett elastiskt tjockväggigt rör med innerradie a och ytterradie b. Pluggen har temperaturutvidgningskoefficient α och båda kroppar har elasticitetsmodul E och tvärkontraktionstal ν. Plant spänningstillstånd antas råda. Pluggen värms upp så att temperaturförändringen blir ΔT. *Röret antas inte ändra temperatur.*

Bestäm
(a) den radiella kontaktspänningen mellan rör och plugg, **(2p)**
(b) radieförändringen hos pluggen **(3p)**
till följd av uppvärmningen.

Ledning: Då den värms upp får pluggen tillskottet

$$-\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}$$

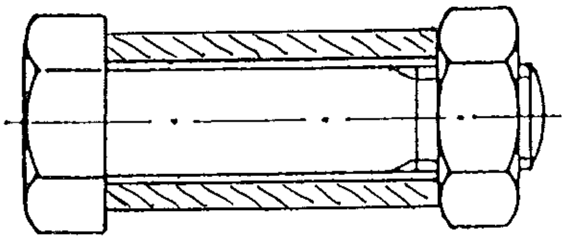
till den radiella spänningen.

Uppgift 4 (5 poäng)

En M20 skruv och mutter dras åt så de klämmer ett rör med längden 75 mm enl figur. Rörets inre och yttre diameter är enligt standard och med sedvanliga beteckningar d_h resp d_w.

Man har beräknat att om man drar åt med åtdragningsvinkeln 30 grader så får man en lämplig förspänningskraft. Förvridning av skruvskaft och rör försummas.

Beräkna effektivspänningen i skruvskaftet på grund av förspänningskraften och vridmomentet. Friktionstalet (lika stora på båda ställena) mellan glidytorna antas vara 0,13. Både skruv och rör är av stål med elasticitetsmodulen $2,1 \cdot 10^{11}$ Pa (standard för stål). Ledning: d_w för M20 är 27,7 mm.

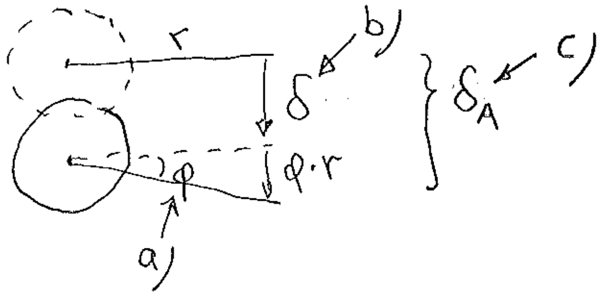


Uppgift 5 (5 poäng)

En cylindrisk skruvfjäder för en tryckbegränsningsventil skall dimensioneras. Vid montering av fjädern skall den förspännas med en tryckkraft på 200 N. Fjädern behåller sedan denna kraft så länge ventilen är stängd. När sedan ventilen öppnar trycks fjädern ihop ytterligare. Eftersom trycket över ventilen är proportionellt mot fjäderkraften vill man att fjäderkraften skall öka så lite som möjligt. Man kan därvid tillåta en fjäderkraftsökning på 30% vid maximal öppen ventil som motsvarar en hoptryckning på 2 mm. För övrigt gäller följande:

- Den totala skjuvspänningen (τ_{tot})i fjädermaterialet får inte överstiga 700 MPa.
- Fjädern skall vara så kort som möjligt i monterat tillstånd och tillåts inte bottna utan det krävs 25% luft mellan fjädervarven då ventilen är maximalt öppen.
- Fjäderns ytterdiameter får inte överstiga 10 mm.
- Fjädern är styrd i sidled dvs ingen risk för knäckning föreligger.
- Fjädertråden skall av tillverkningsskäl väljas till en multipel av 0,5 mm.
- Fjädermaterialets skjuvmodul är 80 [GPa)

Gör dimensioneringen genom att bestämma lämplig fjäderdiameter, tråddiameter och antal verksamma varv. Beräkna även minsta erforderliga fjäderlängd i monterat tillstånd.



a) GL sid 57 ger

$$\varphi = \frac{ML}{GK} \text{ och } K = \frac{\pi}{2}(b^4 - a^4) \text{ där } M = P \cdot r$$

$$\varphi = \frac{2PrL}{G\pi(b^4 - a^4)}$$

b) Fs elementarfall 6.2 med $x = a = L$

$$\delta = \frac{L^2(3L - L)}{6EI} \cdot P = \frac{PL^3}{3EI}$$

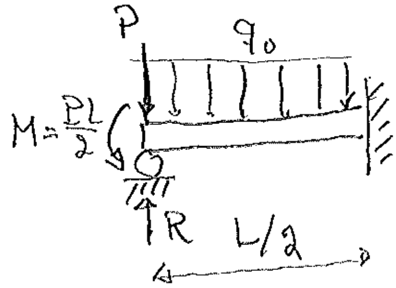
GL sid 83 ger $I = \dfrac{\pi(b^4 - a^4)}{4}$ insatt ger:

$$\delta = \frac{4PL^3}{3E\pi(b^4 - a^4)}$$

c) $$\delta_A = \delta + \varphi \cdot r = \frac{4PL^3}{3E\pi(b^4 - a^4)} + \frac{2Pr^2L}{G\pi(b^4 - a^4)}$$

$$\delta_A = \frac{2PL}{\pi(b^4 - a^4)}\left(\frac{2L^2}{3E} + \frac{r^2}{G}\right)$$

a) Parallellförflytta kraften P och använd elementarfall 6.5



$$R = M_1 \frac{-3}{2L} + P_2 \frac{b^2}{2L^2}\left[3 - \frac{b}{L}\right] + W_1 \frac{3L}{8}$$

$$M_1 = -\frac{PL}{2},\ P_2 = P,\ b = \frac{L}{2},\ W_1 = q_0 = \frac{8P}{L}$$

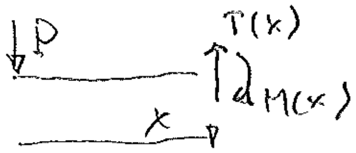
och $L \to \frac{L}{2}$

$$R = -\frac{PL}{2}\left(\frac{-3}{2\cdot\frac{L}{2}}\right) + P\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2\left(\frac{L}{2}\right)^2}\left[3 - \frac{L/2}{L/2}\right] + \frac{8P}{L}\cdot\frac{3\frac{L}{2}}{8}$$

$$R = \frac{3P}{2} + P + \frac{3P}{2} = \frac{P(3+2+3)}{2} = 4P$$

b) Snitta på var sida om stödet på mitten

$0 < x < \frac{L}{2}$

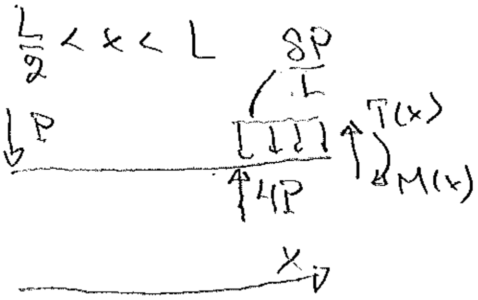


jämvikt:

$\uparrow\ T(x) - P = 0 \quad ; \quad T(x) = P$

$\overset{\curvearrowright}{x}\ M(x) - P\cdot x = 0 \quad ; \quad M(x) = P\cdot x$

$\frac{L}{2} < x < L$



jämvikt:

$$\uparrow\ -P + 4P - \frac{8P}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right) + T(x) = 0$$

$$T(x) = \frac{8P}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right) - 3P$$

$$T(x) = P\left(8\frac{x}{L} - 7\right)$$

$$\overset{\curvearrowright}{x}\ M(x) - \frac{8P}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right)\frac{\left(x - \frac{L}{2}\right)}{2} + 4P\left(x - \frac{L}{2}\right) - Px = 0$$

$$M(x) = \frac{4P}{L}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 - 4Px + 2PL + Px$$

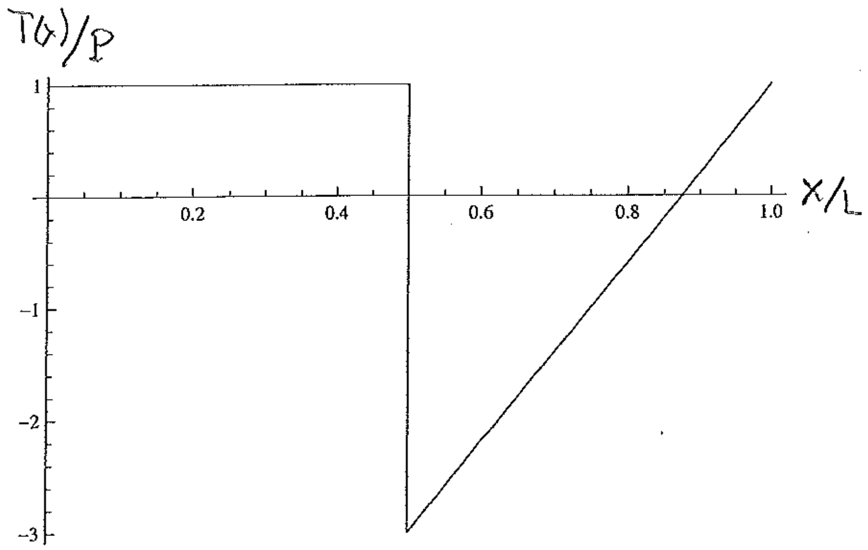
$$M(x) = \frac{4P}{L}x^2 + \frac{4P}{L}\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{4P}{L}2x\frac{L}{2} - 4Px + 2PL + Px$$

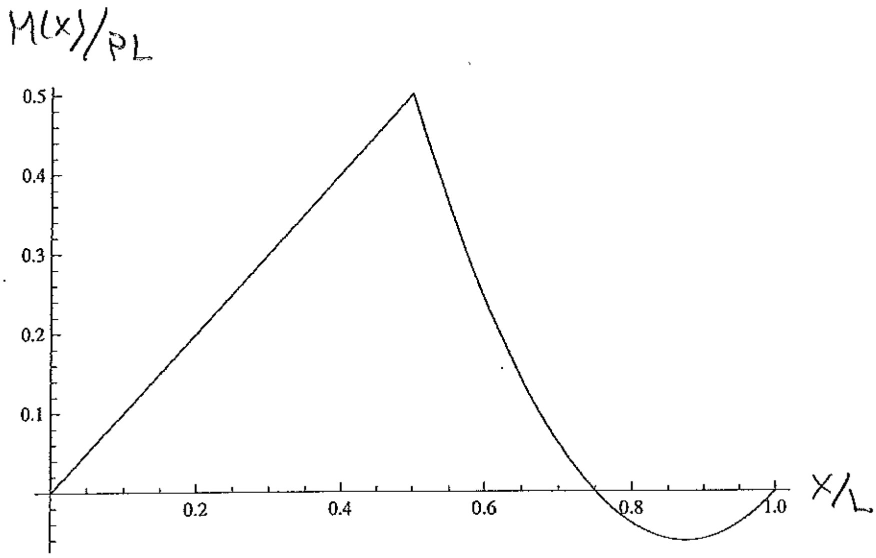
$$M(x) = \frac{4P}{L}x^2 + 3PL - 7Px = P\left(\frac{4x^2}{L} - 7x + 3L\right)$$

Svar: a) Reaktionskraften från rullstödet är $4P$

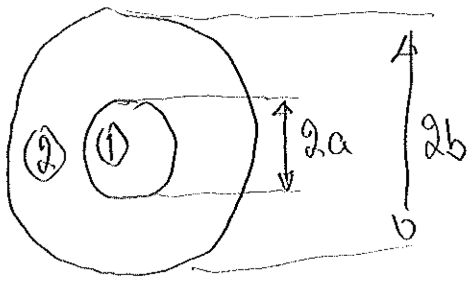
b) $0 < x < \frac{L}{2} \Rightarrow T(x) = P$ och $M(x) = P \cdot x$

$$\frac{L}{2} < x < L \Rightarrow \begin{cases} T(x) = P\left(8\frac{x}{L} - 7\right) \\ M(x) = P\left(\frac{4x^2}{L} - 7x + 3L\right) \end{cases}$$





Lösning:



Randvillkor (RV) och kompabilitetsvillkor (KV)

$\sigma_{r1}(0) =$ ändlig (RV 1)

$\sigma_{r1}(a) = \sigma_{r2}(a)$ (KV 1)

$u_{r1}(a) = u_{r2}(a)$ (KV 2)

$\sigma_{r2}(b) = 0$ (RV 2)

GL sid 203 ekv (11-18) + ledning

$$\sigma_{r1}(r) = A_1 - \frac{B_1}{r^2} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} = A_1 - \frac{B_1}{r^2} + \sigma_{\Delta T} \quad (1)$$

$$\sigma_{r2}(r) = A_2 - \frac{B_2}{r^2} \quad (2)$$

(RV 1) $\Rightarrow$ $B_1 = 0$

(RV 2) $\Rightarrow$ $A_2 - \frac{B_2}{b^2} = 0$; $B_2 = b^2 A_2$ } insatt i (1) (2)

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{r1} = A_1 + \sigma_{\Delta T} \\ \sigma_{r2} = A_2\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) \end{cases}$$ som med (KV 1) ger:

$$A_1 + \sigma_{\Delta T} = A_2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right); \quad A_1 = A_2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) - \sigma_{\Delta T} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{r1}(r) = A_2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) & (4) \\ \sigma_{r2}(r) = A_2\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) & (5) \end{cases}$$

GL sid 215 ekv (11-25) med (KV 2) och att $B_1 = 0$

$$\cancel{\frac{1}{E}} A_1 (1-\nu) a = \cancel{\frac{1}{E}}\left(A_2(1-\nu)a + (1+\nu)\frac{B_2}{r}\right) \quad (3) \text{ insatt}$$

$$\left[A_2 \frac{1}{a^2}(a^2 - b^2) - \sigma_{\Delta T}\right](1-\nu)a = A_2(1-\nu)a + (1+\nu)\frac{b^2}{a}A_2$$

$$A_2\left[\frac{1}{a^2}(a^2-b^2)(1-\nu)a - (1-\nu)a - (1+\nu)\frac{b^2}{a}\right] = (1-\nu)a\,\sigma_{\Delta T}$$

$$A_2\left[\left(1-\frac{b^2}{a^2}-1\right)(1-\nu)a-(1+\nu)\frac{b^2}{a}\right]=(1-\nu)a\sigma_{\Delta T}$$

$$A_2\left[-\frac{b^2}{a^2}+\cancel{\frac{b^2}{a^2}\nu}-\frac{b^2}{a^2}-\cancel{\frac{b^2}{a^2}\nu}\right]=(1-\nu)\sigma_{\Delta T}$$

$$A_2=-\frac{a^2}{2b^2}(1-\nu)\sigma_{\Delta T}$$ insatt i (4) och (5) med

$$\sigma_{\Delta T}=-\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}$$ ger:

$$\sigma_{r1}(r)=-\frac{a^2}{2b^2}(1-\nu)\left(-\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}\right)\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{E\alpha\Delta T}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)$$

$$\sigma_{r2}(r)=-\frac{a^2}{2b^2}(1-\nu)\left(-\frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu}\right)\left(1-\frac{b^2}{r^2}\right)=\frac{E\alpha\Delta T}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a^2}{r^2}\right)$$

a) $$p_{kontakt}=\sigma_{r1}(a)=\sigma_{r2}(a)=\frac{E\alpha\Delta T}{2}\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)$$

b) GL sid 215 ekv (11-25)

$$u_{r1}(a)=u_{r2}(a)=\frac{1}{E}\left(A_2(1-\nu)a+(1+\nu)\frac{B_2}{a}\right)=$$

$B_2 = b^2A_2$

$$=\frac{A_2}{E}\left((1-\nu)a+(1+\nu)\frac{b^2}{a}\right)=$$

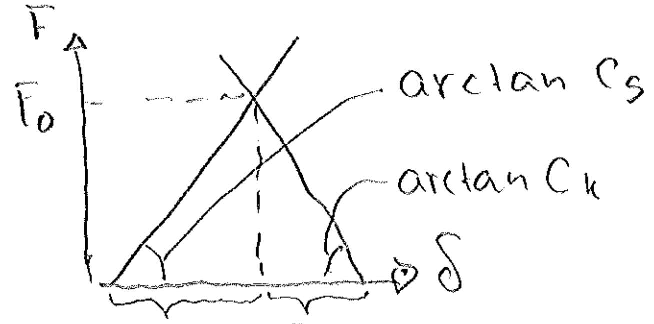
$$=\cancel{-}\frac{a^2}{2b^2}\cancel{(1-\nu)}\left(\cancel{-}\frac{\cancel{E}\alpha\Delta T}{\cancel{1-\nu}}\right)\frac{1}{\cancel{E}}\left((1-\nu)a+(1+\nu)\frac{b^2}{a}\right)=$$

$$=\frac{a^2}{2b^2}\alpha\Delta T\left((1-\nu)a+(1+\nu)\frac{b^2}{a}\right)=$$

$$=\frac{a\alpha\Delta T}{2b^2}\left((1-\nu)a^2+(1+\nu)b^2\right)$$

Lösning: Hänvisningar till lärobok i maskinelement

Åtdragningsvinkel $\gamma = \frac{\delta_{tot}}{P} 360$; $\delta_{tot} = \frac{\gamma}{360} \cdot P$ (1)



$$\frac{F_0}{C_s} + \frac{F_0}{C_k} = \delta_{tot} \quad (2)$$

(1) och (2) ger:

$$F_0 = \frac{\frac{\gamma}{360} \cdot P}{\frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_k}} \quad (3)$$

Skruvdata enl Lb sid 62 för C_s räkna ogängat

$$C_s = \frac{A_s E}{L} = \frac{\pi d^2 E}{4L} = \frac{\pi \cdot 20^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^5}{4 \cdot 75} = 879646 \left[\frac{N}{mm}\right]$$

$$C_k = \frac{A_k E}{L} = \frac{\pi (d_w^2 - d_h^2) E}{4L} = \frac{\pi (27{,}7^2 - 22^2) \cdot 2{,}1 \cdot 10^5}{4 \cdot 75} = 622987 \left[\frac{N}{mm}\right]$$

(3) ger: $F_0 = \frac{\frac{30}{360} \cdot 2{,}5}{\frac{1}{879646} + \frac{1}{622987}} = 75979$ [N]

Lb sid 82 ger:

$$A_{sp} = \frac{\pi (d_1 + d_2)^2}{16} = \frac{\pi (17{,}294 + 18{,}376)^2}{16} = 249{,}83 \, [mm^2]$$

$$\sigma = \frac{F_0}{A_{sp}} = \frac{75979}{249{,}83} = 304{,}13 \, [MPa]$$

Lb sid 71 ger Bultens formel med de två första termerna

$M_{gänga} = F_{ax} [0{,}16 P + 0{,}58 \mu d_2]$ där $F_{ax} = F_0$

$$M_{gänga} = 75979(0{,}16 \cdot 2{,}5 + 0{,}58 \cdot 0{,}13 \cdot 18{,}376)$$

$$M_{gänga} = 135{,}66 \cdot 10^3 \,[Nmm]$$

16 sid 170 ger:

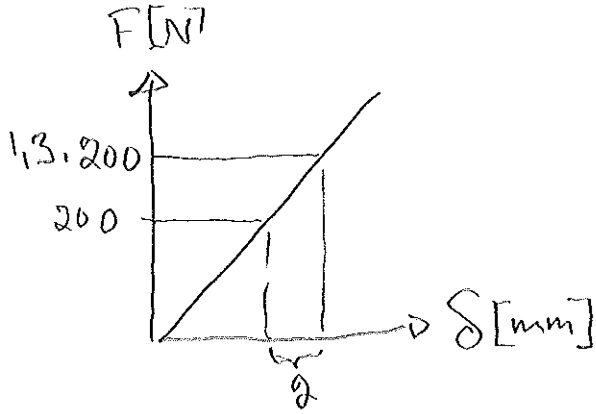
$$W_v = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi\left(\frac{d_1 + d_2}{2}\right)^3}{16} = \frac{\pi\left(\frac{17{,}294 + 18{,}376}{2}\right)^3}{16} = 1113{,}9 \,[mm^3]$$

$$\tau = \frac{M_{gänga}}{W_v} = \frac{135{,}66 \cdot 10^3}{1113{,}9} = 121{,}79 \,[MPa]$$

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{304{,}13^2 + 3 \cdot 121{,}79^2} = 370{,}12 \,[MPa]$$

Svar: Effektivspänningen i skruvskaftet är 370 [MPa]

Lösning: Hänvisningar till lärobok i maskinelement



Fjäderkonstanten C

$$C = \frac{\Delta F}{\Delta \delta} = \frac{1{,}3 \cdot 200 - 200}{2}$$

$$C = 30 \left[\frac{N}{mm}\right]$$

För att få en uppfattning om fjäderns tråddiameter sätt $\tau_v = 700$ [MPa] och $D = 10$ [mm]

Lb sid 136 ekv 3,16 och 3,18

$$\tau_v = \frac{8FD}{\pi d^3} \quad \text{omskrives} \quad d = \sqrt[3]{\frac{8FD}{\pi \tau_v}}$$

$$d \approx \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 1{,}3 \cdot 200 \cdot 10}{\pi \cdot 700}} = 2{,}11 \text{ [mm]} \quad \text{Välj } d = 2{,}5 \text{ [mm]}$$

och $D = 10 - d = 7{,}5$ [mm] kontrollera τ_{tot}

$$\tau_{tot} = \frac{8FD}{\pi d^3}\left[1 + \frac{2d}{3D}\right] = \frac{8 \cdot 1{,}3 \cdot 200 \cdot 7{,}5}{\pi \cdot 2{,}5^3}\left[1 + \frac{2 \cdot 2{,}5}{3 \cdot 7{,}5}\right]$$

$$\tau_{tot} = 388 \text{ [MPa]} < 700 \text{ [MPa]}$$

Antal varv från fjäderkonstanten se Lb sid 135 ekv 3,14

$$C = \frac{Gd^4}{8nD^3} \quad \text{omskrives} \quad n = \frac{Gd^4}{8CD^3} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 2{,}5^4}{8 \cdot 30 \cdot 7{,}5^3} = 30{,}9$$

Om fjädern skall ha 25 % luft mellan fjädervarven när den är mest hoptryckt blir fjäderns längd i monterat tillstånd

$l_{mont} = 1{,}25(n+1)d + \Delta\delta = 1{,}25(30{,}9+1)2{,}5 + 2 = 101{,}7\,[mm]$

Eftersom τ_{tot} är nästan bara hälften av vad den får vara så blir fjädern onödigt stor. Minska tråddiametern $d = 2\,[mm]$ och minska fjäderdiametern D från 8 mm i steg om $0{,}5\,[mm]$ tills $\tau_{tot} \leq 700\,[MPa]$

vald d [mm]	vald D [mm]	tau tot [MPa]	n	l mont [mm]
2,5	7,50	388	30,86	101,58
2	8,00	772	10,42	30,54
2	7,50	731	12,64	36,10
2	7,00	690	15,55	43,37
2	6,50	648	19,42	53,05
2	6,00	607	24,69	66,23
2	5,50	566	32,06	84,64

Svar:

$D = 7\,[mm]$

$d = 2\,[mm]$

$n = 15{,}5$

$l_{mont} = 43{,}4\,[mm]$