Tentamen i TMA321 Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola.

Tid: Fredagen den 17 Januari 2014, 14.00-18.00.

Examinator: Olle Nerman, MV, Chalmers.

Jour: Alexey Lindo, telefon: 772 8294.

Hjälpmedel: Valfri räknare, egenhändigt handskriven formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Tentamen består av 8 frågor med sammanlagt 32 poäng.

Betygsgränser: För betyget ”3” fordras minst 15 poäng, för betyget ”4” minst 20 poäng och för betyget ”5” minst 25 poäng .

---

1. Antag att är Bernouilli-fördelad med parameter **p=0.7** .
XX

a. Bestäm momentgenererande funktionen för **X** . . (1p)

b. Bestäm momentgenererande funktionen för **Y=3-4X** . (1p)

c. Bestäm väntevärdet och variansen för **Y** definierad som i b-delen? (2p)

2. Antag att **X** är Normalfördelad med Väntevärdet **4** och Variansen **9.** Vad är
a. Sannolikheten att **X** antar ett positivt värde, **P(X>0)**? (1p)
b. Sannolikheten **P(X-4>3)**?
(1p
c. Sannolikheten **P(X>5)**?
(2p)

3. I en Poissonprocess **{N(t), t≥0}** med intensiteten **c** händelsetidpunkter/minut (=pulser/minut) så observerar du att det under **20** minuter inträffar **N(20)=154** händelsetidpunkter (=pulser).

a. Beräkna en observerad Maximum Likelihood-skattning av **c**. (2p)

b. Använd centrala gränsvärdessatsen på lämpligt sätt för att bilda att approximativt symmetriskt observerat konfidensintervall för **c** med konfidensgrad **95%** . (2p)

4. Låt **Y** vara maximum av **3** oberoende likformigt fördelade (rektangulärt fördelade) stokastiska variabler på intervallet **[0,10]**.

a. Bestäm fördelningsfunktionen och sannolikhetstätheten för **Y**. (2p)

b. Bestäm väntevärdet för **Y**.
(2p)

5. Vid observation av **15** oberoende stokastiska variabler $\mathbf{X_1, X_2, \ldots, X_{15}}$ från en och samma exponentialfördelning, blev aritmetiska medelvärdet **2.7** . Skatta på lämpligt sätt:

a. intensitetsparametern **λ i** exponentialfördelningen . (1p)

b. väntevärdet i exponentialfördelningen. (1p)

c. medianen i exponentialfördelningen. (1p)

d. sannolikheten för ett värde under **2** i exponentialfördelningen, $\mathbf{P(X_i < 2)}$. (1p)

VÄND!

6. I ett normalfördelningsstickprov med **15** observationer har någon beräknat stickprovsmedelvärdet och stickprovsstandardavvikelsen till **10.25** och **0.37**.

   a. Du ombeds att förvandla informationen till ett symmetriskt konfidensintervall för det bakomliggande väntevärdet **μ** för de enskilda observationerna med konfidensgraden **99%**. Vad blir resultatet? (2p)

   b. Du ombeds istället att pröva nollhypotesen $\mathbf{H_0}$: väntevärdet=**10** med signifikansnivån **5%** mot den alternativa hypotesen $\mathbf{H_1}$: väntevärdet **> 10**. Vad blir då din slutsats? (2p)

7. I en enkel linjär regression med svarsvariabler **y** och inställningsvariabler **x** blev summan av de **n=10** beroende **y**-variablerna **10,3** och medelvärdet av **x**-variablerna blev **0.42**. Skattningen av riktningskoeffecieten för regressionslinjen **β** blev **0.32**.

   a. Beräkna en punktskattning av väntevärdet (av **Y**-variabeln) vid **x**-inställningen **2**. (2p)

   b. Antag att stadardavvikelserna **σ** i den linjära regressionsmodellen för **Y-**variablerna i regressionsmodellen är kända och lika med **2,** att residualerna (=felen) är oberoende och normalfördelade, och att den (på vanligt enstickprovs-vis) beräknade ”stickprovsvariansen” för de deterministiska **x-**variablerna är **6.3.** Vilken fördelning har då den teoretiska punktskattningen av **β?** (1p)

   c. Använd resultatet i b för att beräkna ett observerat konfidensintervall för riktningskoefficienten **β** med konfidensgraden **95%.** (1p)

8. Tre händelser **A, B och C** har sannolikheter som alla är större än **0.7 .**

a. Visa att detta gör att sannolikheten för att alla händelserna inträffar samtidigt,
$\cap\cap\cap\cap$

P(ABC), inte kan vara **= 0 .** (2p)

b. Den betingade sannolikheten **P(A|B)** måste vara minst **4/7**. (2p)

TENTAMEN I TMA 321, MS, F/KF 2014-01-17, CTH/GU
LÖSNINGSFÖRSLAG, OLLE NERMAN

---

1. a. $M_X(t) = E[e^{tX}] = (1-p)+pe^t = 0,3+0,7e^t$

b. $M_Y(t) = E[e^{(3-4X)t}] = e^3\, E[e^{(-4t)X}] = e^3 M_X(-4t) = e^3(0,3+0,7e^{-4t})$

c. $E[Y] = M_Y'(0) = (3-4E[X]) = 3-4\cdot 0,7 = 0,2$

$VAR[Y] = M_Y''(0)-(M'(0))^2 = VAR[3-4X] = (-4)^2\, VAR[X] = 16\cdot 0,7\cdot 0,3 =$

$= 3,36$

---

2. a. $P(X>0) = 1-\Phi\left(\frac{0-4}{\sqrt{9}}\right) = 1-\Phi\left(\frac{4}{3}\right) \approx 1-0,9082 \approx 0,0918$

b. $P(|X-4|>3) = \Phi\left(\frac{1-4}{\sqrt{9}}\right) + \left(1-\Phi\left(\frac{7-4}{\sqrt{9}}\right)\right) = 2\cdot(1-\Phi(1)) =$

$= 2\cdot(1-0,8413) = 2\cdot 0,1587 \approx 0,3174$

c. $P(|X|>5) = P(X\le -5)+P(X>5) = \Phi\left(\frac{-5-4}{3}\right)+\left(1-\Phi\left(\frac{5-4}{3}\right)\right) =$

$= 2-\Phi(3)-\Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2-0,9987-0,6293 =$

$= 0,372$

---

3. $N(20) \sim$ POISSONFÖRDELAD $(20\cdot c)$

$L(c) = \frac{(20c)^k e^{-20c}}{k!}$ om $N(20)=k$

$\frac{d\ln L_c}{dc} = 0 \Rightarrow c = \frac{k}{20}$ ∴ $\hat{c} = \frac{N(20)}{20} = \frac{154}{20} = 7,7$

$N(20) \approx$ NORMALFÖRDELAD $(20c, 20c)$. ANVÄND

$\frac{N(20)-20c}{\sqrt{20c}} \approx \frac{N(20)-20c}{\sqrt{N(20)}} \approx N(0,1) \Longrightarrow$

$c = \hat{c} \pm \frac{1,96\cdot\sqrt{\hat{c}}}{\sqrt{20}} = 7,7 \pm \frac{1,96\cdot\sqrt{7,7}}{\sqrt{20}}$ $(\approx 95\,\%)$

---

4. a. $F_Y(y) = P(Y\le y) = \begin{cases} 0 & \text{om } y<0 \\ \left(\frac{y}{10}\right)^3 & \text{om } y\in[0,10] \\ 1 & \text{om } y>10 \end{cases}$

$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{3y^2}{10^3}$ om $y\in[0,10]$ (0 f.ö.)

b. $E[Y] = \int_0^{10} y\cdot\frac{3y^2}{10^3}\,dy = \left[\frac{3\,y^4}{4\cdot 10^3}\right]_0^{10} = \frac{30}{4} = 7,5$

TENTAMEN I TMA 321, M.S. F/KF 2014-01-17
LÖSNINGSFÖRSLAG (FORTS.) OLLE NERMAN

5.a. ML-SKATTNING (=MOMENTSKATTNING) AV $\lambda = \frac{1}{\bar{x}}$, DÄR
$\bar{x} = \frac{1}{15}\left(\sum_{i=1}^{15} x_i\right)$ $\therefore$ $\hat{\lambda} = \frac{1}{2{,}7}$

b. $E[X_i] = \frac{1}{\lambda}$ $\therefore$ $\widehat{E[X_i]} = 2{,}7$

c. $\mathrm{MED}(X_i) = m \Rightarrow 1 - e^{-\lambda m} = 0{,}5 \Rightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda}$
$\hat{m} = \ln 2 / \hat{\lambda} = \ln(2) \cdot 2{,}7$

d. $P(X_i < 2) = P(X_i \leq 2) = 1 - e^{-\lambda \cdot 2}$ $\widehat{P(X_i<2)} = 1 - e^{-\hat{\lambda} \cdot 2} = 1 - e^{-\frac{2}{2{,}7}}$

6 a. t-INTERVALL BASERAT PÅ 14 FRIHETSGRADER
$F_{t(14)}(2{,}977) = 0{,}995$ GER KONF.INTERVALL
$\mu = \hat{\mu} \pm \frac{2{,}977\, s}{\sqrt{15}} = 10{,}25 \pm \frac{2{,}977 \cdot 0{,}37}{\sqrt{15}}$ (99%)

b. t-TEST, ENSIDIGT, OBSERVERAD STATISTIKA
$t = \sqrt{15}\,\frac{10{,}25 - 10}{0{,}37} \geq 1{,}761$ $\left(F_{t(14)}(1{,}761) = 0{,}95\right)$
$\Rightarrow$ H_0 FÖRKASTAS PÅ SIGNIFIKANSNIVÅN 5%

7. a. PUNKTSKATTNING AV $\alpha + \beta \cdot 2$. $\hat{\alpha} + \hat{\beta}\, 2$
$\hat{\beta} = 0{,}32$ $\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = \frac{10{,}3}{10} - 0{,}32 \cdot 0{,}42$

b. $\hat{\beta} \sim \text{NORMALF.}\left(\beta, \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right) = N\left(\beta, 4 \cdot \frac{1}{14 \cdot 6{,}3}\right)$

c. $\beta = \hat{\beta} \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{1}{14 \cdot 6{,}3}}$ (95%)
(NORMALFÖRDELNINGSBASERAT!)

8. a. $P(A \cap B \cap C) = 1 - P(CA \cup CB \cup CC) \geq$
$\geq 1 - (P(CA) + P(CB) + P(CC)) \geq 1 - 0{,}3 - 0{,}3 - 0{,}3 = 0{,}1$

b. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{0{,}7}$ MEN $P(A \cup B) \leq 1$
$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1{,}4 - P(A \cap B) \leq 1$
$\therefore P(A \cap B) \geq 0{,}4$ VILKET GER OLIKHETEN.