Tentamen i TMA321 Matematisk Statistik, Chalmers Tekniska Högskola.

Hjälpmedel: Valfri räknare, egenhändigt handskriven formelsamling (4 A4-sidor på 2 blad) och till skrivningen medhörande tabeller.

Fredagen den 24 Augusti 2012, Eftermiddag 14.00-18.00.

Examinator och Jour: Olle Nerman, tel. 7723565, rum 3056, MV, Chalmers.

Tentamen består av 8 frågor med sammanlagt 32 poäng+ eventuella bonuspoäng från dina två inlämningsuppgifter.

Betygsgränser: För betyget ”3” fordras minst 15 poäng, för betyget ”4” minst 20 poäng och för betyget ”5” minst 25 poäng .

---

1. Du kastar två vanliga sex-sidiga tärningar en gång.
   a. Vad är sannolikheten att poängtalen på de båda tärningarna är lika? (1p)
   b. Vad är den betingade sannolikheten att de båda poängtalen är lika givet att summan av poängtalen är **10**? (1p)
   c. Låt **Y** vara definierad som absolutbeloppet av skillnaden av de två poängtalen. Vad är då utfallsrummet för **Y**? (1p)
   d. Bestäm väntevärdet för **Y** definierad i c-uppgiften. (1p)
2. Antag att är Bernouilli-fördelad med parameter **p=0.3** .
   a. Bestäm momentgenererande funktionen för . (2p)
   b. Om , , …, är oberoende stokastiska variabler med samma fördelning som , vilken momentgenererande funktion får då = + +…+ ? (2p)
   c. Beräkna variansen för definierad som i b-delen med hjälp av momentgenererande funktionen för . (2p)

3. Äpplen som slumpmässigt väljs från ett stort importerat parti väger i genomsnitt (väntevärdet) **150** gram, och vikten varierar enligt en fördelning med en standardavvikelse som är **30** gram.
a. Du antar (approximerar med) att successivt valda äpplen har en vikt som är oberoende av varandra och följer en fördelning med dessa parametrar. Du väljer nu **33** äpplen. Vad är (approximativt) sannolikheten att dessa tillsammans väger minst **5** Kg? (2p)
b. Hur många äpplen behöver du minst ta för att sannolikheten för att de tillsammans skall väga minst **5** Kg, skall vara större än **0.95?** (approximera på lämpligt sätt) (2p)

4. I ett normalfördelningsstickprov med **10** observationer har någon beräknat stickprovsmedelvärdet och stickprovsstandardavvikelsen till **16.35** och **0.47**.
   a. Du ombeds att förvandla informationen till ett konfidensintervall för det bakomliggande väntevärdet **μ** för de enskilda observationerna med konfidensgraden **99%**. (2p)

b. Du ombeds testa hypotesen **H_0:** väntevärdet**=15** med signifikansnivån **5%** mot Hypotesen **H_1**: väntevärdet **> 15.** Vad blir din slutsats? (2p)

5. Du observerar en Poissonprocess under **10** timmar till **x(10)=58** händelsetidpunkter i processen under observationstiden.

   a. Bestäm en observerad Maxumum Likelihood - punktskattning av intensiteten **c** (uttryckt i pulser per timme) i Poissonprocessen baserad på **x(10)**. (2p)

   b. Vad är teoretiska standardfelet i skattningen ovan? (1p)

   c. Vad blir en lämplig observerad punktskattning av det teoretiska standardfelet i b-uppgiften ut? (1p)

6. Redogör för hypotesprövningsbegreppen:
   a. **Nollhypotes**. (1p)
   b. **Mothypotes**. (1p)
   c. **p-värde**. (1p)
7. Låt **Y** vara maximum av **10** oberoende likformigt fördelade stokastiska variabler på intervallet **[0,5]**.
   a. Bestäm fördelningsfunktionen och sannolikhetstätheten för **Y**. (3p)
   b. Bestäm väntevärdet för **Y**. (2p)
8. I en standard linjär regressionsmodell med inställningsvariabler **x** och svarsvariabler **Y** beror variansen av skattade linjens läge i en fix punkt, säg punkten **x_0,** på aritmetiska medelvärdet och "stickprovs"-variansen hos **x**-variablerna.
   a. Hur ser beroendet av dessa ut? (1p)
   b. Om du vill ha hög precision i skattningen av linjens läge i punkten **x_0=10**, hur skall du då välja dina **x**-inställningar i försöket. Diskutera. (2p)
   c. Vad kan det finnas för praktiska risker med att sprida isär x-inställningarna väldigt mycket? (1p)

Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

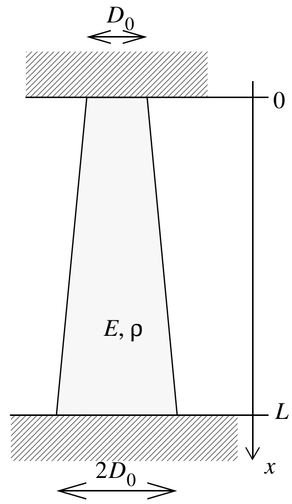
31 AUGUSTI 2012

Tid och plats:	14.00—18.00 i V–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Typgodkänd miniräknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 3/9. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2012) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 10/9 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 14/9.
Granskning:	Tisdag 11/9 12–13 samt torsdag 13/9 12–13 på inst. (2a våningen (plan 3) i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

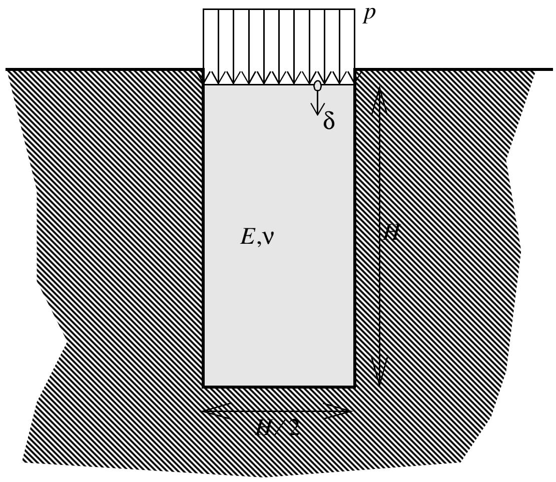
1.

En pelare med ett homogent cirkulärt tvärsnitt har i spänningsfritt tillstånd längden L. Tvärsnittets diameter varierar lineärt från D_0 i ena änden till $2D_0$ i den andra. Materialet är lineärt elastiskt med elasticitets modul E och densitet ρ. Pelaren monteras vertikalt mellan två stela plan på avståndet L från varandra enligt figuren. Beräkna normalkraften $N(x)$ i pelaren. (5p)



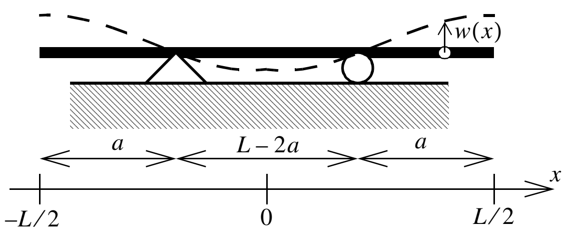
2.

En cylindrisk plugg med höjden H och diametern $H/2$ passar exakt in i ett hål i en styv platta. Cylindern är lineärt elastisk med elasticitetsmodulen E och Poissons tal ν. Beräkna pluggens ihoptryckning δ då den belastas med ett tryck p på den fria ytan. Det omgivande materialets (plattans) deformationer kan försummas, liksom även friktionen mellan de båda kropparna. (5p)

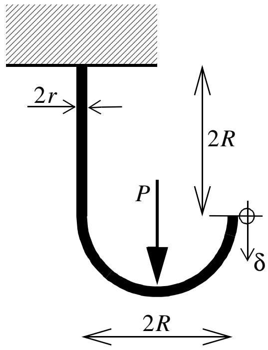


3.

Balken i figuren nedan har böjstyvheten EI och belastas enbart av sin egentyngd $q = \frac{mg}{L}$ (nedåtriktad och konstant utmed balkens längd). Bestäm stödplaceringen, dvs avståndet a, så att balkändarna inte roterar: $\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{\pm L}{2}} = 0$ (5p)



4.



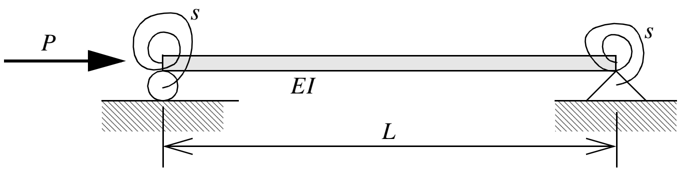
En stång med massivt cirkulärt tvärsnitt, radie r, har använts för att tillverka en krok. Kroken är formad som en halvcirkel med radien R och en rak del med längden $2R$. Bestäm den fria ändens vertikalförskjutning δ, då kroken belastas med en kraft P enligt figuren. Hänsyn behöver bara tas till böjdeformationer. Data: $E = 210\ \text{GPa}$, $P = 250\ \text{N}$, $r = 2{,}5\ \text{mm}$, $R = 10r$ (5p)

5.

En lineärt elastisk balk med böjstyvheten EI och längden L är elastiskt inspänd med styvheten $s = 2EI/L$ i båda ändar, dvs sambandet mellan infästningsmomentet M_{in} och ändens rotation θ är $M_{\text{in}} = s\theta$. Balken belastas med en axiellt tryckande kraft P enligt figuren.

a: Bestäm en övre och undre gräns för elastisk stabilitet (knäcklasten) (1p)

b: Härled knäckekvationen för balken, dvs den ekvation vars lösning ger det kritiska värdet på P (4p)



Lösning 1: Problemet är statiskt obestämt och löses enklast genom att lösa den styrande differentialekvationen (Lundh ekv 3–7 eller formelsamlingen sid 2): $-\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] = K_xA$. Diametern är här $D(x) = D_0\left(1 + \frac{x}{L}\right)$, så tvärsnittsytan blir $A(x) = \frac{\pi D^2(x)}{4} = \frac{\pi D_0^2}{4}\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2$. Vidare är K_xA last per längdenhet, vilket i vårt fall är pelarens egentyngd dvs $K_xA = \rho gA = \frac{\pi D_0^2\rho g}{4}\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2$. Insättning i differentialekvationen och integration ger

$$EA\frac{du}{dx} = C_1 - \frac{\pi D_0^2\rho gL}{12}\left(1 + \frac{x}{L}\right)^3 \qquad (1)$$

Division med EA ger $\frac{du}{dx} = \frac{4C_1}{\pi ED_0^2\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2} - \frac{\rho gL}{3E}\left(1 + \frac{x}{L}\right)$ som efter integration ger axialförskjutningen

$u = C_2 - \frac{4C_1L}{\pi ED_0^2\left(1 + \frac{x}{L}\right)} - \frac{\rho gL^2}{6E}\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2$. Randvillkoren $u(0) = 0$ och $u(L) = 0$ ger

$$C_2 - \frac{4C_1L}{\pi E D_0^2} - \frac{\rho g L^2}{6E} = 0 \qquad (2)$$

respektive

$$C_2 - \frac{4C_1L}{2\pi E D_0^2} - \frac{4\rho g L^2}{6E} = 0 \qquad (3)$$

Om ekvation (2) subtraheras från (3) fås

$$\frac{2C_1L}{\pi E D_0^2} - \frac{\rho g L^2}{2E} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\pi D_0^2 \rho g L}{4} \qquad (4)$$

varvid $N(x) = \sigma A = EA\varepsilon = EA\frac{du}{dx} = \{\text{ekv (1) med } C_1 \text{ enl. (4)}\} = \underline{\frac{\pi D_0^2 \rho g L}{12}\left(3 - \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3\right)}$

<u>Lösning 2:</u> Inför ett Cartesiskt koordinatsystem med (x, y)–planet sammanfallande med horisontalplanet. Om deformationerna hos, och friktionen mot, omgivande material kan försummas, måste axialtöjningarna i planet vara noll:

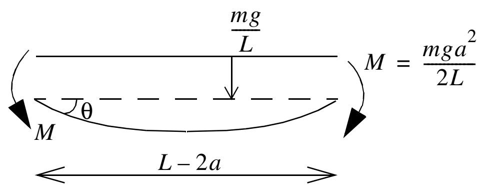
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = 0 \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = 0$$

(se Lundh ekv. 10–7,8). Jämvikt kräver att $\sigma_z = -p$, så vi får $\sigma_x = \sigma_y = \frac{-\nu p}{1-\nu}$. Den vertikala axialtöjningen blir då

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) = \frac{-p}{E}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right)$$

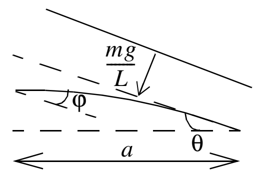
så nedtryckningen blir $\underline{\delta = -\varepsilon_z H = \frac{pH}{E}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right)}$

<u>Lösning 3:</u> Betrakta delen mellan stöden, belastad med sin egentyngd samt snittmomenten. Vinkeln vid endera stödet fås ur elementarfall (formelsamling sid 9)



$$\theta = \frac{mg}{L} \cdot \frac{(L-2a)^3}{24EI} - \frac{mga^2}{2L} \cdot \left(\frac{L-2a}{3EI} + \frac{L-2a}{6EI}\right)$$

Betrakta nu ena överhänget: konsoländens rotation φ relativt vinkeln vid stödet blir (formelsamling sid 10)



$$\varphi = \frac{mg}{L} \cdot \frac{a^3}{6EI}$$

Balkändens rotation relativt det outböjda läget är då

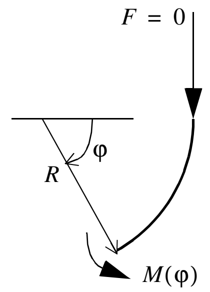
$$\theta - \varphi = \frac{mg}{24EIL}[(L-2a)^3 - 6a^2(L-2a) - 4a^3]$$

(positiv medurs). Villkoret $\theta - \varphi = 0$ leder då till $a^2 - aL + \frac{L^2}{6} = 0$, med lösningen

$a = \frac{L}{2} \pm \frac{L}{\sqrt{12}} \approx \begin{cases} 0{,}211L \\ 0{,}789L \end{cases}$ — den lägre roten ger avståndet från änden till närmaste stödet: $a \approx 0{,}211L$

(den högre roten är avståndet till det bortre stödet).

Lösning 4: Inför en hjälpkraft $F = 0$ i krokänden och i den sökta förskjutningens riktning. Enligt Castiglianos andra sats har vi då $\delta = \frac{\partial W}{\partial F}$, där den elastiska energin är $W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$ om endast böj-deformationer beaktas (se Lundh ekv 15–52 och 15–96); här är s en koordinat längs bärverket. Momentjämvikt kring ett snitt genom kroken mellan P och F ger

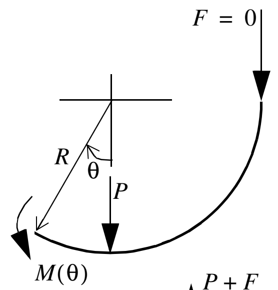


$$M(\varphi) = FR(1 - \cos\varphi) = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial F} = R(1 - \cos\varphi)$$

På samma sätt fås för ett snitt till vänster om P att

$$M(\theta) = FR(1 + \sin\theta) + PR\sin\theta = PR\sin\theta \qquad \frac{\partial M}{\partial F} = R(1 + \sin\theta)$$

och ett snitt genom den raka delen ger

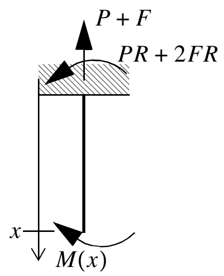


$$M(x) = 2FR + PR = PR \qquad \frac{\partial M}{\partial F} = 2R$$

Vi får då

$$\delta = \frac{\partial M}{\partial F}\frac{\partial W}{\partial M} = \int_s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F} ds = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\pi/2} 0 d\varphi + \int_0^{\pi/2} PR^3 \sin\theta(1 + \sin\theta) d\theta + \int_0^{2R} 2PR^2 dx\right]$$

$$= \frac{PR^3}{EI}\left(0 + \frac{4+\pi}{4} + 4\right) = \frac{(20+\pi)PR^3}{4EI}$$



Insättning av $R = 10r$ samt areatröghetsmomentet för ett massivt cirkulärt tvärsnitt med radien r (formelsamling sid 6) $I = \frac{\pi r^4}{4}$, ger

$\delta = \frac{1000(20+\pi)P}{\pi E r}$ eller med insatta siffervärden $\delta \approx 3{,}5$ mm

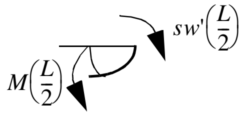
---

Lösning 5a: Om $s = 0$ så har vi Eulers 2a knäckfall, medan $s \to \infty$ leder till 4e knäckfallet. Med $s > 0$ och ändligt får vi då en knäcklast däremellan: $\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{\mathrm{kr}} < \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$

Lösning 5b: Lägg en koordinataxel x utmed balken och låt mittpunkten vara origo. Balkens utböjning vid stabilitetsgränsen blir då $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$, $\frac{-L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ (Lundh ekv 8–66). Integrationskonstanterna bestäms av randvillkoren, men beräkningarna underlättas om man inser att transversalförskjutningen måste vara symmetrisk (första knäckmoden): $w(-x) = w(x)$ kräver att $B = D = 0$. Randvillkoret $w\left(\pm\frac{L}{2}\right) = 0$ ger då att $A = -C\cos\left(\frac{nL}{2}\right)$, så vi

har $w(x) = C\left(\cos(nx) - \cos\left(\frac{nL}{2}\right)\right)$

Jämviktsvillkoret $M\left(\frac{L}{2}\right) = s\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{L}{2}}$ (alternativt $M\left(\frac{-L}{2}\right) = -s\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{-L}{2}}$) till-



sammans med sambandet mellan snittmoment och krökning, $M = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$,

ger $\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x = \frac{L}{2}} + \frac{2}{L}\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{L}{2}} = 0$, där vi satt $s = \frac{2EI}{L}$. Insättning leder till

$$C\left(-n^2\cos\left(\frac{nL}{2}\right) - \frac{2n}{L}\sin\left(\frac{nL}{2}\right)\right) = 0$$

Icke–triviala lösningar ($C = 0$ leder till $w \equiv 0$) kräver att uttrycket inom parentes är noll; divideras

uttrycket med $\frac{-2n\cos\left(\frac{nL}{2}\right)}{L}$, kan knäckekvationen skrivas $\frac{nL}{2} + \tan\left(\frac{nL}{2}\right) = 0$. Knäckkraften fås som

$P_{\mathrm{kr}} = (nL)^2\frac{EI}{L^2}$, där nL är lägsta positiva roten till knäckekvationen; från deluppgift **a** vet vi denna

rot ska sökas i intervallet $[\pi, 2\pi]$. Numeriskt finner man $\frac{nL}{2} \approx 2{,}028$ så $P_{\mathrm{kr}} \approx 16{,}451\frac{EI}{L^2} \approx \frac{1{,}67\pi^2EI}{L^2}$