Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

31 MAJ 2013

Tid och plats: 14.00—18.00 i M–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel ~~(772) 1505~~, 0708 150 756

Jourhavande lärare: Andreas Draganis, tel (772) 1525

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 3/6. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2013) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås **senast** 11/6 2013 på samma ställe som lösningarna. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 17/6.

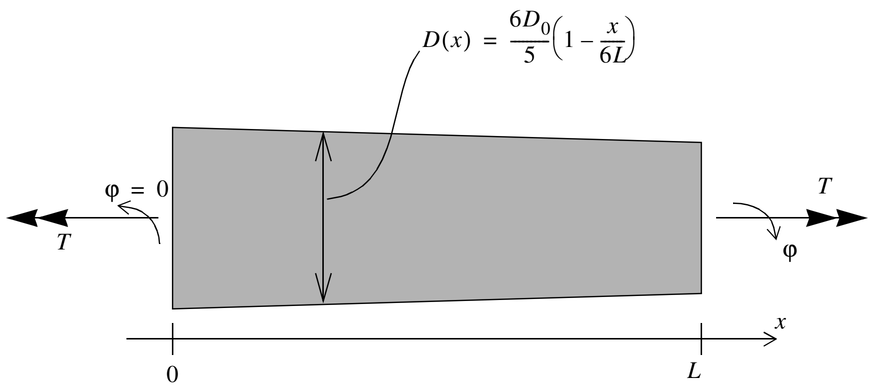
Granskning: Onsdag 12/6 $10^{\underline{00}}$–$12^{\underline{00}}$ samt tisdag 3/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i norra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En konisk axel med massivt tvärsnitt, har en diameter som varierar lineärt mellan $\frac{6D_0}{5}$ och D_0.

Axelns längd är L och materialet är lineärt elastiskt med skjuvmodulen G. Bestäm vridningsvinkel φ av höger ände relativt den vänstra, då axeln belastas med ett vidande moment T (5p)



2.

Spänningstillståndet i en punkt i en belastad elastisk kropp ges av spänningstensorn

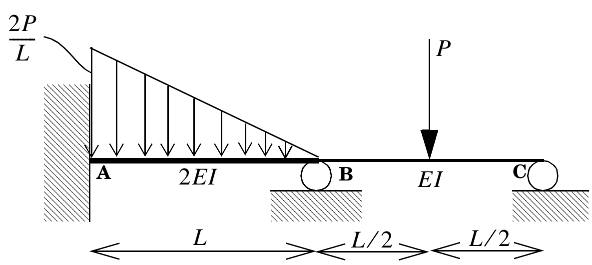
$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 & 30 & 60 \\ 30 & 86 & -28 \\ 60 & -28 & 44 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

a: Bestäm normalspänningen, σ, och skjuvspänningen, τ, på planet med normalvektorn

$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (2p)

b: Bestäm den största skjuvspänningen i punkten (3p)

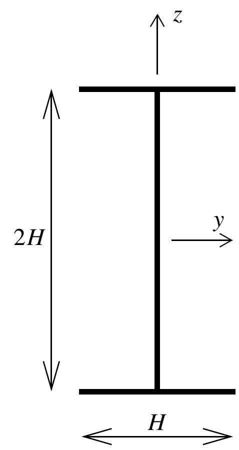
3.



Den lineärt elastiska balken **ABC** är fast inspänd vid **A** och rullagrad vid **B** och **C**, så att två spann med längden L vardera bildas. Delen **AB** har dubbelt så stor böjstyvhet som delen **BC**. Mitt på delen **BC** verkar en nedåt riktad kraft P, medan **AC** belastas med en fördelad last med lineärt varierande intensitet (kraft/längd); största intensiteten är $\frac{2P}{L}$ (se figur).

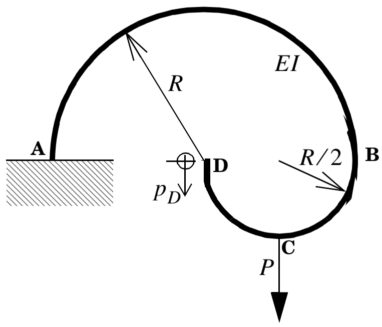
a: Rita momentdiagrammet för delen **BC** (3p) b: För en viss belastning blir $|M|_{max} = \dfrac{19PL}{110}$ i delen **BC**. Balken har här ett dubbelsymmetriskt I–tvärsnitt med flänsbredd H och livhöjd $2H$; godtjockleken är t och antas mycket mindre än övriga tvärsnittsdimmensioner ($t \ll H$). Bestäm t så att säkerheten mot plasticering blir $\dfrac{\sigma_s}{|\sigma|_{max}} = 3$.

Data: $P = 50\ \text{kN}$, $\sigma_s = 230\ \text{MPa}$, $L = 2\ \text{m}$ och $H = 100\ \text{mm}$. (2p)



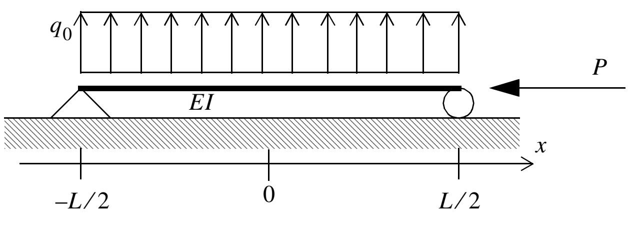
4.

Halvcirkelbågen **AB** har konstant börstyvhet EI och krökningsradien R. Den är fast inspänd vid **A**. Vid **B** fäster en annan halvcirkelbåge, **BCD**, med böjstyvheten EI och krökningsradien $\dfrac{R}{2}$. Bestäm vertikalförskjutningen p_D av punkten **D**, då en last P hänger vid **C**. (5p)



5.

En fritt upplagd balk med längden L och konstant böjstyvhet EI belastas av en transversallast med konstant intensitet q_0 (kraft/längd) och av en tryckande axialkraft P. Bestäm balkens transversalförskjutning $w(x)$ och ange för fallet $P = \dfrac{9EI}{16L^2}$ med hur många procent mittutböjningen $w(0)$ ökar jämfört med fallet $P = 0$ (5p)



Lösning 1: Sambandet mellan snittmomentet och vridningsvinkel är $M_v = GK\frac{d\varphi}{dx}$ (se formelsamlingen sid 2). Här är $M_v = T$ konstant längs hela axeln och tvärsnittsfaktorn är (se Lundh ekv 6–12) $K = \frac{\pi}{2}\left(\frac{D(x)}{2}\right)^4 = \frac{81\pi D_0^4}{1250}\left(1-\frac{x}{6L}\right)^4$. Insättning ger $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_v}{GK} = \frac{1250T}{81\pi G D_0^4}\left(1-\frac{x}{6L}\right)^{-4}$. Integration ger vridningsvinkeln $\varphi(x) = C + \frac{2500TL}{81\pi G D_0^4\left(1-\frac{x}{6L}\right)^3}$. Eftersom vi mäter vinkeln relativt $x = 0$ måste vi ha $\varphi(0) = 0$, vilket ger $C = \frac{-2500TL}{81\pi G D_0^4}$ och alltså $\varphi(x) = \frac{2500TL}{81\pi G D_0^4}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{x}{6L}\right)^3} - 1\right)$. Vi får då vridningsvinkeln

$$\varphi(L) = \frac{2500TL}{81\pi G D_0^4}\left(\frac{1}{\left(\frac{5}{6}\right)^3} - 1\right) = \frac{2500TL}{81\pi G D_0^4}\cdot\frac{91}{125} = \frac{1820TL}{81\pi G D_0^4}$$

Lösning 2a: Spänningsvektorn $\boldsymbol{s}$ på ytan med normalvektorn $\boldsymbol{n}$ fås som (Lundh ekv 9–28) $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}60 & 60 & 120\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ MPa; normalspänningen på ytan fås sedan genom att projicera spänningsvektorn på normalen (ekv 9–29) $\sigma = \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s} = 60\ \mathrm{MPa}$

Vi ser att $\boldsymbol{s}$ är parallell med $\boldsymbol{n}$, så skjuvspänningen på ytan är noll: $\tau = 0$ (Alternativt fås skjuvspänningen ur ekv 9–31: $\tau = \sqrt{|\boldsymbol{s}|^2 - \sigma^2} = 0$.

Eftersom $\tau = 0$ är $\sigma = 60\ \mathrm{MPa}$ en huvudspänning.

Lösning 2b: Största skjuvspänningen fås som halva skillnaden mellan största och minsta huvudspänning. Med $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ har vi alltså $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$.

Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn; $\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = 0$ ger (med siffervärden i MPa)

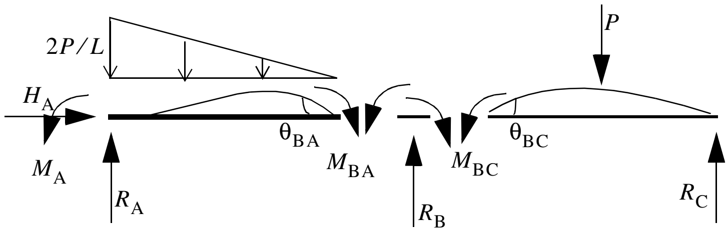
$$-\sigma^3 + 40\sigma^2 + 13200\sigma - 720000 = 0$$

Vi vet att en rot är $\sigma = 60\ \mathrm{MPa}$ — division med $60 - \sigma$ ger $\sigma^2 + 20\sigma - 12000 = 0$, så

$$\sigma = (-10 \pm \sqrt{10^2 + 12000})\ \mathrm{MPa} = \begin{cases} 100\ \mathrm{MPa} \\ -120\ \mathrm{MPa} \end{cases}$$

Vi har alltså $\sigma_1 = 100\ \mathrm{MPa}$ och $\sigma_3 = -120\ \mathrm{MPa}$ ($\sigma_2 = 60\ \mathrm{MPa}$), så $\tau_{max} = 110\ \mathrm{MPa}$

Lösning 3a: Konstruktionen är statiskt obestämd eftersom vi har 5 stödreaktioner, men bara tillgång till 3 jämviktsekvationer. Vi använder här kraftmetod och elementarfall för lösa uppgiften.



Snitta omedelbart till vänster och höger om stödet vid **B**. Momentjämvikt för det utsnittade stödet ger att $M_{BA} = M_{BC}$; Fortsättningsvis betecknar vi snittmomentet med M_B. Från formelsamlingen sid 9 och 11 får vi att vinklarna på öms sidor stödet **B** blir

$$\theta_{BA} = \frac{M_B \cdot L}{4 \cdot 2EI} - \frac{\frac{2P}{L} \cdot L^3}{120 \cdot 2EI} = \frac{L}{EI}\left(\frac{M_B}{8} - \frac{PL}{120}\right)$$

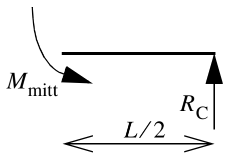
$$\theta_{BC} = \frac{M_B \cdot L}{3EI} - \frac{PL^2}{16EI} = \frac{L}{EI}\left(\frac{M_B}{3} - \frac{PL}{16}\right)$$

Kompatibilitetsvillkoret $\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0$ ger nu $M_B = \frac{17PL}{110}$.

Betrakta nu momentjämvikt vid **B** för delen **BC**: $R_C L - P\frac{L}{2} + M_{BC} = 0$. Med $M_{BC} = M_B = \frac{17PL}{110}$ fås

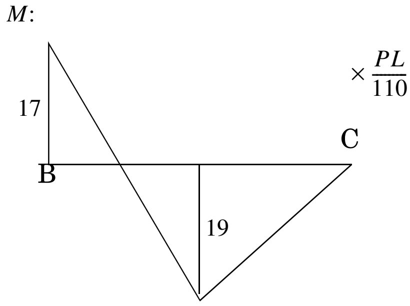
$R_C = \frac{19P}{55}$.

Låt M_{mitt} beteckna snittmomentet mitt på spannet **BC**; snitta omedelbart till höger om kraften P och betrakta momentjämvikt för den högra delen:



$M_{\text{mitt}} + R_C\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow M_{\text{mitt}} = \frac{-19PL}{110}$.

Vid den fria änden **C** är snittmomentet 0 eftersom inget yttre moment verkar här. Mellan **C** och mittpunkten måste momentet variera lineärt, eftersom $\frac{d^2M}{dx^2} = -q(x) = 0$; av samma anledning är variationen lineär mellan **B** och mittpunkten. Vi kan nu rita momentdiagramet.



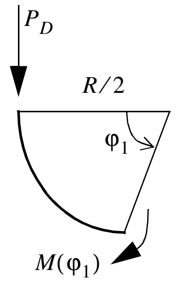
Lösning 3b: Vi har att $|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}|z|_{\max}}{I_y} = \frac{\sigma_s}{3}$. Med Steiners sats får vi areatröghetsmomentet som $I_y = \frac{(2H)^3 t}{12} + 2 \cdot Ht \cdot H^2 = \frac{8}{3}H^3 t$; första termen i mellanledet är livets bidrag, medan de båda flänsarnas bidrag ges av andra termen (vi har här försummat termen som är kubisk i t). Insättning ger nu $\frac{19PL \cdot H \cdot 3}{110 \cdot 8H^3 t} = \frac{\sigma_s}{3}$ ur vilket $t = \frac{171PL}{880H^2\sigma_s} \approx 8{,}45$ mm

Lösning 4: Den sökta nedböjningen beräknas enklast med Castiglianos 2s sats:

$$p_D = \frac{\partial W}{\partial P_D} = \frac{\partial}{\partial P_D}\left(\int_s \frac{M^2}{2EI}ds\right) = \int_s \left(\frac{\partial M}{\partial P_D}\cdot\frac{M}{EI}\right)ds$$

där s är en koordinat längs bågen och $P_D = 0$ är en nedåtriktad kraft vid **D**. Vi söker nu M och $\frac{\partial M}{\partial P_D}$ längs bågen.

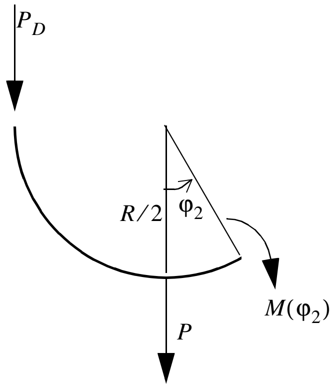
Snitta mellan **C** och **D**; momentjämvikt ger $M(\varphi_1) = \frac{P_D R}{2}(1-\cos\varphi_1) = 0$



Snitta mellan **C** och **B**; momentjämvikt ger här att

$M(\varphi_2) = \frac{PR}{2}\sin\varphi_2 + \frac{P_D R}{2}(1+\sin\varphi_2) = \frac{PR}{2}\sin\varphi_2$. Vi har då också

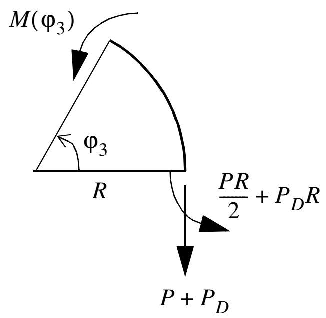
$$\frac{\partial M}{\partial P_D} = \frac{R}{2}(1+\sin\varphi_2)$$



Momentjämvikt med ett snitt genom delen **AB** ger

$M(\varphi_3) + \frac{PR}{2} + P_D R - (P+P_D)R(1-\cos\varphi_3) = 0$, så

$M(\varphi_3) = \frac{PR}{2}(1-2\cos\varphi_3) - P_D R\cos\varphi_3 = \frac{PR}{2}(1-2\cos\varphi_3)$ och $\frac{\partial M}{\partial P_D} = -R\cos\varphi_3$



Castiglianos 2a sats ger nu

$$EIp_D = \int_0^{\pi/2} M\frac{\partial M}{\partial P_D}\cdot\frac{R}{2}d\varphi_1 + \int_0^{\pi/2} M\frac{\partial M}{\partial P_D}\cdot\frac{R}{2}d\varphi_2 + \int_0^{\pi} M\frac{\partial M}{\partial P_D}\cdot R d\varphi_3 = I_1 + I_2 + I_3$$

Beräkning av de 3 integralerna ger $I_1 = 0$, $I_2 = \frac{PR^3}{8}\int_0^{\pi/2}(\sin\varphi_2 + (\sin\varphi_2)^2)d\varphi_2 = \frac{(4+\pi)PR^3}{32}$ och

$I_3 = \frac{PR^3}{2}\int_0^{\pi}(2(\cos\varphi_3)^2 - \cos\varphi_3)d\varphi_3 = \frac{\pi PR^3}{2}$. Vi får då slutligen

$$\underline{p_D = \frac{1}{EI}(I_1 + I_2 + I_3) = \left(\frac{17\pi + 4}{32}\right)\frac{PR^3}{EI}}$$

Lösning 5: Den styrande differentialekvationen är (Lundh ekv 8–63) $w^{\mathrm{iv}} + n^2 w'' = \frac{q_0}{EI}$, $\frac{-L}{2} < x < \frac{L}{2}$,

$n^2 = \frac{P}{EI}$. Homogenlösningen ges av Lundh ekv 8–66: $w_h(x) = A + Bx + C\cos nx + D\sin nx$, men problemet är symmetriskt så vi måste ha $w(x) = w(-x)$ varför det följer att $B = D = 0$

Som partikulärlösning ansätts $w_p = ax^2$; insättning i differentialekvationen ger $0 + 2an^2 = \frac{q_0}{EI}$, så

$a = \frac{q_0}{2n^2 EI}$ och alltså $w_p = \frac{q_0 x^2}{2n^2 EI}$. Vi har nu $w(x) = w_p + w_h = \frac{q_0 x^2}{2n^2 EI} + A + C\cos nx$

Konstanterna bestäms ur randvillkoren. I balkändarna är snittmomentet $M = -EIw'' = 0$;

$w''\left(\frac{\pm L}{2}\right) = 0$ ger $\frac{q_0}{n^2 EI} - Cn^2\cos\frac{nL}{2} = 0$, så $C = \frac{q_0}{n^4 EI\cos\frac{nL}{2}}$. Det andra villkoret, $w\left(\frac{\pm L}{2}\right) = 0$, ger att

$\frac{q_0 L^2}{8n^2 EI} + A + C\cos\frac{nL}{2} = 0$, ur vilket vi löser $A = \frac{-q_0}{n^2 EI}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{L^2}{8}\right)$. Vi har då lösningen

$$w(x) = \frac{q_0 L^4}{EI}\left(\frac{1}{2(nL)^2}\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{\cos nx}{(nL)^4\cos\frac{nL}{2}} - \frac{1}{8(nL)^2} - \frac{1}{(nL)^4}\right)$$

Med $P = 0$ (eller om inverkan av P försummas) fås mittutböjningen (formelsamling sid 9)

$w(0) = \frac{5q_0 L^4}{384EI}$. Med inverkan av P blir mittutböjningen enligt ovan

$$w(0) = \frac{q_0 L^4}{EI}\left(\frac{1}{(nL)^4\cos\frac{nL}{2}} - \frac{1}{(nL)^2}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{(nL)^2}\right)\right) = \frac{5q_0 L^4}{384EI}\left(\frac{384}{5(nL)^4\cos\frac{nL}{2}} - \frac{1}{(nL)^2}\left(\frac{48}{5} + \frac{384}{5(nL)^2}\right)\right)$$

Med $P = \frac{9EI}{16L^2}$ har vi $nL = \sqrt{\frac{P}{EI}}L = \frac{3}{4}$, varför

$$w(0) = \frac{5q_0 L^4}{384EI}\left(\frac{384\cdot 256}{5\cdot 81\cos\frac{3}{8}} - \frac{16}{9}\left(\frac{48}{5} + \frac{384\cdot 16}{5\cdot 9}\right)\right) \approx 1{,}06\,\frac{5q_0 L^4}{384EI}$$

dvs mittutböjningen blir ca 6% större pga den tryckande axialkraften.