Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

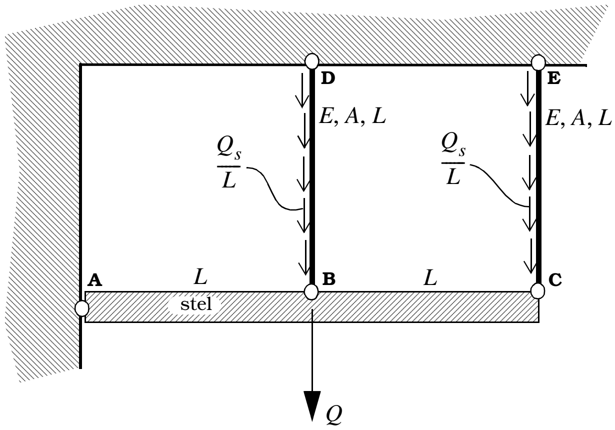
19 JANUARI 2013

Tid och plats:	8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen 9.30 samt 11.00
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Typgodkänd miniräknare.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 21/1. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2011) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås senast 28/1 2013 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast vecka 6.
Granskning:	Onsdag 30/1 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt torsdag 31/1 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

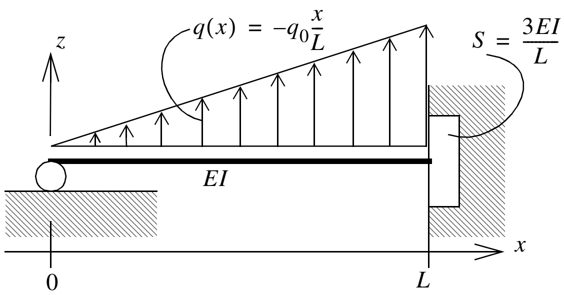
1.

En stel bom **ABC** med längden $2L$ är vid **A** ledat (momentfritt) infäst i en vägg och hålls i läge med två vertikala stänger, **BD** och **CE**. Båda stängerna har längd L, tvärsnittsarea A och är tillverkade av ett lineärt elastiskt material med elasticitetsmodul E. Bestäm vertikalförskjutningen vid **C**, då konstruktionen belastas av sin egentyngd. Bomens egentyngd är Q medan vardera stång har egentyngden $Q_s = Q/5$ och betraktas som jämt fördelad, Q_s/L (kraft/längd), längs respektive stång.



2.

En balk med längden L och konstant böjstyvhet EI är i sin vänstra ände, $x = 0$, rullagrad och vid $x = L$ elastiskt inspänd med styvheten $S = \frac{3EI}{L}$, d v s i högra änden är förskjutningar förhindrade, men inspänningsmomentet M_{insp} är proportionellt mot balkens rotation θ vid $x = L$ ($M_{\text{insp}} = S\theta$). Bestäm snittmomentet $M(x)$ och tvärkraften $T(x)$ i balken, då den belastas med en fördelad last (kraft/längd) $q(x) = -q_0\frac{x}{L}$ enligt figuren.

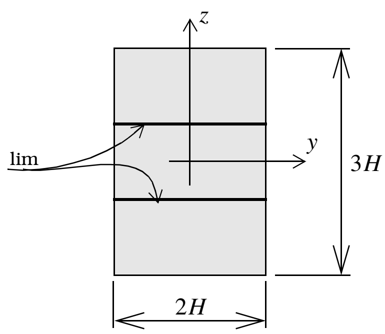


3.

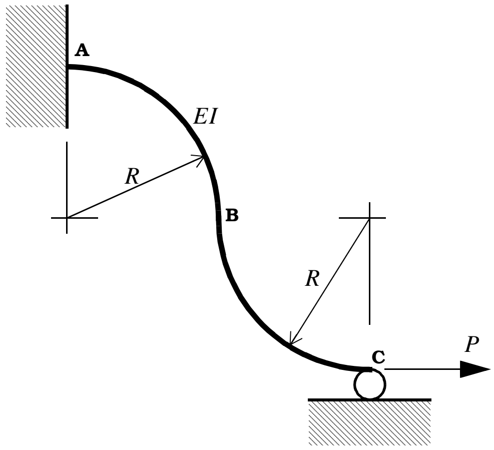
Betrakta konstruktionen i föregående uppgift — balken har satts samman genom att lima ihop tre brädor med bredd x höjd $2H \times H$, så att tvärsnittet blir rektangulärt med bredden $2H$ och höjden $3H$ enligt figuren. I ett visst tvärsnitt är tvärkraften $T = \frac{11q_0L}{30}$ och det böjande momentet $M = \frac{q_0L^2}{30}$. Låt $q_0 = 5{,}625\ \text{kN/m}$, $L = 2\ \text{m}$ samt $H = 50\ \text{mm}$ och

a: bestäm största normalspänningen σ i tvärsnittet (2p)

b: skjuvspänningen i limfogarna (3p)



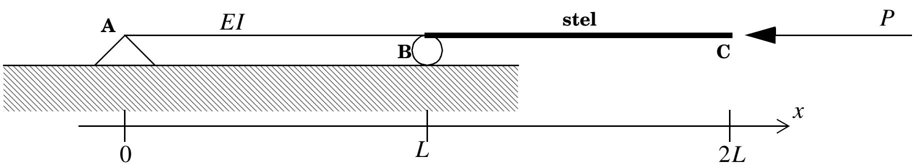
4.



Bågkonstruktion i figuren består av två kvartscirkelbågar, **AB** och **BC**, av ett lineärt elastiskt material. Båda delarna har krökningsradien R och konstant böjstyvhet EI. Vid **A** är alla förskjutningar och rotationer förhindrade, men vid **C** är endast vertikal förskjutning förhindrad. Beräkna snittmomentet vid **B** då bärverket belastas med en horisontell kraft P vid **C**. Det kan antas att tvärsnittsdimensionerna är små jämfört med R och hänsyn behöver bara tas till böjdeformationer (d v s försumma eventuell inverkan av skjuv– och axialdeformationer).

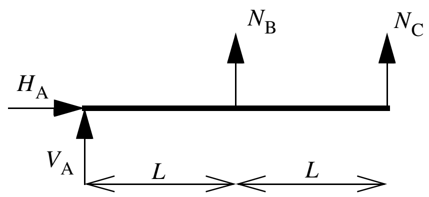
5.

Beräkna kritisk last, $P = P_{\mathrm{kr}}$, med avseende på stabilitet för den balkkonstruktionen som visas i figuren nedan. Spannet **AB** har längden L och böjstyvheten EI, medan överhänget **BC**, också med längden L, kan betraktas som stelt (d.v.s deformationen av delen **BC** kan försummas). (5p)

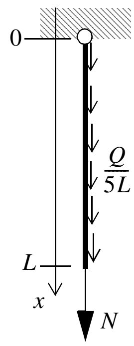


Lösning 1: Frilägg bommen och betrakta momentjämvikt kring **A**: $N_{\mathrm{B}} \cdot L + N_{\mathrm{C}} \cdot 2L - Q \cdot L = 0$; alltså fås

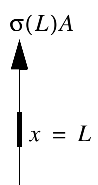
$$N_{\mathrm{B}} + 2N_{\mathrm{C}} = Q \qquad (1)$$



Betrakta nu en stång som belastas med en utbredd last med konstant intensitet $Q/(5L)$; med konstant axialstyvhet EA ges den axiella förskjutningen $u(x)$ som lösningen till $\dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{-Q}{5EAL}$ (formelsamling sid 2). Lösningen blir $u(x) = C_1 + C_2x - \dfrac{Qx^2}{10EAL}$ där de två integrationkonstanterna bestäms av randvillkoren.



Vid $x = 0$ har vi trivialt att $u(0) = 0$, vilket ger $C_1 = 0$; vid andra änden kräver jämvikt att $N = \sigma(L)A$ (se figur) — med $\sigma = E\varepsilon = E\dfrac{du}{dx}$ fås $\left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x = L} = \dfrac{N}{EA}$, så

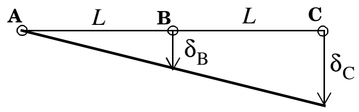


$C_2 = \frac{N}{EA} + \frac{Q}{5EA}$, varvid $u(x) = \left(\frac{N}{EA} + \frac{Q}{5EA}\right)x - \frac{Qx^2}{10EAL}$; speciellt fås stångens förlängning som

$\delta = u(L) = \frac{NL}{EA} + \frac{QL}{10EA}$. Förlängningarna av stängerna **BD** och **CE** blir alltså

$$\delta_B = \frac{N_B L}{EA} + \frac{QL}{10EA} \qquad \delta_C = \frac{N_C L}{EA} + \frac{QL}{10EA} \tag{2}$$

Om bommen är stel (dess deformation kan försummas) har vi för små förskjutningar kompatibilitetsvillkoret $\delta_C = 2\delta_B$; med ekv (2) ger detta



$$N_C - 2N_B = \frac{Q}{10} \tag{3}$$

De två stångkrafterna kan nu lösas ur ekv (1) och (3); speciellt fås $N_C = \frac{21Q}{50}$ som efter insättning i (2) ger den sökta: $\delta_C = \frac{13QL}{25EA}$

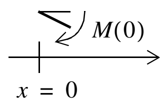
Lösning 2: Momentet kan fås som $M(x) = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$, där $w(x)$ är transversalförskjutningen, och tvärkraften därefter som $T(x) = \frac{dM}{dx}$; se H Lundh ekv 7–65 respektive 7–3. Med konstant böjstyvhet EI och den givna belastningen, fås transversalförskjutningen som lösningen till $\frac{d^4w}{dx^4} = \frac{-q_0}{EI}\xi$ (formelsamling sid 3), där vi infört $\xi = \frac{x}{L}$. Integration 4 ggr ger

$$w(x) = A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 - \frac{q_0L^4}{120EI}\xi^5$$

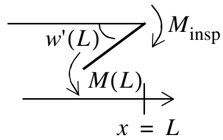
där integrationskonstanterna bestäms ur randvillkor; vi kommer då att behöva derivatorna

$$\frac{dw}{dx} = \frac{B}{L} + \frac{2C}{L}\xi + \frac{3D}{L}\xi^2 - \frac{q_0L^3}{24EI}\xi^4$$
$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{2C}{L^2} + \frac{6D}{L^2}\xi - \frac{q_0L^2}{6EI}\xi^3$$

Vid $x = 0$ är transversalförskjutningen förhindrad och snittmomentet $M(0) = 0$; med $M = -EIw''$ har vi alltså villkoren $w(0) = 0$ och $\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$.



Vid andra änden, $x = L$ gäller att $w(L) = 0$ samt att (se fig) $M(L) = M_{insp}$, så med $M(L) = -EIw''(L)$ och $M_{insp} = Sw'(L)$ ha vi $EIw''(L) + Sw'(L) = 0$ eller efter division med böjstyvheten $\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x=L} + \frac{S}{EI}\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=L} = 0$.



Randvillkoren vid vänster ände ger direkt att $A = C = 0$. Villkoret $w(L) = 0$ ger

$$B = \frac{q_0 L^4}{120EI} - D \tag{4}$$

medan momentjämviktsvillkoret vid $x = L$ ger att

$$\frac{6D}{L^2} - \frac{q_0 L^2}{6EI} + \frac{S}{EI}\left(\frac{B}{L} + \frac{3D}{L} - \frac{q_0 L^3}{24EI}\right) = 0 \tag{5}$$

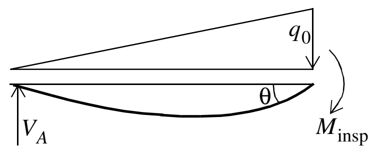
Med (4) insatt i (5) får vi

$$D = \frac{5 + \frac{SL}{EI}}{3 + \frac{SL}{EI}} \cdot \frac{q_0 L^2}{60EI} = \frac{q_0 L^2}{45EI}$$

där vi satt in att $S = \frac{3EI}{L}$. Vi har då $M(x) = -EI\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q_0 L^2}{6}\xi^3 - \frac{6D \cdot EI}{L^2}\xi = \frac{q_0 L^2}{30}(5\xi^3 - 4\xi)$ samt

$T(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{q_0 L}{30}(15\xi^2 - 4)$

Alternativt: Använd elementarfall. Formelsamlingen sid 9 ger



$\theta = \frac{q_0 L^3}{45EI} - \frac{M_{\text{insp}} L}{3EI}$ och från det givna momentvinkel–sambandet har

vi $\theta = \frac{M_{\text{insp}}}{S}$. Ur dessa två uttryck för vinkeln vid $x = L$ löser vi

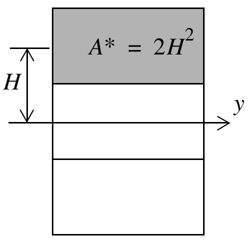
$M_{\text{insp}} = \left(\frac{3\frac{SL}{EI}}{3 + \frac{SL}{EI}}\right)\frac{q_0 L^2}{45} = \frac{q_0 L^2}{30}$. Momentjämvikt kring $x = L$ ger $V_A L + \frac{q_0 L^2}{30} - \frac{q_0 L}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow V_A = \frac{2q_0 L}{15}$. Vi

kan nu beräkna $M(x)$ och $T(x)$ genom att snitta vid godtycklig koordinat x och ställa upp jämviktsekvationer för den utsnittade biten.

Lösning 3a: Med koordinatsystemets origo i tvärsnittets yttyngdpunkt, beräknas normalspänningen med $\sigma(z) = \frac{Mz}{I}$ (H Lundh ekv 7–26). Här är areatröghetmomentet $I = I_y = \frac{2H \cdot (3H)^3}{12} = \frac{9H^4}{2}$.

Vi får då $\pm|\sigma|_{\max} = \frac{M \cdot \pm|z|_{\max}}{I_y} = \frac{\pm q_0 L^2}{90H^3} = \pm 2\ \text{MPa}$ (drag/tryck i ovan–/underkant).

Lösning 3b: Skjuvspänningen beräknas enligt $\tau = \frac{TS_{A*}}{Ib}$ (H Lundh ekv 7–48); här är $I = I_y = \frac{9H^4}{2}$ enligt ovan, $b = 2H$ snittets bredd och S_{A*} statiska momentet m a p y–axeln för de bit av tvärsnittet som ligger på ena sida om



den linje längs vilken skjuvspänningen söks. Här har vi (se figur) $A^* = 2H \cdot H = 2H^2$ och

$S_{A^*} = A^* \cdot H = 2H^3$. Insättning ger $\tau = \dfrac{\dfrac{11q_0L}{30} \cdot 2H^3}{\dfrac{9H^4}{2} \cdot 2H} = \dfrac{11q_0L}{135H^2} = \dfrac{11}{30}\,\text{MPa} \approx 0{,}37\,\text{MPa}$

Lösning 4: Vi har 4 fixkrafter — ett stödmoment och två stödkrafter vid **A** samt en vertikal stödkraft vid **C** — men bara tillgång till 3 jämviktsekvationer, d v s konstruktionen är statiskt obestämd. Vi kan beräkna den vertikala förskjutningen δ_{vC} vid **C** med Castiglianos andra sats; kompatibilitetsvillkoret $\delta_{vC} = 0$ ger oss den extra ekvation som behövs. Vi utnyttjar alltså att

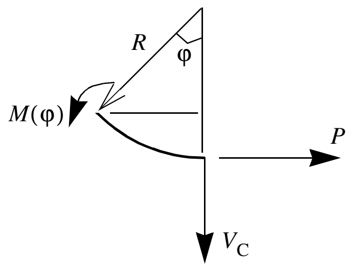
$\delta_{vC} = \dfrac{\partial W}{\partial V_C} = 0$ (H Lundh ekv 15–96) där V_C är stödkraften vid **C**. Här är den elastiska energin

$W = \int_s \dfrac{M^2}{2EI} ds$ (H Lundh ekv 15–52) om hänsyn endast tas till böjning och s är en koordinat längs bärverket. Vi har att $\dfrac{\partial W}{\partial V_C} = \dfrac{\partial W}{\partial M}\dfrac{\partial M}{\partial V_C}$ så

$$\delta_{vC} = \int_s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial V_C} ds = 0 \qquad (6)$$

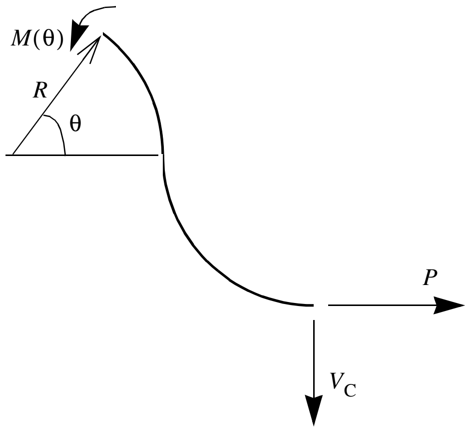
Snitta vid en vinkelkoordinat φ mellan **B** och **C**; momentjämvikt ger

$$M(\varphi) = V_C R \sin\varphi - PR(1 - \cos\varphi) \qquad \frac{\partial M}{\partial V_C} = R\sin\varphi \qquad (7)$$



Snitta mellan A och B; med vinkeln θ enligt figuren fås

$$M(\theta) = V_C R(2 - \cos\theta) - PR(1 + \sin\theta) \qquad \frac{\partial M}{\partial V_C} = R(2 - \cos\theta) \quad (8)$$



Insättning av (7) och (8) i (6) ger nu

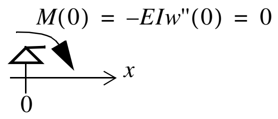
$$\frac{1}{EI}\left(\int_0^{\pi/2} [V_C R^2 (\sin\varphi)^2 - PR^2(\sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi)] R d\varphi + \int_0^{\pi/2} [V_C R^2 (2 - \cos\theta)^2 - PR^2(1 + \sin\theta)(2 - \cos\theta)] R d\theta\right) = 0$$

Integration ger $\frac{5\pi-8}{2}V_C - (\pi+1)P = 0$, så stödkraften måste vara $V_C = \frac{2(\pi+1)}{5\pi-8}P$. Det sökta momentet fås nu ur (7) med $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (eller (8) med $\theta = 0$):

$$M_B = V_C R\sin\frac{\pi}{2} - PR\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right) = (V_C - P)R = \frac{10-3\pi}{5\pi-8}PR \approx 0{,}075PR$$

<u>Lösning 5:</u> Den styrande differentialekvationen har lösningen $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$ (Lundh ekv 8–66), där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ och $w(x)$ är transversalförskjutningen. Konstanterna (A, B, C, D) bestäms av randvillkoren.

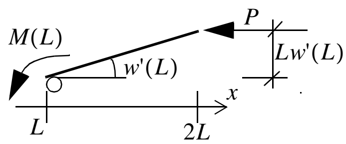
Vid $x = 0$ har vi trivialt att $w(0) = 0$ samt att $w''(0) = 0$ eftersom snittmomentet $M = -EIw''$ är noll här. Detta ger att $A + C = 0$ respektive $-Cn^2 = 0$, så $A = C = 0$. Vi har då att $w(x) = Bx + D\sin(nx)$



Vid $x = L$ gäller att $w(L) = 0$, vilket kräver att $BL + D\sin(nL) = 0$; $B = -D\frac{\sin(nL)}{L}$ ger oss då

$$w(x) = D\left(\sin(nx) - \frac{\sin(nL)}{L}x\right) \qquad w'(x) = D\left(n\cos(nx) - \frac{\sin(nL)}{L}\right) \qquad w''(x) = -Dn^2\sin(nx)$$

Det sista randvillkoret fås genom att titta på momentjämvikt för delen **BC**. Jämvikt kräver att $M(L) + PLw'(L) = 0$. Om vi här sätter in sambandet $M = -EIw''$ och dividerar med $-EI$, får vi $w''(L) - n^2Lw'(L) = 0$. Insättning ger



$D\left(-n^2\sin(nL) - n^2L\cdot n\cos(nL) + n^2L\cdot\frac{\sin(nL)}{L}\right) = 0$, dvs $-Dn^3L\cos(nL) = 0$. Icke-triviala lösningar kräver att $\cos(nL) = 0$, som har lägsta positiva rot $nL = \frac{\pi}{2}$, så $(nL)^2 = \frac{P_{\text{kr}}}{EI}L^2 = \frac{\pi^2}{4}$. $P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$