Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081
31 AUGUSTI 2012

Tid och plats: 14.00—18.00 i V–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.
2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.
4. Typgodkänd miniräknare.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler 3/9. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2012) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

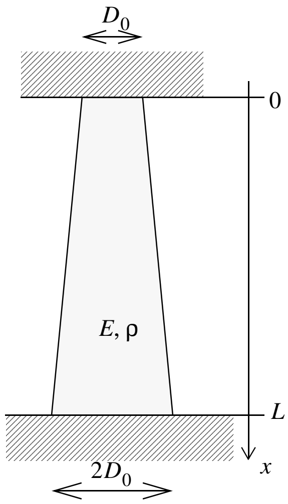
Resultatlista: Anslås **senast** 10/9 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 14/9.

Granskning: Tisdag 11/9 12–13 samt torsdag 13/9 12–13 på inst. (2a våningen (plan 3) i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

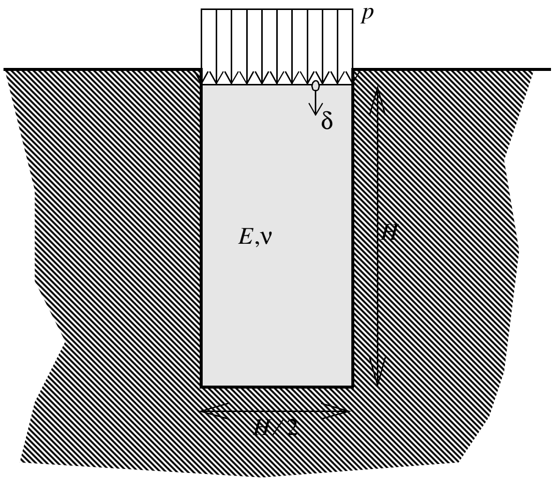
1.

En pelare med ett homogent cirkulärt tvärsnitt har i spänningsfritt tillstånd längden L. Tvärsnittets diameter varierar lineärt från D_0 i ena änden till $2D_0$ i den andra. Materialet är lineärt elastiskt med elasticitets modul E och densitet ρ. Pelaren monteras vertikalt mellan två stela plan på avståndet L från varandra enligt figuren. Beräkna normalkraften $N(x)$ i pelaren. (5p)



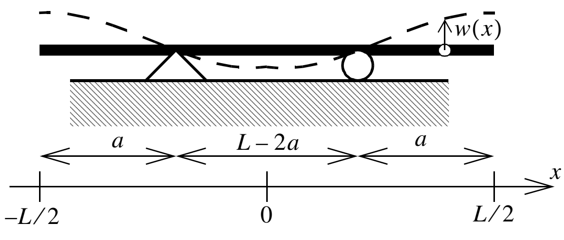
2.

En cylindrisk plugg med höjden H och diametern $H/2$ passar exakt in i ett hål i en styv platta. Cylindern är lineärt elastisk med elasticitetsmodulen E och Poissons tal ν. Beräkna pluggens ihoptryckning δ då den belastas med ett tryck p på den fria ytan. Det omgivande materialets (plattans) deformationer kan försummas, liksom även friktionen mellan de båda kropparna. (5p)

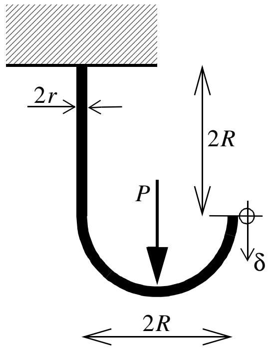


3.

Balken i figuren nedan har böjstyvheten EI och belastas enbart av sin egentyngd $q = \frac{mg}{L}$ (nedåtriktad och konstant utmed balkens längd). Bestäm stödplaceringen, dvs avståndet a, så att balkändarna inte roterar: $\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{\pm L}{2}} = 0$ (5p)



4.



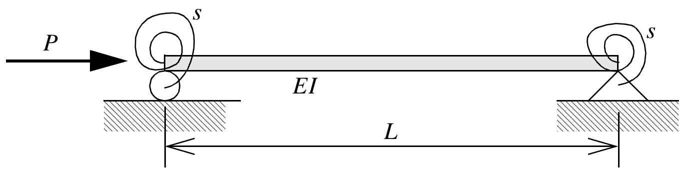
En stång med massivt cirkulärt tvärsnitt, radie r, har använts för att tillverka en krok. Kroken är formad som en halvcirkel med radien R och en rak del med längden $2R$. Bestäm den fria ändens vertikalförskjutning δ, då kroken belastas med en kraft P enligt figuren. Hänsyn behöver bara tas till böjdeformationer. Data: $E = 210\ \text{GPa}$, $P = 250\ \text{N}$, $r = 2{,}5\ \text{mm}$, $R = 10r$ (5p)

5.

En lineärt elastisk balk med böjstyvheten EI och längden L är elastiskt inspänd med styvheten $s = 2EI/L$ i båda ändar, dvs sambandet mellan infästningsmomentet M_{in} och ändens rotation θ är $M_{\text{in}} = s\theta$. Balken belastas med en axiellt tryckande kraft P enligt figuren.

a: Bestäm en övre och undre gräns för elastisk stabilitet (knäcklasten) (1p)

b: Härled knäckekvationen för balken, dvs den ekvation vars lösning ger det kritiska värdet på P (4p)



Lösning 1: Problemet är statiskt obestämt och löses enklast genom att lösa den styrande differentialekvationen (Lundh ekv 3–7 eller formelsamlingen sid 2): $-\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] = K_x A$. Diametern är här $D(x) = D_0\left(1 + \frac{x}{L}\right)$, så tvärsnittsytan blir $A(x) = \frac{\pi D^2(x)}{4} = \frac{\pi D_0^2}{4}\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2$. Vidare är $K_x A$ last per längdenhet, vilket i vårt fall är pelarens egentyngd dvs $K_x A = \rho g A = \frac{\pi D_0^2 \rho g}{4}\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2$. Insättning i differentialekvationen och integration ger

$$EA\frac{du}{dx} = C_1 - \frac{\pi D_0^2 \rho g L}{12}\left(1 + \frac{x}{L}\right)^3 \qquad (1)$$

Division med EA ger $\frac{du}{dx} = \frac{4C_1}{\pi E D_0^2\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2} - \frac{\rho g L}{3E}\left(1 + \frac{x}{L}\right)$ som efter integration ger axialförskjutningen

$u = C_2 - \frac{4C_1 L}{\pi E D_0^2\left(1 + \frac{x}{L}\right)} - \frac{\rho g L^2}{6E}\left(1 + \frac{x}{L}\right)^2$. Randvillkoren $u(0) = 0$ och $u(L) = 0$ ger

$$C_2 - \frac{4C_1L}{\pi E D_0^2} - \frac{\rho g L^2}{6E} = 0 \qquad (2)$$

respektive

$$C_2 - \frac{4C_1L}{2\pi E D_0^2} - \frac{4\rho g L^2}{6E} = 0 \qquad (3)$$

Om ekvation (2) subtraheras från (3) fås

$$\frac{2C_1L}{\pi E D_0^2} - \frac{\rho g L^2}{2E} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\pi D_0^2 \rho g L}{4} \qquad (4)$$

varvid $N(x) = \sigma A = EA\varepsilon = EA\frac{du}{dx} = \{\text{ekv (1) med } C_1 \text{ enl. (4)}\} = \underline{\frac{\pi D_0^2 \rho g L}{12}\left(3 - \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3\right)}$

Lösning 2: Inför ett Cartesiskt koordinatsystem med (x, y)–planet sammanfallande med horisontalplanet. Om deformationerna hos, och friktionen mot, omgivande material kan försummas, måste axialtöjningarna i planet vara noll:

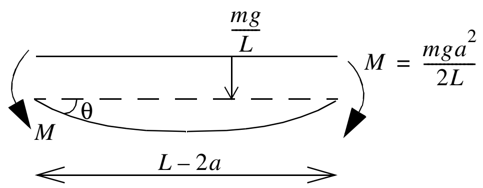
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = 0 \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = 0$$

(se Lundh ekv. 10–7,8). Jämvikt kräver att $\sigma_z = -p$, så vi får $\sigma_x = \sigma_y = \frac{-\nu p}{1-\nu}$. Den vertikala axialtöjningen blir då

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) = \frac{-p}{E}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right)$$

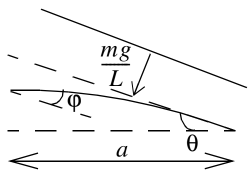
så nedtryckningen blir $\delta = -\varepsilon_z H = \underline{\frac{pH}{E}\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right)}$

Lösning 3: Betrakta delen mellan stöden, belastad med sin egentyngd samt snittmomenten. Vinkeln vid endera stödet fås ur elementarfall (formelsamling sid 9)



$$\theta = \frac{mg}{L} \cdot \frac{(L-2a)^3}{24EI} - \frac{mga^2}{2L} \cdot \left(\frac{L-2a}{3EI} + \frac{L-2a}{6EI}\right)$$

Betrakta nu ena överhänget: konsoländens rotation φ relativt vinkeln vid stödet blir (formelsamling sid 10)



$$\varphi = \frac{mg}{L} \cdot \frac{a^3}{6EI}$$

Balkändens rotation relativt det outböjda läget är då

$$\theta - \varphi = \frac{mg}{24EIL}[(L-2a)^3 - 6a^2(L-2a) - 4a^3]$$

(positiv medurs). Villkoret $\theta - \varphi = 0$ leder då till $a^2 - aL + \frac{L^2}{6} = 0$, med lösningen

$a = \frac{L}{2} \pm \frac{L}{\sqrt{12}} \approx \begin{cases} 0{,}211L \\ 0{,}789L \end{cases}$ — den lägre roten ger avståndet från änden till närmaste stödet: $a \approx 0{,}211L$

(den högre roten är avståndet till det bortre stödet).

Lösning 4: Inför en hjälpkraft $F = 0$ i krokänden och i den sökta förskjutningens riktning. Enligt Castiglianos andra sats har vi då $\delta = \frac{\partial W}{\partial F}$, där den elastiska energin är $W = \int_s \frac{M^2}{2EI} ds$ om endast böj-deformationer beaktas (se Lundh ekv 15–52 och 15–96); här är s en koordinat längs bärverket.

Momentjämvikt kring ett snitt genom kroken mellan P och F ger

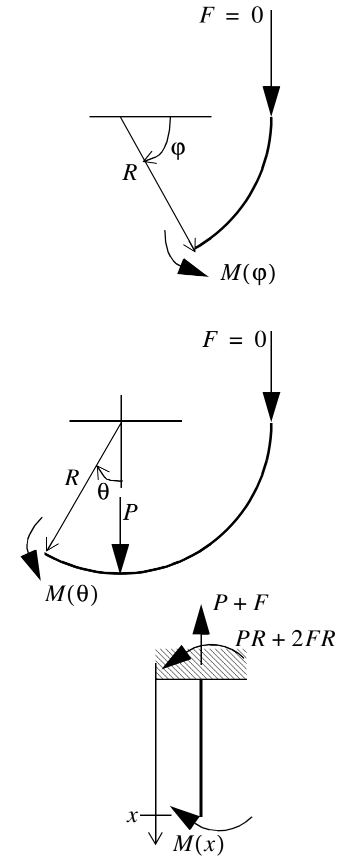
$$M(\varphi) = FR(1 - \cos\varphi) = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial F} = R(1 - \cos\varphi)$$

På samma sätt fås för ett snitt till vänster om P att

$$M(\theta) = FR(1 + \sin\theta) + PR\sin\theta = PR\sin\theta \qquad \frac{\partial M}{\partial F} = R(1 + \sin\theta)$$

och ett snitt genom den raka delen ger

$$M(x) = 2FR + PR = PR \qquad \frac{\partial M}{\partial F} = 2R$$



Vi får då

$$\delta = \frac{\partial M}{\partial F}\frac{\partial W}{\partial M} = \int_s \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F} ds = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{\pi/2} 0\,d\varphi + \int_0^{\pi/2} PR^3 \sin\theta(1 + \sin\theta)d\theta + \int_0^{2R} 2PR^2 dx\right]$$

$$= \frac{PR^3}{EI}\left(0 + \frac{4+\pi}{4} + 4\right) = \frac{(20+\pi)PR^3}{4EI}$$

Insättning av $R = 10r$ samt areatröghetsmomentet för ett massivt cirkulärt tvärsnitt med radien r (formelsamling sid 6) $I = \frac{\pi r^4}{4}$, ger

$\delta = \frac{1000(20+\pi)P}{\pi Er}$ eller med insatta siffervärden $\delta \approx 3{,}5$ mm

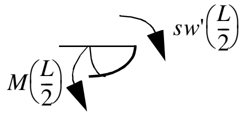
---

Lösning 5a: Om $s = 0$ så har vi Eulers 2a knäckfall, medan $s \to \infty$ leder till 4e knäckfallet. Med $s > 0$ och ändligt får vi då en knäcklast däremellan: $\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{kr} < \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$

Lösning 5b: Lägg en koordinataxel x utmed balken och låt mittpunkten vara origo. Balkens utböjning vid stabilitetsgränsen blir då $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$, $\frac{-L}{2} \le x \le \frac{L}{2}$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ (Lundh ekv 8–66). Integrationskonstanterna bestäms av randvillkoren, men beräkningarna underlättas om man inser att transversalförskjutningen måste vara symmetrisk (första knäckmoden): $w(-x) = w(x)$ kräver att $B = D = 0$. Randvillkoret $w\left(\pm\frac{L}{2}\right) = 0$ ger då att $A = -C\cos\left(\frac{nL}{2}\right)$, så vi

har $w(x) = C\left(\cos(nx) - \cos\left(\frac{nL}{2}\right)\right)$

Jämviktsvillkoret $M\left(\frac{L}{2}\right) = s\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{L}{2}}$ (alternativt $M\left(\frac{-L}{2}\right) = -s\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{-L}{2}}$) till-



sammans med sambandet mellan snittmoment och krökning, $M = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$,

ger $\left.\frac{d^2w}{dx^2}\right|_{x = \frac{L}{2}} + \frac{2}{L}\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x = \frac{L}{2}} = 0$, där vi satt $s = \frac{2EI}{L}$. Insättning leder till

$$C\left(-n^2\cos\left(\frac{nL}{2}\right) - \frac{2n}{L}\sin\left(\frac{nL}{2}\right)\right) = 0$$

Icke–triviala lösningar ($C = 0$ leder till $w \equiv 0$) kräver att uttrycket inom parentes är noll; divideras

uttrycket med $\frac{-2n\cos\left(\frac{nL}{2}\right)}{L}$, kan knäckekvationen skrivas $\frac{nL}{2} + \tan\left(\frac{nL}{2}\right) = 0$. Knäckkraften fås som

$P_{\mathrm{kr}} = (nL)^2\frac{EI}{L^2}$, där nL är lägsta positiva roten till knäckekvationen; från deluppgift **a** vet vi denna

rot ska sökas i intervallet $[\pi, 2\pi]$. Numeriskt finner man $\frac{nL}{2} \approx 2{,}028$ så $P_{\mathrm{kr}} \approx 16{,}451\frac{EI}{L^2} \approx \frac{1{,}67\pi^2 EI}{L^2}$