Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

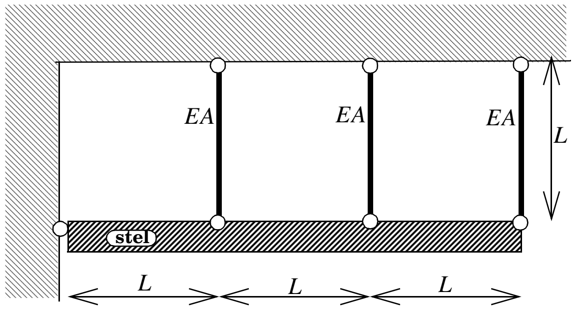
TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

9 JANUARI 2012

Tid och plats:	14.00—18.00 i V–huset. Lärare besöker salen 15.00 samt 16.30
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och display i samma enhet.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 10/1. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2011) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 16/1 2012 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 2/2.
Granskning:	Tisdag 17/1 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt torsdag 19/1 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.



En horisontel bom med längden $3L$ är ledat infäst till en vägg och bärs i övrigt upp av tre likadana vertikala stänger; varje stång har axialstyvhet EA och längd L. Beräkna reaktionskraften vid väggfästet, om bommen enbart belastas av sin egentyngd Q som angriper på bommens mitt. Betrakta bommen som stel, dvs försumma dess deformationer. (5p)

2.

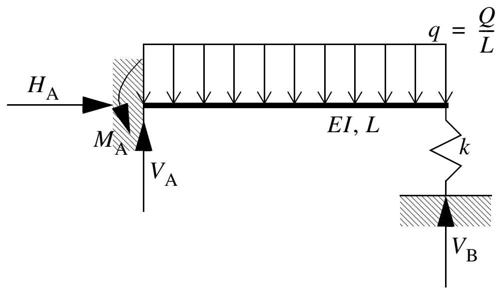
I en punkt i en belastad kropp har man med töjningsmätare bestämt deformationen till

$\varepsilon_x = 0{,}850 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_y = -0{,}450 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_z = 0{,}200 \cdot 10^{-3}$, $\gamma_{xz} = 1{,}040 \cdot 10^{-3}$ samt $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$. Materialet är lineärt elastiskt med elasticitetsmodulen $E = 200\ \mathrm{GPa}$ och Poissons tal $\nu = 0{,}3$, upp till sträckgränsen $\sigma_s = 350\ \mathrm{MPa}$.

a: Beräkna spänningarna i punkten. (2p)

b: Beräkna den största skjuvspänning som uppträder på något plan genom punkten. (3p)

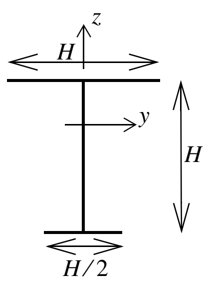
3.



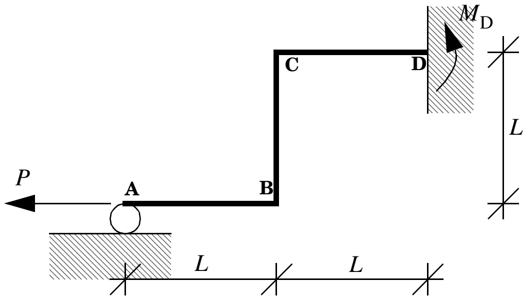
En balk med konstant böjstyvhet EI och längden L är fast inspänd i sin ena ände och stöds av en fjäder i andra änden. Balken belastas med en jämt fördelad last med intensiteten $q = Q/L$, där Q är lastresultanten.

a: Bestäm fjäderstyvheten k så att 75% av belastningen tas upp av den fasta inspänningen, dvs så att $V_A = \frac{3Q}{4}$ (2p)

b: Givet att fjädern är dimensionerad enligt ovan, beräkna den till beloppet största normalspänning σ som uppträder i ett tvärsnitt närmast den fasta inspänningen. Balken har ett enkelsymmetriskt I-tvärsnitt, med godstjocklek $t \ll H$ enligt figuren.



4.



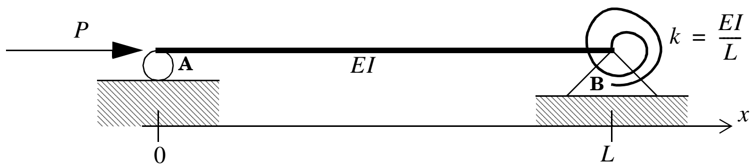
Ramen **ABCD** består av tre balkar som var och en har längd L och böjstyvhet EI. Vid **A** är konstruktionen rullagrad så att vertikalförskjutning är förhindrad; vid **D** är ramen fast inspänd. Beräkna inspänningsmomentet M_D, då ramen belastas av en horisontell kraft P vid **A** enligt figuren. (5p)

5.

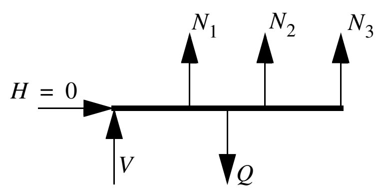
En balk **AB** med längd L och böjstyvhet EI är momentfritt lagrad vid **A** och lagrad med en rotationsfjäder med styvheten $k = EI/L$ vid **B**; (fjädern påverkar balkänden med ett mothållande moment som är proportionellt mot balkens rotation vid **B**). Strukturen utsätts för en tryckande axialkraft P enligt figuren nedan.

a: Ange med tydlig motivering en övre och en undre gräns för den kritiska lasten P_{kr}, med avseende på elastisk instabilitet. (1p)

b: Härled knäckekvationen, dvs en ekvation vars lösning ger kritisk last med avseende på elastisk instabilitet. (4p)



Lösning 1: Numrera stängerna från vänster till höger och frilägg bommen. Horisontell jämvikt ger direkt att $H = 0$. Vertikal jämvikt kräver

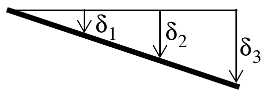


$$V = Q - (N_1 + N_2 + N_3) \tag{1}$$

Vi måste beräkna stångkrafterna N_i. Momentjämvikt kring väggfästet ger

$$N_1 \cdot L + N_2 \cdot 2L + N_3 \cdot 3L - \frac{3QL}{2} = 0 \tag{2}$$

Ytterligare jämviktsekvationer finns inte att tillgå; studera bommen i utböjt läge och låt δ_i beteckna förlängningen av stång i. Då bommens deformation försummas har vi kompatibilitetssambanden $\delta_2 = 2\delta_1$ respektive $\delta_3 = 3\delta_1$ och enligt H Lundh ekv 2–15 kan stångkrafterna uttryckas i förlängningarna



$$N_1 = \frac{EA}{L}\delta_1\,,\ N_2 = \frac{EA}{L}\delta_2 = \frac{EA}{L}\cdot 2\delta_1\,,\ N_3 = \frac{EA}{L}\delta_3 = \frac{EA}{L}\cdot 3\delta_1 \qquad (3)$$

Insättning i (2) ger $EA\delta_1(1+4+9) - \frac{3QL}{2} = 0$ varur $\delta_1 = \frac{3QL}{28EA}$, så (3) ger $N_1 = \frac{3Q}{28}$, $N_2 = \frac{6Q}{28}$ och

$N_3 = \frac{9Q}{28}$ — med dessa stångkrafter får vi ur (1) att $V = \frac{5Q}{14}$

Lösning 2a: Hookes lag, se t.ex formelsamling sid 14 eller H Lundh ekv 10–10-15, ger

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\right] = 200\ \text{MPa}$$

Analogt fås $\sigma_y = 0\ \text{MPa}$ och $\sigma_z = 100\ \text{MPa}$. För skjuvspänningarna gäller $\tau_{ij} = G\gamma_{ij}$ där $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

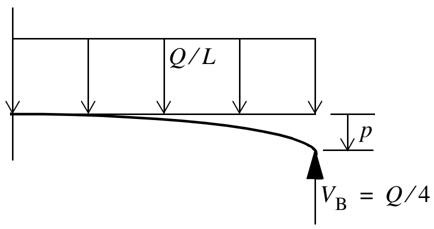
är skjuvmodulen; vi får $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0\ \text{MPa}$ samt $\tau_{xz} = 80\ \text{MPa}$.

Lösning 2b: Största skjuvspänningen fås som halva skillnaden mellan största och minsta egenvärdet till spänningstensorn, se Lundh ekv 9–6,38. Med siffervärden i MPa får vi här

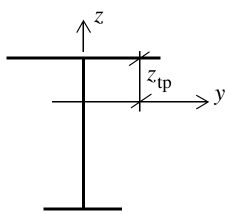
$$\det(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{I}\sigma_i) = \det\left(\begin{bmatrix} (200-\sigma_i) & 0 & 80 \\ 0 & -\sigma_i & 0 \\ 80 & 0 & (100-\sigma_i) \end{bmatrix}\right) = -\sigma_i(200-\sigma_i)(100-\sigma_i) + \sigma_i \cdot 80^2 = 0$$

och finner rötterna $\sigma_1 \approx 244\ \text{MPa}$, $\sigma_2 \approx 56\ \text{MPa}$ och $\sigma_3 = 0\ \text{MPa}$. Alltså: $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \approx 122\ \text{MPa}$

Lösning 3a: Vertikal jämvikt ger att fjäderkraften måste bli $V_B = \frac{Q}{4}$. Balkändens utböjning kan beräknas med elementarfall, t.ex formelsamling sid 10: $p = \frac{\frac{Q}{L}L^4}{8EI} - \frac{V_B L^3}{3EI} = \frac{QL^3}{24EI}$. Fjäderns hoptryckning blir $\delta = \frac{V_B}{k}$. Kompatibilitet, dvs $\delta = p$, ger då $k = \frac{6EI}{L^3}$



Lösning 3b: Normalspänningen fås med Naviers formel, Lundh ekv 7–91, som $\sigma = \frac{M_y z}{I_y}$. Vi måste här placera origo i tvärsnittets yt–tyngdpunkt. Låt z_{tp} vara avståndet från överkant till denna punkt; statiskt moment m a p en axel parallell med övre flänsen blir



$$z_{tp}A = \frac{Ht}{2}\cdot H + Ht\cdot\frac{H}{2} + Ht\cdot 0$$

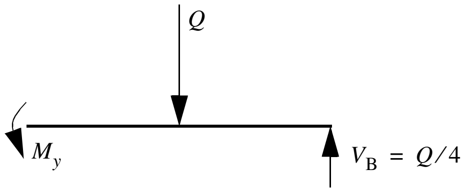
där $A = \frac{5Ht}{2}$ är tvärsnittsarean. Vi får alltså $z_{tp} = \frac{2H}{5}$. Areatröghetsmomentet m a p y–axeln blir då (Steiners sats, Lundh ekv 7–42)

$$I_y = \frac{(H/2)t^3}{12} + \frac{Ht}{2}\cdot(H-z_{\text{tp}})^2 + \frac{tH^3}{12} + Ht\cdot\left(\frac{H}{2}-z_{\text{tp}}\right)^2 + \frac{Ht^3}{12} + Ht\cdot z_{\text{tp}}^2 \approx \frac{13H^3t}{30}$$

där vi försummat termer som är kubiska i t $(t \ll H)$.

Momentet i snittet intill inspänningen blir

$M_y = Q\cdot\frac{L}{2} - V_B\cdot L = \frac{QL}{4}$ och den till beloppet största spänningen i snittet fås där z–koordinaten har (till belopp) maximum, d v s i tvärsnittets underkant:



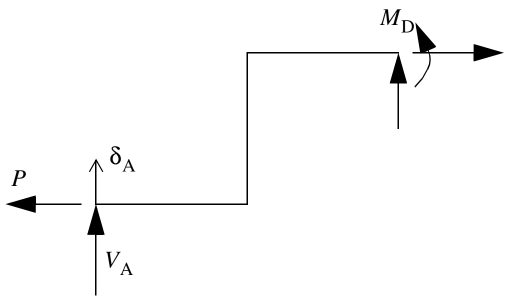
$z = -H + z_{\text{tp}} = \frac{-3H}{5}$. Vi får

$$\sigma = \frac{M_y z}{I_y} = \frac{\left(\frac{QL}{4}\right)\left(\frac{-3H}{5}\right)}{\frac{13H^3t}{30}} = \frac{-9QL}{26H^2t}$$

(d v s en tryckspänning i undre flänsen).

Lösning 4: Frilägg strukturen och ställ upp momentjämvikt kring **D**

$$M_D = PL + 2V_AL \tag{4}$$

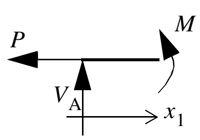


Vi behöver bestämma V_A, men problemet är statiskt obestämt så jämviktsekvationer räcker inte till. Istället beräknar vi förskjutningen δ_A i kraften V_A:s riktning — villkoret $\delta_A = 0$ kommer att ge oss V_A. Använd Castiglianos 2:a sats (Lundh ekv 15–96):

$\delta_A = \frac{\partial W}{\partial V_A}$, där den elastiska energin ges av $W = \int_0^{3L} \frac{M^2}{2EI}\,ds$ om enbart böjdeformationer beaktas (s är en koordinat längs ramen), se Lundh ekv 15–44. Vi har då

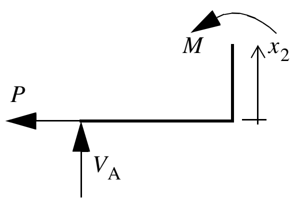
$$\delta_A = \int_0^{3L} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial V_A}\,ds \tag{5}$$

Låt nu x_1 vara en koordinat från **A** mot **B** och snitta genom delen. Momentjämvikt kring en axel genom snittet ger

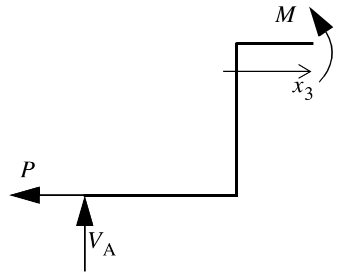


$$M = V_A x_1 \qquad \frac{\partial M}{\partial V_A} = x_1 \tag{6}$$

Låt x_2 vara en koordinat från **B** mot **C** och snitta genom delen; momentjämvikt ger



$$M = V_A L + P x_2 \qquad \frac{\partial M}{\partial V_A} = L \tag{7}$$



Låt x_3 vara en koordinat från **C** mot **D** och snitta genom delen; momentjämvikt ger

$$M = V_A(L + x_3) + PL \qquad \frac{\partial M}{\partial V_A} = L + x_3 \tag{8}$$

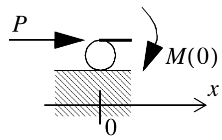
Insättning av ekv (6)–(8) i (5) ger

$$\delta_A = \frac{1}{EI}\left(\int_0^L V_A x_1^2 dx_1 + \int_0^L (V_A L^2 + PLx_2)dx_2 + \int_0^L (V_A(L+x_3)^2 + PL(L+x_3))dx_3\right) = \frac{1}{EI}\left(2PL^3 + \frac{11 V_A L^3}{3}\right)$$

så villkoret $\delta_A = 0$ leder till $V_A = \frac{-6P}{11}$, vilket insatt i (4) ger oss $M_D = \frac{-PL}{11}$

Lösning 5a: Med $k = 0$ har vi Eulers 2a knäckfall, för vilket kritisk last är $P_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$. Då $k \to \infty$ fås Eulers 3e fall där $P_{kr} \approx \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}$. Med $0 < k < \infty$ måste kritisk kritiska lasten hamna mellan dessa värden: $\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{kr} < \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}$

Lösning 5b: Balkens utböjning ges av $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$ där A, B, C och D bestäms av randvillkoren och $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, se Lundh ekv 8–66. Vid vänser ände, $x = 0$, är utböjning förhindrad och snittmomentet $M(0) = 0$, så med $M = -EIw''$ har vi de två villkoren

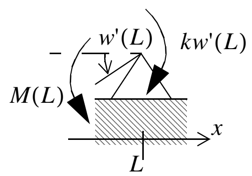


$$w(0) = 0 \Rightarrow A + C = 0$$
$$w''(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

så $A = C = 0$ och $w(x) = Bx + D\sin(nx)$.

Vid $x = L$ gäller $w(L) = 0$ som ger

$$BL + D\sin(nL) = 0 \tag{9}$$



och att momentjämvikt kräver $M(L) = kw'(L)$, som med $M = -EIw''$ ger randvillkoret $w''(L) + \frac{k}{EI}w'(L) = 0$, d v s

$$-Dn^2\sin(nL) - B\frac{k}{EI} + D\frac{nk}{EI}\cos(nL) = 0 \tag{10}$$

Ur (9) fås $B = \frac{-D}{L}\sin(nL)$ som insatt i (10) ger $\frac{D}{L^2}\left(\frac{kL}{EI}nL\cos(nL) - \frac{kL}{EI}\sin(nL) - (nL)^2\sin(nL)\right) = 0$. $D = 0$ ger $B = 0$ och den triviala lösningen $w \equiv 0$. Icke–triviala lösningar kräver att uttrycket inom parentes är noll; med $k = \frac{EI}{L}$ fås då knäckekvationen $\tan(nL) = \frac{nL}{1 + (nL)^2}$, där lägsta positiva rot ger

knäcklasten: $P_{\mathrm{kr}} = \frac{EI}{L^2}(nL)^2$.

(Numerisk lösning ger $nL \approx 3{,}405$ så $P_{\mathrm{kr}} \approx 11{,}594\frac{EI}{L^2} \approx \frac{1{,}17\pi^2 EI}{L^2}$, d v s knäcklasten är ca 17% högre än

för Eulers 2a knäckfall ($k = 0$)).