Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

20 AUGUSTI 2011

Tid och plats: 14.00—18.00 i V–huset. Lärare besöker salen ca 15.00 samt 16.30

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler 22/8. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2011) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

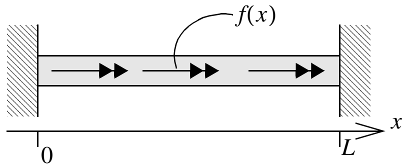
Resultatlista: Anslås **senast** 30/8 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 6/9.

Granskning: Tisdag 30/8 12–13 samt tisdag 6/9 12–13 på inst. (2a våningen (plan 3) i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En axel med längd L är tillverkad av ett lineärt elastiskt material, skjuvmodul G, och har ett massivt cirkulärt tvär-snitt med diameter $d = 10\ \mathrm{mm}$. Axelns båda ändar hålls fixe-



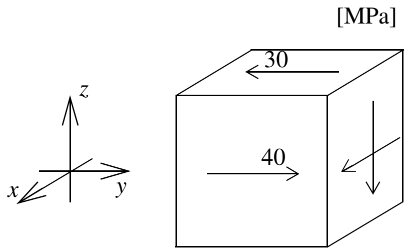
rade och ett distribuerat vridande moment $f(x) = \dfrac{f_0 x}{L}$ (moment/längd) anbringas.

a: Bestäm det vridande snittmomentet $M_v(x)$ (3p)

b: Då det största snittmomentet uppgår till $|M_v|_{max} = 225\ \mathrm{Nm}$ fås begynnande plasticering. Bestäm materialets sträckgräns σ_s om det kan antas följa von Mises flythypotes. (2p)

2.

Figuren återger det beräknade spänningstillståndet i en punkt i en belastad elastisk kropp.

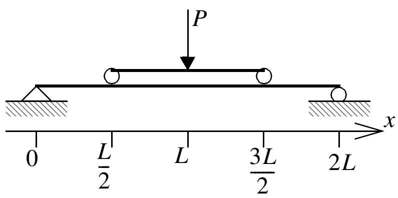


a: Bestäm den största skjuvspänning som uppträder i (något plan genom) punkten. (3p)

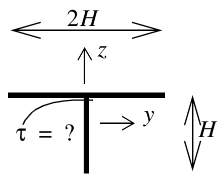
b: Beräkna normal– och skjuvspänning på det plan, genom punkten, som har normalen $n = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$ (2p)

3.

På en fritt upplagd balk med längden $2L$ vilar, via ett par cylin-driska rullar, en annan balk som har längden L. Mitt på den övre balken angriper en kraft P. Båda balkarna är lineärt elas-tiska med böjstyvheten EI och konstruktionen är symmetrisk (se figur).



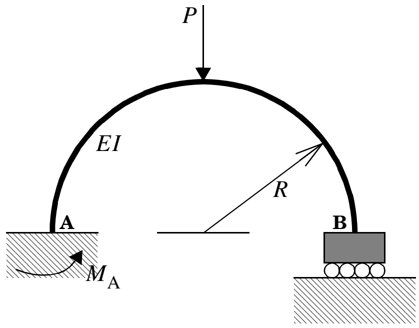
a: Bestäm moment $M(x)$ och tvärkraft $T(x)$ i den undre balken. (2p)



b: Den undre balken har ett T–tvärsnitt med livhöjd H, flänsbredd $2H$ och godstjocklek $t \ll H$. Bestäm skjuvspänningen τ i övergången mellan liv och fläns. (3p)

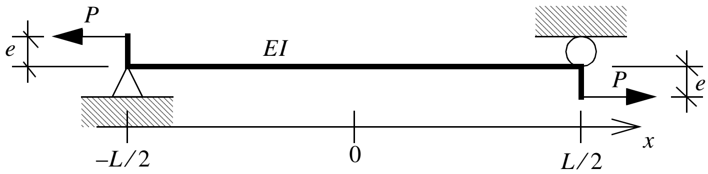
4.

En halvcirkelbåge med krökningsradien R och konstant böjstyvhet EI, belastas på hjässan med en kraft P enligt figuren. Bågens ena ände (**A**) är fast inspänd, medan vid andra änden (**B**) är rotation och vertikalförskjutning förhindrad. Bestäm stödmomentet M_A. (Skjuv– och axialdeformationer får försummas). (5p)



5.

En balk med längden L och konstant böjstyvhet EI belastas med ett dragande kraftpar P. Krafternas verkningslinjer är parallella med balkens medellinje och ligger på avståndet $e \ll L$ från denna, enligt figuren. Bestäm balkens utböjning $w(x)$; ta hänsyn till inverkan av axialkraften i balken (5p)



Lösning 1a: Snittmomentet fås som $M_v(x) = GK\frac{d\varphi}{dx}$, där φ är axelns vridningsvinkel och vridstyvheten GK i detta fall är konstant (se formelsamling sid 2). Vridningsvinkeln är lösningen till

$-\frac{d}{dx}\left[GK\frac{d\varphi}{dx}\right] = \frac{f_0 x}{L}$; vi får $\varphi(x) = A + Bx - \frac{f_0 x^3}{6GKL}$. Randvillkoren $\varphi(0) = 0$ och $\varphi(L) = 0$ ger integrationskonstanterna $A = 0$ samt $B = \frac{f_0 L}{6GK}$. Man finner alltså

$$M_v(x) = GK\frac{d\varphi}{dx} = GK\left(B - \frac{f_0 x^2}{2GKL}\right) = \frac{f_0 L}{6}\left(1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

Lösning 1b: Vid vridning fås begynnande plasticering då maximal skjuvspänning uppgår till sträckgränsen vid ren skjuvning: $\tau_{max} = \tau_s$. Hans Lundh ekv 6–14 ger då $\tau_s = \frac{16M_v}{\pi d^3}$. Effektivspänningen vid ren skjuvning är, enligt von Mises hypotes, $\sigma_e = \sqrt{3}\tau$ och plasticering fås då denna når sträckgränsen (vid dragning) σ_s. Vi har alltså

$$\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s = \frac{16\sqrt{3}M_v}{\pi d^3} \approx 1{,}98 \text{ GPa}$$

Lösning 2a: Största skjuvspänningen i en punkt beräknas enklast som halva skillnaden mellan största och minsta huvudspänning i punkten. Huvudspänningingarna fås som egenvärdena till

spänningstensorn $S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & 0 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$ (Lundh ekv 9–6, 37); rötterna till

$\det(S - \sigma I) = 0$ ger oss huvudspänningarna $\sigma_1 = 50\ \mathrm{MPa}$, $\sigma_2 = 0\ \mathrm{MPa}$ samt $\sigma_3 = -50\ \mathrm{MPa}$, så

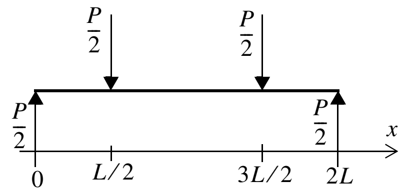
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 50\ \mathrm{MPa}$$

Lösning 2b: De efterfrågade spänningskomponenterna får genom att projicera spänningsvektorn $s = Sn$ (Lundh ekv 9–28, 29, 31) på normalen respektive planet. Här fås

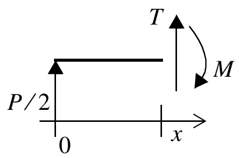
$$s = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [\mathrm{MPa}]$$

så $\sigma = \tau = 0$ (den givna normalvektorn är egenvektorn hörande till egenvärdet $\sigma_2 = 0\ \mathrm{MPa}$)

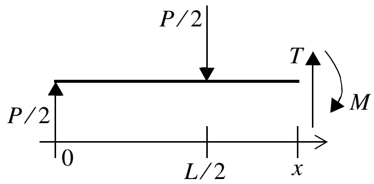
Lösning 3a: Av symmetriskäl inses att hälften av kraften P överförs vid vardera rullarna vid de yttre fjärdedelspunkterna, samt att de vertikala stödreaktionerna vid $x = 0$ och $x = 2L$ båda blir $P/2$ (den horisontella tvångskraften vid $x = 0$ blir 0, eftersom vi inte har någon horisontell belastning och balken är statiskt bestämd).



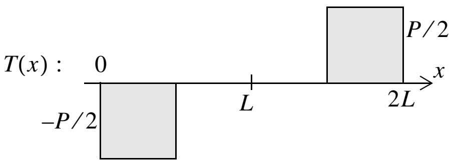
Snitta balken i intervallet $0 < x < \frac{L}{2}$. Vertikal kraftjämvikt ger $T = \frac{-P}{2}$; momentjämvikt ger $M = \frac{-Px}{2}$.

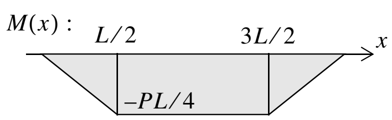


Snitta balken i intervallet $\frac{L}{2} < x < \frac{3L}{2}$. Kraftjämvikt ger $T = 0$; momentjämvikt ger $M = \frac{-PL}{4}$.

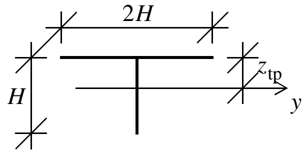


I intervallet $\frac{3L}{4} < x < 2L$ fås T och M ur symmetri.





Lösning 3b: I den del av balken där $T = 0$ är skjuvspänningen givetvis 0; där $T \neq 0$ fås skjuvspänningen som $\tau = \dfrac{TS_{A^*}}{I_y t}$ (Lundh ekv 7–48).



För att beräkna statiska momentet S_{A^*} och yttröghetsmomentet I_y, måste vi först hitta tvärsnittets yttyngdpunkt. Statiska momentet m.a.p en axel genom flänsen ger: $z_{\text{tp}} \cdot 3Ht = Ht \cdot \dfrac{H}{2} + 2Ht \cdot 0 \Rightarrow z_{\text{tp}} = \dfrac{H}{6}$

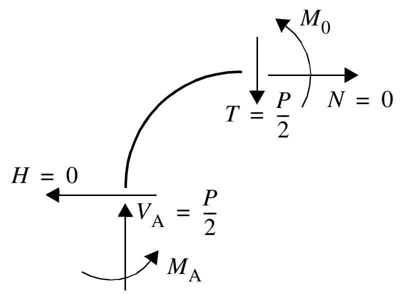
Den utsnittade bitens (dvs flänsen) statiska moment map. y–axeln blir då $S_{A^*} = 2Ht \cdot z_{\text{tp}} = \dfrac{H^2 t}{3}$

Areatröghetsmomentet blir (Steiners sats, Lundh ekv 7–42)

$I_y = \dfrac{tH^3}{12} + Ht \cdot \left(\dfrac{H}{2} - z_{\text{tp}}\right)^2 + \dfrac{Ht^3}{12} + 2Ht \cdot z_{\text{tp}}^2 \approx \dfrac{H^3 t}{4}$ (de två första termerna är bidraget från livet, och t^3–termen försummas ($t \ll H$)).

Med $T = \dfrac{P}{2}$ får vi då $\tau = \dfrac{2P}{3Ht}$.

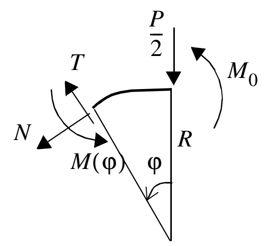
Lösning 4: Av symmetrin följer att de vertikala stödreaktionerna vid **A** och **B** båda är $\dfrac{P}{2}$ och att de båda stödmomenten är lika men motriktade; vidare ger horisontell kraftjämvikt att den horisontella stödreaktionen vid **A** är noll.



Snitta genom hjässan omedelbart till vänster om kraften och betrakta den vänstra kvarts–cirkeln. Jämvikt ger att normalkraften är $N = 0$ och tvärkraften blir $T = \dfrac{P}{2}$. Momentjämvikt kring **A** ger:

$$M_{\text{A}} = \frac{PR}{2} - M_0 \tag{1}$$

Snittmomentet M_0 är obekant, men vi kan med Castiglianos andra sats beräkna den associerade rotationen (vinkeln) θ; av symmetriskäl måste denna vinkel vara noll, vilket ger oss ett villkor ur vilket M_0 kan beräknas.

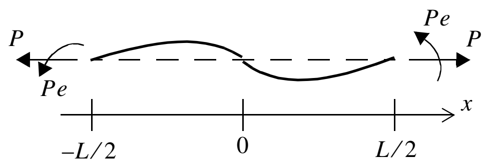


Snittmomentet i bågen blir $M(\varphi) = \dfrac{PR}{2}\sin(\varphi) - M_0$, så $\dfrac{\partial M}{\partial M_0} = -1$. Vi har då (Lundh ekv 15–97) med den elastiska energin $W = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} R d\varphi$

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial M_0} = \frac{\partial W}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial M_0} = \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_0} R d\varphi = \frac{R}{EI}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{PR}{2}\sin(\varphi) - M_0\right)(-1)d\varphi = \frac{R}{EI}\left(\frac{\pi M_0}{2} - \frac{PR}{2}\right)$$

Villkoret $\theta = 0$ ger då $M_0 = \dfrac{PR}{\pi}$ — insättning i (1) ger då $M_{\text{A}} = \dfrac{\pi - 2}{2\pi} PR$

Lösning 5: Balkens utböjning $w(x)$ ges av lösningen till $w^{iv} - n^2 w'' = 0$, $n^2 = \frac{P}{EI}$, jmf. Lundh ekv 8–63. Den karateristiska ekvationen $r^4 - n^2 r^2 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = 0$,



$r_{3,4} = \pm n$ så lösningen är $w(x) = A + Bx + C\cosh(nx) + D\sinh(nx)$. Integrationskonstanterna bestäms av randvillkoren; beräkningen förenklas om man inser att utböjningen är anti–symmetrisk, $w(x) = -w(-x)$, så vi måste ha $A = C = 0$. Randvillkoret $w\left(\frac{L}{2}\right) = 0$ (eller $w\left(\frac{-L}{2}\right) = 0$) ger

$$\frac{BL}{2} + D\sinh\left(\frac{nL}{2}\right) = 0$$

Vidare har vi att snittmomentet $M\left(\frac{L}{2}\right) = -Pe$ (eller $M\left(\frac{-L}{2}\right) = Pe$) som tillsammans med sambandet $M = -EIw''$ (Lundh ekv 7–65) ger

$$w''\left(\frac{L}{2}\right) = n^2 e \Rightarrow Dn^2 \sinh\left(\frac{nL}{2}\right) = n^2 e$$

Man finner $B = \frac{-2e}{L}$ och $D = \frac{e}{\sinh\left(\frac{nL}{2}\right)}$, så $w(x) = e\left(\frac{\sinh(nx)}{\sinh\left(\frac{nL}{2}\right)} - 2\frac{x}{L}\right)$