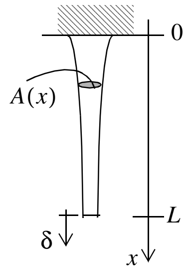
Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081
30 MAJ 2011

Tid och plats:	8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.00
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler, plan 3 i norra trapphuset, Nya M–huset, 31/5. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2011) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 13/6 2011 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 17/6.
Granskning:	Torsdag 16/6 $10^{\underline{00}}$–$12^{\underline{00}}$ samt tisdag 30/8 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (plan 3 i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.



Beräkna förlängningen δ av en stång med längden L som enbart belastas med sin egentyngd, då den hänger fritt från ett tak. Materialet är lineärt elastiskt med elasticitetsmodul E och densitet (masstäthet) ρ. Tvärsnittsarean är cirkulär och varierar enligt $A(x) = A_0 e^{\left(\frac{-kx}{L}\right)}$, där $k > 0$ är en dimensionslös konstant. (5p)

2.

I en lineärt elastisk kropp, elasticitetsmodul $E = 240\ \mathrm{GPa}$, Poissons tal $\nu = 1/3$ och sträckgräns $\sigma_s = 200\ \mathrm{MPa}$, har spänningarna i en punkt beräknats till

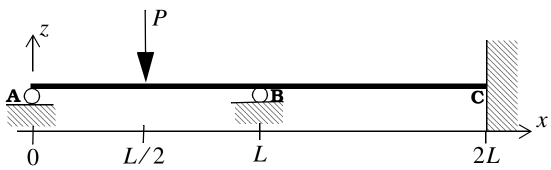
$$\sigma_x = 140\ \mathrm{MPa} \qquad \sigma_y = 80\ \mathrm{MPa} \qquad \sigma_z = 140\ \mathrm{MPa}$$
$$\tau_{xy} = 0 \qquad \tau_{xz} = 40\ \mathrm{MPa} \qquad \tau_{yz} = 0$$

a: Beräkna den relativa volymökningen, dvs den volymetriska töjningen $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, i punkten (2p)

b: Bestäm säkerheten mot plasticering, $s = \dfrac{\sigma_s}{\sigma_e}$, enligt Trescas hypotes (2p)

c: Hur stor är den största skjuvspänningen (i något plan) i punkten? (1p)

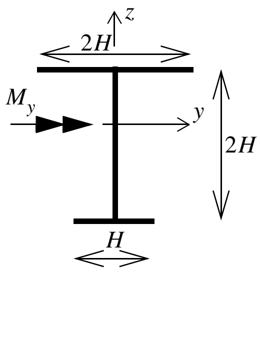
3.



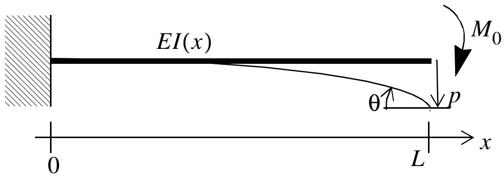
En balk **ABC** har längden $2L$ och konstant böjstyvhet EI. Dess vänstra ände är rullagrad medan högra änden är fast inspänd; vid **B** stöds balken av ytterligare en rullagring, så att två lika långa spann bildas. Mitt på det vänstra spannet belastas konstruktionen av en nedåt riktad kraft P.

a: Beräkna det böjande momentet i balken vid $x = L/2$ (dvs under kraften P). (3p)

b: I ett visst snitt blir det böjande momentet $M_y = \dfrac{-11PL}{56}$. Beräkna den till beloppet största normalspänningen, $|\sigma|_{max}$, i snittet. Tvärsnittet är enkelsymmetriskt och tunnväggigt med godstjocklek $t \ll H$; form och dimensioner i övrigt framgår av figuren till höger. (2p



4.



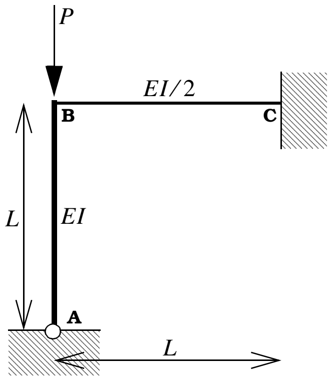
En konsolbalk med längden L belastas i sin fria ände med ett moment M_0. Tvärsnittet är rektangulärt, där bredden varierar lineärt så att böjstyvheten blir

$EI(x) = EI_0\left(2 - \frac{x}{L}\right)$, där E är det lineärt elastiska materialets elasticitetsmodul och I_0 är areatröghetsmomentet vid $x = L$. Beräkna

a: konsoländens rotation θ (2p)

b: konsoländens utböjning p (3p)

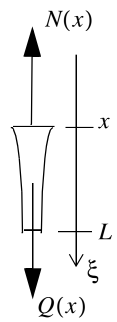
5.



Ramen **ABC** består av en pelare **AB** med längden L och böjstyvheten EI, samt en horisontell balk **BC** med längd L och böjstyvhet $\frac{EI}{2}$. Balken är fast inspänd vid **C**, medan pelaren är ledad vid golvet **A** och belastas med en tryckande axialkraft P. Axialdeformationer (längdändringar) kan försummas.

a: Ange med tydlig motivering en övre och en undre gräns för den kritiska lasten P_{kr}, med avseende på elastisk instabilitet. (1p)

b: Härled knäckekvationen, dvs en ekvation vars lösning ger kritisk last med avseende på elastisk instabilitet, för konstruktionen. (4p)



Lösning 1: Snitta genom stången vid en godtycklig koordinat x — egentyngden för delen nedanför snittet blir $Q(x) = \rho g\int_x^L A(\xi)d\xi = \frac{\rho g L A_0}{k}\left(e^{\frac{-kx}{L}} - e^{-k}\right)$. Från jämvikt får vi att normalkraften $N(x) = Q(x)$. Om den axiella förskjutningen betecknas $u(x)$ har vi vidare

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N(x)}{EA(x)} = \frac{\rho g L}{kE}\left(1 - e^{-k}e^{\frac{kx}{L}}\right)$$

Vi får nu stångförlängningen som $\delta = \int_0^L \frac{du}{dx}dx = \frac{\rho g L^2}{k^2 E}(k - 1 + e^{-k})$.

Alternativt: Lösning av randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[EA\dfrac{du}{dx}\right] = \rho g A & 0 < x < L \\ u(0) = 0 \qquad \left.\dfrac{du}{dx}\right|_{x = L} = 0 \end{cases}$$

ger $u(x) = \dfrac{\rho g L}{kE}\left(x - \dfrac{L}{k}\mathrm{e}^{\frac{k(x-L)}{L}} + \dfrac{L}{k}\mathrm{e}^{-k}\right)$, varefter vi får $\delta = u(L)$

Lösning 2a: Hookes lag för axiella töjningar (Lundh ekv 10–7,8,9 eller formelsamling sid 14) ger

$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$ och analoget för töjningskomponenterna ε_y och ε_z. Vi får då

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 2\nu(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)) = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$$

(Notera att med $\nu = 0{,}5$ så blir den volymetriska töjningen noll — inkompressibilitet)

Lösning 2b: Effektivspänningen enligt Tresca, är skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen (Lundh ekv 12–14, formelsamling sid 14). Huvudspänningarna fås som egenvärdena

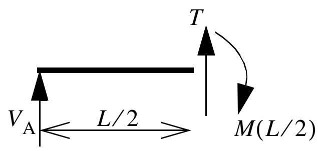
till spänningstensorn $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$, där $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Med $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$ fås

$$\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_{xz}^2(\sigma_y - \sigma) = 0$$

som har rötterna $\sigma_1 = 180\ \mathrm{MPa}$, $\sigma_2 = 100\ \mathrm{MPa}$ och $\sigma_3 = 80\ \mathrm{MPa}$. Vi får då $s = \dfrac{\sigma_s}{\sigma_e} = \dfrac{\sigma_s}{\sigma_1 - \sigma_3} = 2$

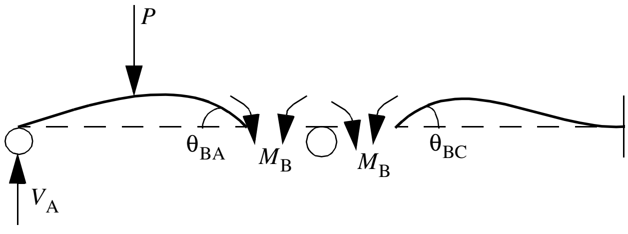
Lösning 2c: Maximal skjuvspänning i en punkt, fås som halva skillnaden mellan största och minsta huvudspänning (radien i den största av Mohrs spänningcirklar): $\tau_{max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 50\ \mathrm{MPa}$

Lösning 3a: Snitta omedelbart till vänster om lasten, låt V_A beteckna stödreaktionen vid **A**, och betrakta vänstra delen: momentjämvikt ger



$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{-V_A L}{2} \tag{1}$$

Vi behöver hitta V_A. Det finns flera sätt på vilka vi kan beräkna stödkraften mha elementarfall; här visas ett förslag. Låt M_B vara snittmomentet i balken vid stödet **B**. Balkens rotation omedelbart till vänster, θ_{BA}, och till höger, θ_{BC}, om mittstödet fås ut formelsamlingen sid 9 respektive 11.



$$\theta_{BA} = \frac{M_B L}{3EI} - \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\theta_{BC} = \frac{M_B L}{4EI}$$

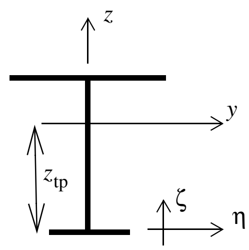
Kompatibilitetsvillkoret $\theta_{BA} + \theta_{BC} = 0$ ger att $M_B = \dfrac{3PL}{28}$. Momentjämvikt kring **B** för den vänstra halvan i figuren ger nu att $M_B + V_A L - P\frac{L}{2} = 0$, varur vi löser $V_A = \frac{11P}{28}$. Ekvation (1) ger då

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{-11PL}{56}$$

Lösning 3b: Normalspänningen pga ett böjande moment M_y fås som (Lundh ekv 7–91) $\sigma = \frac{M_y z}{I_y}$.

Här är M_y givet, men vi måste hitta tvärsnittets yttyngdpunkt för att kunna beräkna areatröghetsmomentet I_y samt hitta $|z|_{\max}$.

Tyngdpunkten ligger på symmetrilinjen; för hitta dess läge i z–led beräknas statiska momentet map på en referensaxel η:



$$S_\eta = \int_A \zeta dA = A \cdot z_{tp} = 2Ht \cdot 2H + 2Ht \cdot H + Ht \cdot 0$$

(De tre termerna i högerledet är bidragen från i tur och ordning: övre flänsen, livet och undre flänsen). Med tvärsnittsarean $A = 5Ht$ fås då $z_{tp} = \frac{6H}{5}$ och vidare $|z|_{\max} = z_{tp}$.

Areatröghetsmomentet map y–axeln fås mha Steiners sats (Lundh ekv 7–42):

$$I_y = \frac{2Ht^3}{12} + 2Ht \cdot (2H - z_{tp})^2 + \frac{t(2H)^3}{12} + 2Ht \cdot (z_{tp} - H)^2 + \frac{Ht^3}{12} + Ht \cdot z_{tp}^2$$

där de två första termerna är bidraget från övre flänsen, de två sista termerna är bidraget från undre flänsen och termerna 3 och 4 härrör från livets bidrag. Om vi beaktar att $t \ll H$ kan vi försumma de 2 termer som är kubiska i t, jämfört med de övriga termerna (som är lineära i t) och får

då $I_y \approx \frac{52H^3t}{15}$. Alltså: $|\sigma|_{\max} = \sigma_{\max} = \frac{\left(\frac{-11PL}{56}\right) \cdot \left(\frac{-6H}{5}\right)}{\frac{52H^3t}{15}} = \frac{99PL}{1456H^2t}$ (dragspänning i undre flänsen).

Lösning 4: De sökta kan t.ex beräknas med Castiglianos 2a sats (Lundh ekv 15–96,97) som

$p = \frac{\partial W_i}{\partial P}$ respektive $\theta = \frac{\partial W_i}{\partial M_0}$, där $P = 0$ är en kraft i den sökta förskjutningens (p) riktning och

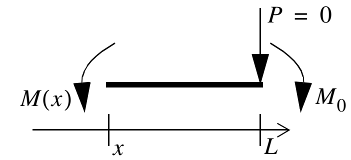
$W_i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$ är den elastiska energin pga böjning. Vi har då att

$$p = \frac{\partial W_i}{\partial P} = \int_0^L \frac{\partial}{\partial P}\left[\frac{M^2}{2EI}\right] dx = \int_0^L \frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{M^2}{2EI}\right]\frac{\partial M}{\partial P} dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P} dx \qquad (2)$$

och på samma sätt

$$\theta = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_0} dx \qquad (3)$$

Jämvikt ger att $M(x) = M_0 + P(L-x)$, så $\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$ och $\frac{\partial M}{\partial P} = (L-x)$.



Insättning i ekv (3) (med $P = 0$) ger nu

$$\theta = \frac{M_0}{EI_0}\int_0^L \frac{1}{\left(2-\frac{x}{L}\right)}dx = \frac{-M_0 L}{EI_0}\left[\ln\left(2-\frac{x}{L}\right)\right]_0^L = \underline{\frac{M_0 L\ln(2)}{EI_0}}$$

Ur ekv (2) får vi $p = \frac{M_0 L}{EI_0}\int_0^L \frac{\left(1-\frac{x}{L}\right)}{\left(2-\frac{x}{L}\right)}dx$. Variabelsubstitutionen $\xi = 1-\frac{x}{L}$, $dx = -Ld\xi$, ger

$$p = \frac{M_0 L^2}{EI_0}\int_0^1 \frac{\xi}{1+\xi}d\xi = \{\text{matte-tabell}\} = \frac{M_0 L^2}{EI_0}[\xi - \ln(1+\xi)]_0^1 = \underline{(1-\ln(2))\frac{M_0 L^2}{EI_0}}$$

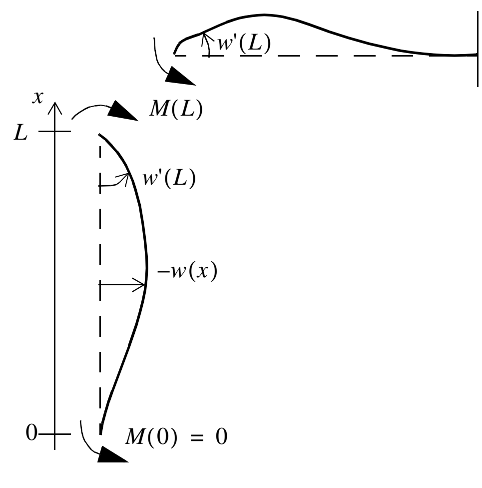
Alternativt: Sambandet mellan moment och krökning, $M = EI\kappa$, samt utböjning och krökning, $w'' = -\kappa$ (transversalförskjutningen w är positiv uppåt), ger tillsammans med $M(x) = M_0$ (konstant) att $w'' = \frac{-M_0}{EI_0\left(2-\frac{x}{L}\right)}$ integration och randvillkoren $w'(0) = 0$ samt $w(0) = 0$ ger

$$w'(x) = \frac{M_0 L}{EI_0}\ln\left(1-\frac{x}{2L}\right)$$
$$w(x) = \frac{M_0 L}{EI_0}\left[(x-2L)\ln\left(1-\frac{x}{2L}\right)-x\right]$$

De sökta fås nu som $\theta = -w'(L)$ respektive $p = -w(L)$

Lösning 5a: Om delarna **AB** och **BC** var ledade till varandra vid **B**, hade vi en vekare struktur och pelaren skulle knäcka som en ‘Euler 2a’, $P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$. Om istället delen **BC** var mycket böjstyv så att rotation vid **B** var förhindrad, skulle vi ha en styvare struktur och pelaren skulle fungera som en ‘Euler 3a’, $P_{\text{kr}} \approx \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}$. Den kritiska lasten för den givna stukturen måste ligga mellan dessa två: $\underline{\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{\text{kr}} < \frac{2{,}05\pi^2 EI}{L^2}}$

Lösning 5b: Den tryckta balkens (pelarens) utböjning är $w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx)$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ (se Lundh ekv 8–66). Med x–axeln enligt figuren har vi att utböjning och moment är noll vid $x = 0$ och eftersom $M = -EIw''$ kan vi skriva



$$w(0) = 0,\quad w''(0) = 0 \tag{4}$$

Vid $x = L$ har vi

$$w(L) = 0 \tag{5}$$

(axialdeformationer försummas), medan det andra villkoret fås genom att beakta samband mellan moment och vinkel för delen **BC**: formelsamlingen sid 11 ger $w'(L) = \dfrac{M(L)L}{4\frac{EI}{2}}$, så med $M(L) = -EIw''(L)$ får vi

$$w''(L) + \frac{2}{L}w'(L) = 0 \qquad (6)$$

Randvillkoren ekv (4) ger direkt att $A = C = 0$, så $w(x) = Bx + D\sin(nx)$; ekv (5) leder då till $B = -D\dfrac{\sin(nL)}{L}$ och alltså $w(x) = D\left(\sin(nx) - \dfrac{\sin(nL)}{L}x\right)$. Randvillkoret ekv (6) ger nu

$$D\left(-n^2\sin(nL) - \frac{2}{L^2}\sin(nL) + \frac{2n}{L}\cos(nL)\right) = 0$$

Med $D = 0$ fås den triviala lösningen $w \equiv 0$; icke–triviala lösningar kräver att uttrycket inom parentesen är noll. Om vi bryter ut en faktor $\dfrac{\cos(nL)}{L^2}$ fås knäckekvationen

$2nL - (2 + (nL)^2)\tan(nL) = 0$ eller $\underline{\underline{\tan(nL) = \dfrac{2nL}{2 + (nL)^2}}}$

(Lägsta positiva roten fås numeriskt till $nL \approx 3.591$, vilket ger $P_{\mathrm{kr}} = (nL)^2\dfrac{EI}{L^2} \approx \dfrac{12{,}895 \cdot EI}{L^2} \approx \dfrac{1{,}31 \cdot \pi^2 EI}{L^2}$ (jmf deluppgift a)).