Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

11 JANUARI 2011

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.00

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.
2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.
4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler 12/1. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2010) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

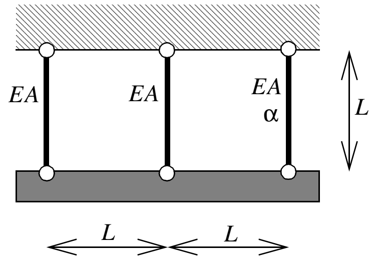
För att få poäng på en uppgift vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås **senast** 19/1 2011 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 24/1.

Granskning: Torsdag 20/1 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt fredag 21/1 $12^{\underline{30}}$–$13^{\underline{30}}$ på inst. (2a våningen i norra trapphuset, nya M–huset).

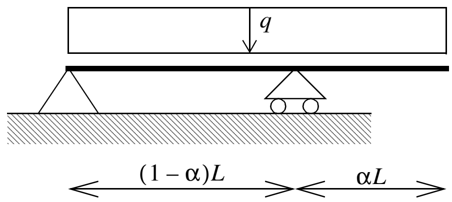
Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.



En stel, viktlös, platta hänger i tre stänger, alla med samma elasticitetsmodul E och tvärsnittsarea A, från ett stelt tak. Temperaturen i den högra stången höjs med ΔT. Värmeutvidgningskoefficienten är α. Bestäm spänningarna i stängerna till följd av uppvärmningen. (5p)

2.



En fritt upplagd balk enligt figur är belastad endast av sin egenvikt q (kraft/längd). Det högra stödet är flyttbart. Bestäm α så att det till beloppet största böjmomentet i balken blir så litet som möjligt. (5p)

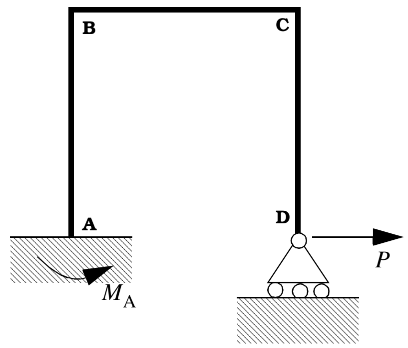
3.

I ett cartesiskt koordinatsysten (x, y, z) ges spänningarna i en viss punkt i en belastad elastisk kropp av spänningstensorn $S = \begin{bmatrix} 80 & 40 & 0 \\ 40 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 80 \end{bmatrix}$ MPa. Bestäm

a: huvudspänningarna i punkten (3p) samt

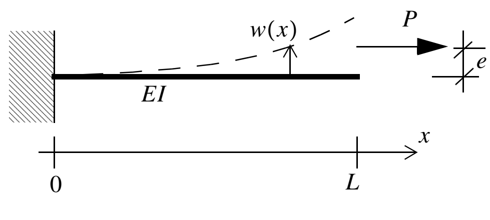
b: normal– och skjuvspänning i ett plan (genom punkten) med normalvektorn $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ (2p)

4.



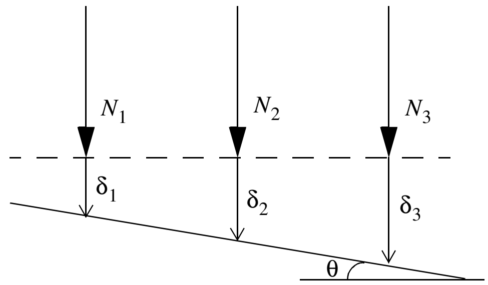
Ramen **ABCD** består av tre balkar som var och en har längden L och böjstyvheten EI. Konstruktionen är fast inspänd vid **A**; vid **D** är den rullagrad (vertikalförskjutning förhindrad) och belastad med en yttre kraft P. Bestäm inspänningsmomentet M_A vid **A**. (5P)

5.



En konsolbalk med böjstyvheten EI och längden L belastas av en dragande kraft P som verkar med excentriciteten $e \ll L$. Bestäm snittmoment i balken med hänsyn taget till utböjningen $w(x)$. Ledning: utböjningen fås som lösningen till $\frac{d^4 w}{dx^4} - n^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. (5p)

Lösning 1: Frilägg systemet; vertikal kraftjämvikt ger



$$N_1 + N_2 + N_3 = 0 \qquad (1)$$

medan momentjämvikt kring högra stångens infästning kräver

$$N_1 \cdot 2L + N_2 \cdot L = 0 \qquad (2)$$

Vi har 3 obekanta, men bara 2 jämviktsekvationer (systemet är statiskt obestämt). En tredje ekvation fås med hjälp av ett deformationssamband: eftersom plattan betraktas som stel måste vi ha

$\tan\theta = \dfrac{\delta_3 - \delta_1}{2L} = \dfrac{\delta_2 - \delta_1}{L}$ ur vilket vi löser

$$\delta_3 - 2\delta_2 + \delta_1 = 0 \qquad (3)$$

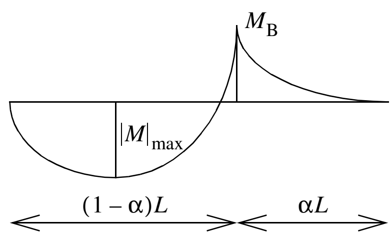
Förlängningarna av stång 1 och 2 blir (Lundh ekv 2–14) $\delta_1 = \dfrac{N_1 L}{EA}$ respektive $\delta_2 = \dfrac{N_2 L}{EA}$; den tredje stången påverkas förutom av en normalkraft också av en termisk expansion, så dess förlängning blir $\delta_3 = \dfrac{N_3 L}{EA} + \alpha \cdot \Delta T \cdot L$. Insättning av uttrycken för förlängningarna i ekv (3) ger nu

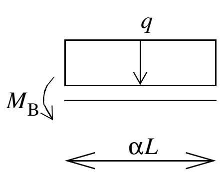
$$N_1 - 2N_2 + N_3 + \alpha EA \cdot \Delta T = 0 \qquad (4)$$

Ekv (1), (2) och 4 ger $N_1 = N_3 = \dfrac{-\alpha EA \cdot \Delta T}{6}$ och $N_2 = \dfrac{\alpha EA \cdot \Delta T}{3}$. Efter division med tvärsnittsytan A

fås de sökta spänningarna: $\underline{\sigma_1 = \sigma_3 = \dfrac{-\alpha E \cdot \Delta T}{6}, \sigma_2 = \dfrac{\alpha E \cdot \Delta T}{3}}$

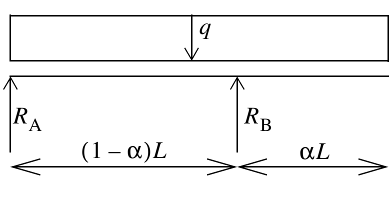
Lösning 2: Snittmomentet under en utbredd last med konstant intensitet varierar kvadratiskt. Man inser att minsta max–momentet fås då snittmomentet M_B vid högra stödet är lika med max–momentet $|M|_{max}$ i spannet mellan de 2 stöden.





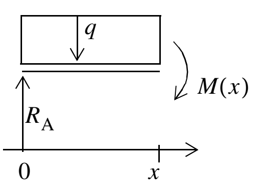
Snitta omedelbart till höger om det högra stödet; momentjämvikt kring snittet ger $M_B = q \cdot \alpha L \cdot \dfrac{\alpha L}{2} = \dfrac{q(\alpha L)^2}{2}$

Betrakta nu hela strukturen; momentjämvikt kring högra stödet ger oss den vertikala stödkraften vid vänstra stödet:



$$R_A \cdot (1-\alpha)L - qL \cdot \left[(1-\alpha)L - \frac{L}{2}\right] = 0 \Rightarrow R_A = \frac{qL(1-2\alpha)}{2(1-\alpha)}$$

Snittmomentet i spannet blir då $M(x) = \dfrac{qx^2}{2} - R_A x$. Extremväden fås där $\dfrac{dM}{dx} = 0: qx - R_A = 0 \Rightarrow x = \hat{x} = \dfrac{R_A}{q} = \dfrac{(1-2\alpha)}{2(1-\alpha)}L$, vilket ger



ett min eftersom $\frac{d^2M}{dx^2} = q > 0$. Vi har alltså $|M|_{\max} = -M(\hat{x}) = R_A\hat{x} - \frac{q\hat{x}^2}{2} = \frac{qL^2}{8}\cdot\frac{(1-2\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}$. Villkoret $|M|_{\max} = M_B$ ger nu

$$\frac{(1-2\alpha)^2}{8(1-\alpha)^2} = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow (1-2\alpha) = 2\alpha(1-\alpha) \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{2}}$$

Bivillkoret $0 < \alpha < 1$ gör att bara den lägsta roten kan vara gilltig: $\alpha = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}29$

Lösning 3a: Huvudspänningarna fås som egenvärdena till spänningstensorn. $\det(\boldsymbol{S} - \sigma\boldsymbol{I}) = 0$ ger

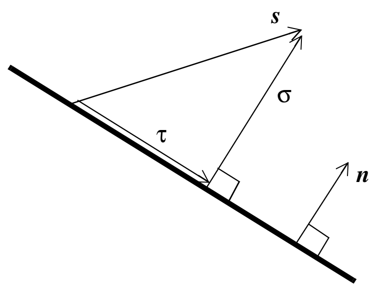
$$-\sigma(80-\sigma)^2 - 20^2(80-\sigma) - 40^2(80-\sigma) = 0$$

Man ser att en rot är $\sigma = 80\ \text{MPa}$. Efter division med $(80-\sigma)$ återstår $\sigma^2 - 80\sigma - (20^2 + 40^2) = 0$ med lösningen

$$\sigma = (40 \pm \sqrt{40^2 + (20^2 + 40^2)})\ \text{MPa} = \begin{cases} 100\ \text{MPa} \\ -20\ \text{MPa} \end{cases}$$

Huvudspänningarna i punkten är alltså $\sigma_1 = 100\ \text{MPa}$ $\quad \sigma_2 = 80\ \text{MPa}$ $\quad \sigma_3 = -20\ \text{MPa}$

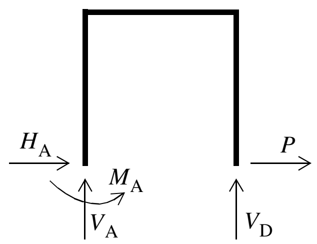
Lösning 3b: (Lundh avsnitt 9.2.3) Spänningen $\boldsymbol{s}$ på en yta med normalvektor $\boldsymbol{n}$ beräknas som $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}$. I vårt fall fås $\boldsymbol{s} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}160 & 60 & 120\end{bmatrix}^T\ \text{MPa}$. Normalspänningen σ fås genom att projicera $\boldsymbol{s}$ på normalen: $\sigma = \boldsymbol{n}^T\boldsymbol{s} = \frac{200}{3}\ \text{MPa} \approx 67\ \text{MPa}$. Skjuvspänningen τ fås nu med Pythagoras sats som $\tau = \sqrt{|\boldsymbol{s}|^2 - \sigma^2} \approx 53\ \text{MPa}$



Lösning 4: Vi har 4 obekanta stödreaktioner enligt figuren, så ramen är statiskt obestämd. Momentjämvikt kring **A** ger att

$$M_A = -V_D L \tag{5}$$

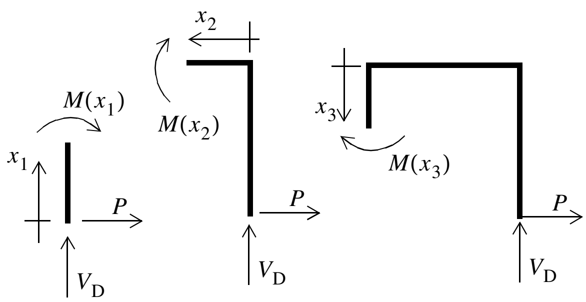
och förskjutningen δ_{vD} kan beräknas enligt Castiglianos 2a sats som



$$\delta_{vD} = \frac{\partial}{\partial V_D}\int\frac{M^2}{EI}ds = \int\frac{\partial M}{\partial V_D}\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{M^2}{EI}\right]ds = \frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial V_D}ds \tag{6}$$

där vi utnyttjat att böjstyvheten EI är konstant och integrationen ska göras längs hela ramen.

Låt x_1 vara en koordinat från **D** mot **C** och snitta genom **CD**. Momentjämvikt ger $M(x_1) = Px_1$ så vi har här $\frac{\partial M}{\partial V_D} = 0$. Analogt får vi för ett snitt mellan **B** och **C** att $M(x_2) = PL + V_D x_2$ och $\frac{\partial M}{\partial V_D} = x_2$, medan ett snitt



genom delen **AB** ger $M(x_3) = P(L - x_3) + V_D L$ och $\frac{\partial M}{\partial V_D} = L$.

Insättning i (6) ger nu

$$\delta_{vD}EI = \int_0^L (M(x_1)\cdot 0)dx_1 + \int_0^L (M(x_2)\cdot x_2)dx_2 + \int_0^L (M(x_3)\cdot L)dx_3 = L^3\left[0 + \left(\frac{P}{2} + \frac{V_D}{3}\right) + \left(V_D + \frac{P}{2}\right)\right]$$

Villkoret $\delta_{vD} = 0$ ger då att $V_D = \frac{-3P}{4}$ och det eftersökta stödmomentet fås sedan ur (5). $\underline{M_A = \frac{3PL}{4}}$

<u>Lösning 5:</u> Lösningen till den styrande differentialekvationen är

$$w(x) = A + Bx + C\cosh(nx) + D\sinh(nx)$$

där integrationskonstanterna måste bestämmas ur randvillkoren. Vid vänster ände har vi trivialt $w(0) = 0$ och $w'(0) = 0$ (utböjning och rotation förhindrade). Momentjämvikt vid $x = L$ ger att $M(L) = Pe$, så med $M = -EIw''$ får vi villkoret $w''(L) = \frac{-Pe}{EI}$. Vertikal kraftjämvikt kräver också att $V(L) = 0$, men vi har också (Lundh ekv 8–59) $V = T + Nw'$ där $N \approx H = P$ och (ekv 8–62) $T = -EIw'''$; insättning ger $-EIw'''(L) + Pw'(L) = 0$, så efter division med $-EI$ kan det fjärde villkoret skrivas $w'''(L) - n^2 w'(L) = 0$.

Med

$$w'(x) = B + Cn\sinh(nx) + Dn\cosh(nx)$$
$$w''(x) = Cn^2\cosh(nx) + Dn^2\sinh(nx)$$
$$w'''(x) = Cn^3\sinh(nx) + Dn^3\cosh(nx)$$

ger de fyra randvillkoren

$$A + C = 0 \qquad B + Dn = 0 \qquad C\cosh(nL) + D\sinh(nL) = -e \qquad -Bn^2 = 0$$

som har lösningen $B = D = 0$, $A = -C = \frac{e}{\cosh(nL)}$. Snittmomentet i konsolen fås nu som

$$M(x) = -EIw''(x) = \frac{Pe\cosh(nx)}{\cosh(nL)}$$