Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

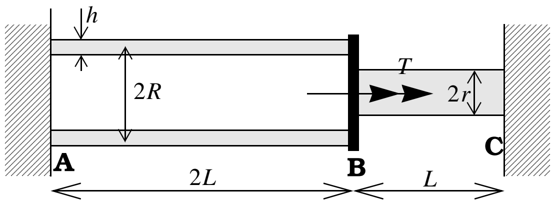
Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081
20 AUGUSTI 2010

Tid och plats:	8.30—12.30 i V–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.00
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 23/8. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2010) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/ samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 30/8 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 3/9.
Granskning:	Tisdag 31/8 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt torsdag 2/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (2a våningen (plan 3) i södra trapphuset, nya M–huset).

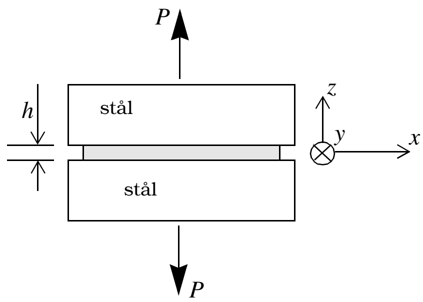
Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.



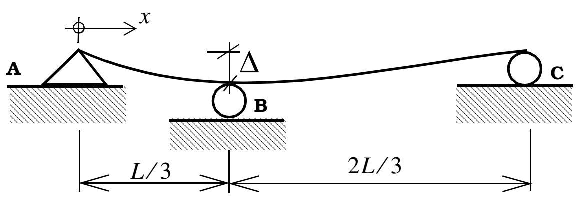
En axelkonstruktion **ABC** med längden $3L$ är stelt infäst vid **A** och **B** samt belastas med ett vridmoment T vid **B**, enligt figuren. Delen **AB** består av ett tunnväggigt rör med radien R och godstjockleken $h = \frac{R}{32}$, medan delen **BC** har ett massivt tvärsnitt med radien r. Båda delarna är tillverkade av ett och samma lineärt elastiska material. Bestäm radien r, uttryckt i R, så att snittmomentet blir lika i de båda delarna. (5p)

2.



En tunn gummimatta med elasticitetsmodul E och tvärkontrationstal ν, limmas mellan två stålblock. Tjockleken h är mycket liten jämfört med utsträckningen i (x, y)–planet. Konstruktionen belastas med en axialkraft i z–led. Försumma stålblockens deformationer samt skjuvdeformationer i gummimattan och beräkna kvoten $\frac{\varepsilon_z}{\sigma_z}$. (5p)

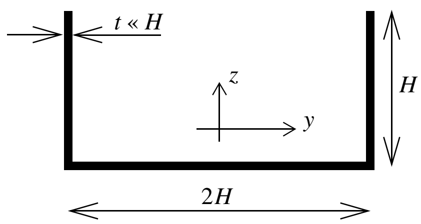
3.



En balk med böjstyvheten EI och längden L vilar på 3 stöd, så att 2 två olika långa spann bildas enligt figuren. Till följd av en konstruktionsmiss hamnar mitt–stödet något förskjutet, så att balken får en förskjutning $\Delta \ll L$ nedåt vid mittstödet.

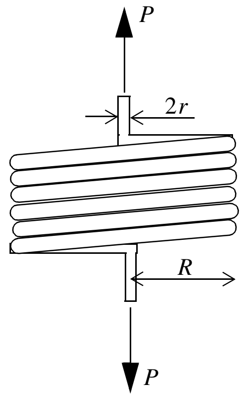
a: Bestäm stödreaktionerna (2p)

b: Beräkna den till beloppet största normalspänningen σ, i ett tvärsnitt där $M_y = \frac{-135 E \Delta H^3 t}{24 L^2}$, om balken har ett tunnväggigt U–tvärsnitt enligt figuren (3p)



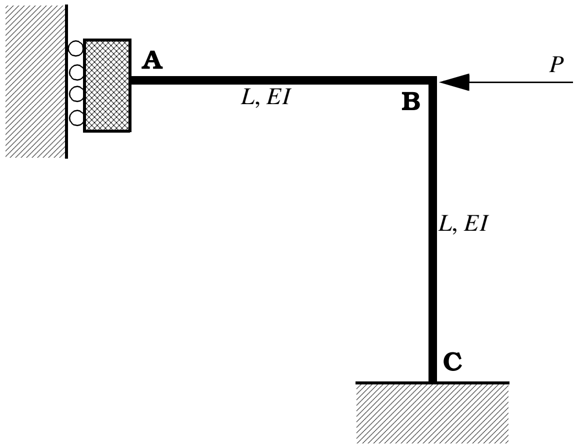
4.

En tråd med tvärsnittsradien r spinns till en fjäder med radien $R \gg r$. Bestäm fjäderkonstanten k i kraft–förskjutningssambandet $P = k\delta$, där δ är förlängningen, om materialet är lineärt elastiskt med skjuvmodul G och fjädern består av n varv tråd. Deformationer orsakade av tvärkraften i fjädertråden kan försummas. (5p)

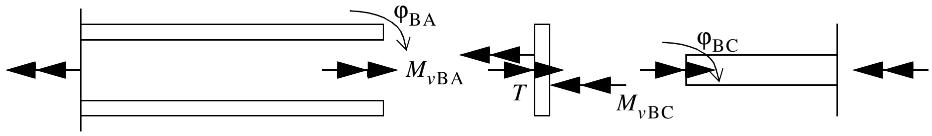


5.

En ram består av två balkar, **AB** och **BC**, som båda har böjstyvheten EI och längden L. Vid **A** är infästningen sådan att rotation och horisontalförskjutning är förhindrad, medan konstruktionen är fast inspänd vid **C**. Härled knäckekvationen, dvs en ekvation vars lösning ger kritisk last med avseende på elastisk stabilitet, för fallet att delen **AB** utsätts för en tryckande axiallast. Axialdeformationer (längdändringar) kan anses försumbara. (5p)



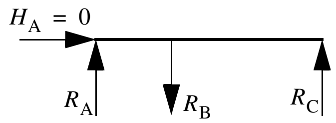
Lösning 1: Snitta på ömse sidor om **B** och studera delarna **AB** respektive **BC**; låt M_{vBA} och M_{vBC} vara snittmomenten i delarna så att jämvikt ger $T = M_{vBA} + M_{vBC}$.



Vridningsvinkeln omedelbart till vänster om **B** blir då $\varphi_{BA} = \dfrac{M_{vBA} \cdot 2L}{2G\pi R^3 h}$ (Lundh ekv 6–6) och vinkeln till höger om **B** blir $\varphi_{BC} = \dfrac{M_{vBC} \cdot L}{(G\pi r^4)/2}$ (Lundh ekv 6–11). Kompatibilitet, $\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$, samt kravet $M_{vBA} = M_{vBC}$ ger då $\dfrac{L}{G\pi R^3 h} = \dfrac{2L}{G\pi r^4}$; med $h = R/32$ ger detta $r^4 = \dfrac{R^4}{16}$, så $\underline{r = R/2}$

Lösning 2: Deformationerna i (x, y)–planet kan anses förhindrade, så Hookes lag (Lundh ekv 10–7,8,9) ger $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = 0$ och $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = 0$; ut detta fås $\sigma_x = \sigma_y = \dfrac{\nu\sigma_z}{1-\nu}$. Töjningen i z–led blir då $\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) = \frac{\sigma_z}{E}\left(1 - 2\nu\frac{\nu}{1-\nu}\right) = \dfrac{\sigma_z(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$; $\dfrac{\varepsilon_z}{\sigma_z} = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$

Lösning 3a: Konstruktionen är statiskt obestämd. Betrakta (t.ex) stödreaktionen vid **B** som en bekant yttre last; förskjutningen i kraftens riktning blir då (Formelsamlingen sid 9)

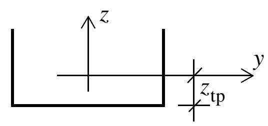


$r_B = \frac{\left(\frac{L}{3}\right)^2\left(\frac{2L}{3}\right)^2}{3EIL}R_B = \frac{4L^3R_B}{243EI}$. Med $r_B = \Delta$ given fås då $R_B = \frac{243EI}{4L^3}\Delta$.

Övriga stödreaktioner kan beräknas med jämvikt: momentjämvikt kring **C** ger $R_AL - R_B\frac{2L}{3} = 0$, så

$R_A = \frac{81EI}{2L^3}\Delta$; momentjämvikt kring **A** ger $R_CL - R_B\frac{L}{3} = 0$, vilket leder till $R_C = \frac{81EI}{4L^3}\Delta$

Lösning 3b: Med $N = M_z = 0$ och M_y given, fås normalspänningen som



(Lundh ekv 7–91) $\sigma = \frac{M_y z}{I_y}$. För att beräkna I_y och $|z|_{max}$ måste vi först hitta tvärsnittets yt–tyngdpunkt; statiskt moment m.a.p en axel längs tvärsnittets underkant, ger

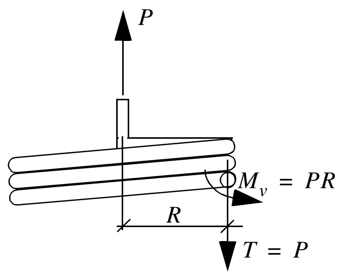
$Az_{tp} = 2 \cdot Ht\frac{H}{2} + 2Ht \cdot 0$, där $A = 4Ht$ är tvärsnittets area. Vi finner då $z_{tp} = \frac{H}{4}$, så

$|z|_{max} = \left|\frac{-3H}{4}\right|_{max} = \frac{3H}{4}$. Areatröghetsmomentet m.a.p y—axeln genom tp fås med Steiners sats

(Lundh ekv 7–42) som $I_y = \frac{2Ht^3}{12} + 2Ht \cdot \left(\frac{H}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{tH^3}{12} + Ht \cdot \left(\frac{H}{4}\right)^2\right) \approx \frac{5H^3t}{12}$. Vi finner då

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_y||z|_{max}}{I_y} = \frac{\frac{135E\Delta H^3t}{24L^2} \cdot \frac{3H}{4}}{\frac{5H^3t}{12}} = \frac{81EH\Delta}{8}$$

Lösning 4: Betrakta jämvikt efter godtyckligt snitt genom fjädern; man finnar att det i varje snitt måste finnas en tvärkraft $T = P$ och ett vridande moment $M_v = PR$. Om inverkan av tvärkraften försummas, blir den elastiska energin (Lundh 15–52) $W = \int_0^{n2\pi R} \frac{M_v^2}{2GK} ds$ där s är en koordinat längs fjädertråden och $K = \frac{\pi r^4}{2}$ (Lundh 6–12). Enligt Castiglianos 2a sats fås nu fjäderförlängningen som



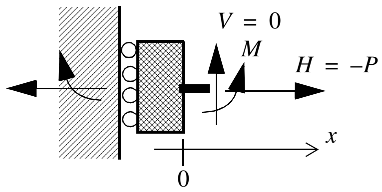
$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{\partial W}{\partial M_v}\frac{\partial M_v}{\partial P} = \int_0^{n2\pi R} \frac{M_v}{GK}\frac{\partial M_v}{\partial P} ds = \frac{PR}{G\frac{\pi r^4}{2}} \cdot R \int_0^{n2\pi R} ds = \frac{4nR^3}{Gr^4}P$$

Med $\delta = \frac{P}{k}$ identifierar vi fjäderkonstanten som $k = \frac{Gr^4}{4nR^3}$

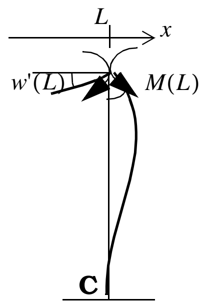
<u>Lösning 5:</u> För den tryckta balken **AB** ges den transversella utböjningen $w(x)$ som lösningen till

$w^{iv} + n^2 w'' = 0$, där $n = \sqrt{\dfrac{P}{EI}}$ (Lundh ekv 8–64). Lösningen är $w = A\sin(nx) + B\cos(nx) + Cx + D$ (Lundh 8–66), där integrationskonstanterna beror av randvillkoren.

Vid **A**, $x = 0$, gäller trivialt att $w'(0) = 0$ och vidare är vertikalkraften noll: $V(0) = 0$. Vertikalkraften kan uttryckas med tvärkraften och normalkraften (Lundh ekv 8–59) som $V = T + Nw'$, men $w'(0) = 0$ och $T = -EIw'''$, så $V(0) = 0$ implicerar att $w'''(0) = 0$.



Vid **B**, $x = L$, har vi $w(L) = 0$ samt (Formelsamlingen sid 11) $w'(L) = \dfrac{M(L)L}{4EI}$; med $M = -EIw''$ fås då det fjärde randvillkoret som $w''(L) + \dfrac{4}{L}w'(L) = 0$.



$w'''(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$w'(0) = 0 \Rightarrow An + C = 0 \Rightarrow C = 0$

Med $A = C = 0$ fås sedan $w(L) = 0 \Rightarrow B\cos(nL) + D = 0 \Rightarrow D = -B\cos(nL)$, varvid sista randvillkoret, $w''(L) + \dfrac{4}{L}w'(L) = 0$, ger $-Bn^2\left(\cos(nL) + \dfrac{4}{nL}\sin(nL)\right) = 0$.

$B = 0$ leder till den triviala lösningen $w \equiv 0$; icke triviala lösningar fås om $\cos(nL) + \dfrac{4}{nL}\sin(nL) = 0$; lägsta positiva roten nL ger oss kritisk last.