Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

31 MAJ 2010

Tid och plats: 8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.00

Hjälpmedel: **1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000.

2. *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används.

4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Lärare: Peter Möller, tel (772) 1505

Lösningar: Anslås vid ingången till institutionens lokaler 1/6. Se även kurshemsidan.

Poängbedömning: Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2010) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen.

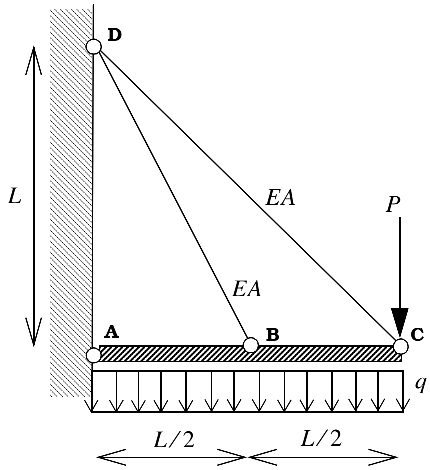
För att få poäng på en uppgift ska den vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.

Resultatlista: Anslås **senast** 14/6 2006 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 18/6.

Granskning: Onsdag 16/6 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt tisdag 31/8 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (2a våningen (plan 3) i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

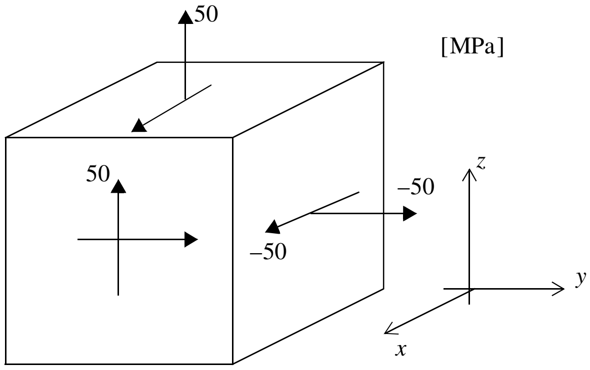


En platta, **ABC**, med längden L är ledat infäst till en stel vägg samt understöds av två stänger, **BD** respektive **CD**, enligt figuren. Båda stängerna har tvärsnittsarea A och är tillverkade av ett lineärt elastiskt–idealplastiskt material med elasticitetsmodul E och sträckgräns σ_s. Plattan får betraktas som stel, dvs den förblir hela tiden odeformerad (rak).

a: Låt $P = 0$ (se figur) och bestäm stångkrafterna i de bägge stängerna, på grund av plattans egentyngd q (kraft/längd). (4p)

b: Bestäm den kraft P som leder till plasticering i bägge stängerna; egentyngden kan här försummas ($q = 0$). (1p)

2.



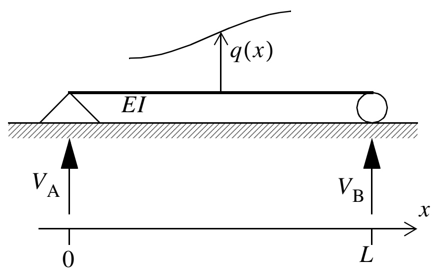
Figuren visar spänningstillståndet i en viss punkt i en lineärt elastisk kropp.

a: Bestäm effektivspänningen enligt von Mises flythypotes (1p)

b: Bestäm effektivspänningen enligt Trescas flythypotes (3p)

c: Bestäm den största skjuvspänningen i punkten (1p)

3.



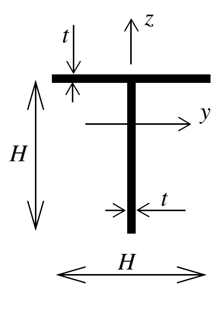
En fritt upplagd balk med konstant böjstyvhet EI och längden L belastas med en fördelad last med intensitet $q(x)$. Balkens utböjning har beräknats till

$$w(x) = \frac{2q_0L^4}{5EI}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \frac{4}{63}\left(\frac{x}{L}\right)^{9/2} - \frac{13}{126}\left(\frac{x}{L}\right)\right]$$

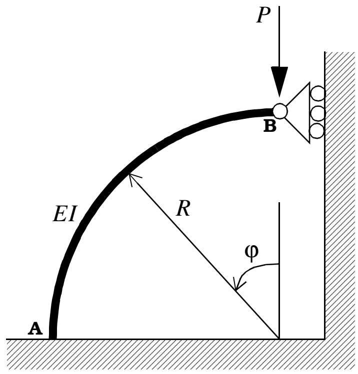
där q_0 är en konstant med enheten kraft/längd.

a: Bestäm stödreaktionerna V_A och V_B (2p)

b: Bestäm den till beloppet största normalspänningen $|\sigma|_{max}$. Balken har ett tunnväggigt T–tvärsnitt, med livhöjd och flänsbredd H samt godstjocklek $t \ll H$ (3p)



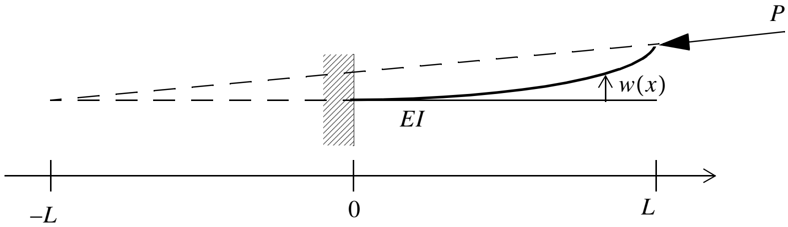
4.



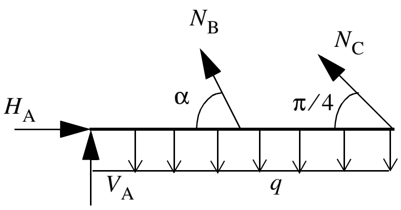
En kvartscirkelbåge **AB** med konstant böjstyvhet EI och krökningsradie R, är fast inspänd vid **A** medan horisontalförskjutning vid **B** är förhindrad. Bågen belastas med en vertikal kraft P vid **B**. Bestäm momentet vid **A**. Tvärsnittsdimensionerna kan antas vara små i jämförelse med R, och hänsyn behöver bara tas till böjdeformationer. (5p)

5.

En konsolbalk med längd L och konstant böjstyvhet EI belastas i sin fria ände av en tryckande axialkraft P. Kraften är sådan att den alltid vekar längs en linje mellan konsoländen och en punkt på avståndet L bakom inspänningen och på balken förlängning, (se figur nedan). Härled knäckekvation, dvs en ekvation vars lägsta positiva rot ger kritisk kraft P_{kr} med hänsyn till elastisk stabilitet. (5p)



Lösning 1a: Med Pythagoras sats fås de två stånglängderna $L_{BD} = \frac{\sqrt{5}L}{2}$ respektive $L_{CD} = \sqrt{2}L$. För vinkeln α **(ABD)** gäller $\sin\alpha = \frac{L}{L_{BD}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ och $\cos\alpha = \frac{L/2}{L_{BD}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Frilägg plattan enligt figuren; momentjämvikt i **A** ger:

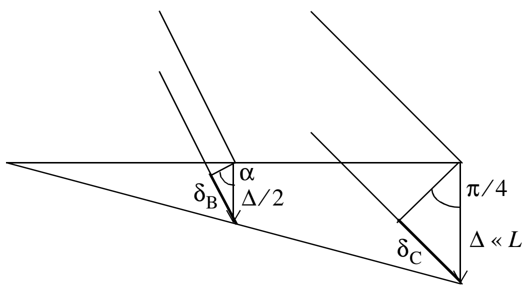


$N_B \sin\alpha \cdot \frac{L}{2} + N_C \sin\frac{\pi}{4} \cdot L - qL \cdot \frac{L}{2} = 0$, ur vilket

$$\frac{N_B}{\sqrt{5}} + \frac{N_C}{\sqrt{2}} = \frac{qL}{2} \tag{1}$$

Vi har alltså en ekvation med två obekanta; ytterligare jämviktsekvationer kan inte ställas upp utan att blanda in de två andra obekanta (tvångskrafterna vid **A**).

Betrakta nu plattan i utböjt läge. Låt $\Delta \ll L$ vara vertikalförskjutningen av **C**; vid **B** är då förskjutningen $\frac{\Delta}{2}$. Förlängningen av stång **CD** blir då $\delta_C = \Delta \sin\frac{\pi}{4}$; vi har också (Lundh ekv 2–14) $\delta_C = \frac{N_C L_{CD}}{EA}$. Sammantaget fås:



$$\Delta = \frac{N_C L_{CD}}{EA\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2N_C L}{EA} \tag{2}$$

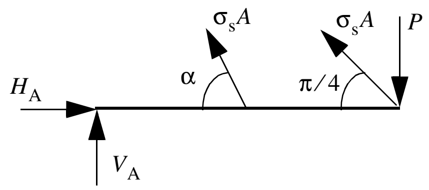
På samma sätt får vi för stång **BD** att

$$\Delta = \frac{2N_B L_{BD}}{EA\sin\alpha} = \frac{5N_B L}{2EA} \tag{3}$$

Ekvationerna (2) och (3) ger

$$N_B = \frac{4N_C}{5} \tag{4}$$

varefter (1) och (4) ger oss lösningen $N_B = \frac{2\sqrt{10}qL}{4\sqrt{2}+5\sqrt{5}} \approx 0{,}38qL$ $\quad N_C = \frac{5\sqrt{10}qL}{2(4\sqrt{2}+5\sqrt{5})} \approx 0{,}47qL$



__Lösning 1b:__ Frilägg enligt figuren; då stängerna har plasticerat blir stångkrafterna $N_B = N_C = \sigma_s A$. Momentjämvikt kring **A** ger $\sigma_s A\sin\alpha\cdot\frac{L}{2} + \sigma_s A\sin\frac{\pi}{4}\cdot L - PL = 0$, ur vilket vi löser

$$P = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})\sigma_s A}{\sqrt{10}} \approx 1{,}15\sigma_s A$$

__Lösning 2a:__ $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -50\text{ MPa}$, $\sigma_z = 50\text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -50\text{ MPa}$, $\tau_{xz} = 50\text{ MPa}$ och $\tau_{yz} = 0$. Detta ger von Misesspänningen (Lundh ekv 12–4)

$$\sigma_e = \sqrt{(-50)^2 + 50^2 - 50\cdot(-50) + 3((-50)^2 + 50^2)}\text{ MPa} = \sqrt{9\cdot 50^2}\text{ MPa} = 150\text{ MPa}$$

__Lösning 2b:__ Trescaspänningen fås som skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen. Huvudspänningarna fås som rötterna till 3e–gradspolynomet $\det(S - \sigma I)$, dvs som egenvärdena till spänningstensorn S. Med spänningstensorn enligt Lundh ekv 9–6, fås

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\sigma & -50 & 50 \\ -50 & (-50-\sigma) & 0 \\ 50 & 0 & (50-\sigma) \end{bmatrix}\right) = -\sigma^3 + (3\cdot 50^2)\sigma = 0$$

(σ i MPa). Vi finner $\sigma_2 = 0$, $\sigma_{1,3} = \pm\sqrt{3}\cdot 50\text{ MPa}$. Vi får då effektivspänningen enligt Tresca $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{3}\cdot 100\text{ MPa} \approx 173\text{ MPa}$

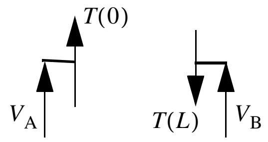
__Lösning 2c:__ Maximal skjuvspänning fås som halva skillnaden mellan största och minsta huvudspänning: $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \sqrt{3}\cdot 50\text{ MPa} \approx 87\text{ MPa}$

__Lösning 3a:__ Snittmomentet i balken fås som $M = -EI\frac{d^2w}{dx^2}$:

$$M(x) = \frac{2q_0L^2}{5}\left(\left(\frac{x}{L}\right)^{5/2} - \frac{x}{L}\right) \tag{5}$$

och tvärkraften blir $T = \frac{dM}{dx} = q_0L\left(\left(\frac{x}{L}\right)^{3/2} - \frac{2}{5}\right)$. Speciellt har vi $T(0) = \frac{-2q_0L}{5}$ och $T(L) = \frac{3q_0L}{5}$.

Snitta vid höger och vänster stöd; vertikal kraftjämvikt ger

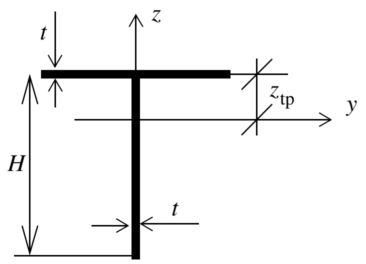


$$V_A = -T(0) = \frac{2q_0L}{5} \text{ respektive } V_B = T(L) = \frac{3q_0L}{5}.$$

Lösning 3b: Maximal normalspänning fås som

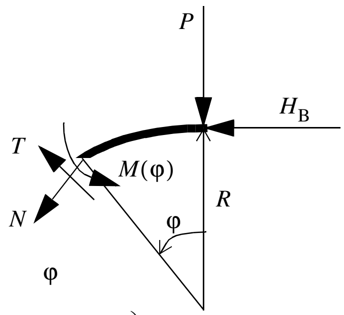
$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}|z|_{max}}{I_y}$. Ur (5) finner vi att i intervallets ändar $M(0) = M(L) = 0$. För att hitta max/min i spannet sätter vi $\frac{dM}{dx} = T = 0$: $q_0L\left(\left(\frac{x}{L}\right)^{3/2} - \frac{2}{5}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{L} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2/3} \approx 0{,}543$. Ekv (5) ger då

$|M|_{max} = |M(x = 0{,}543L)| \approx 0{,}13q_0L^2$.



För att hitta tvärsnittest yttyngdpunkt beräknar vi statiska momentet m.a.p en axel genom flänsen: $z_{tp}A = Ht \cdot 0 + Ht \cdot \frac{H}{2}$, som med $A = 2Ht$ ger $z_{tp} = \frac{H}{4}$. Vi har då $|z|_{max} = |z_{tp} - H| = \frac{3H}{4}$. Areatröghetsmomentet m.a.p y–axeln fås med Steiners sats (Lundh ekv 7–42): $I_y = \frac{Ht^3}{12} + Ht \cdot z_{tp}^2 + \frac{tH^3}{12} + Ht \cdot \left(\frac{H}{2} - z_{tp}\right)^2 \approx \frac{5tH^3}{24}$ (de två första termerna är bidraget från flänsen och t^3 försummas ($t \ll H$)). $|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}|z|_{max}}{I_y} \approx \frac{0{,}13q_0L^2 \cdot \frac{3H}{4}}{\frac{5tH^3}{24}} \approx 0{,}47\frac{q_0L^2}{tH^2}$

Lösning 4: Låt H_B beteckna stödreaktionen vid rullagringen.



Momentjämvikt kring ett snitt vid en vinkelkoordinat φ ger

$$M(\varphi) = PR\sin\varphi - H_BR(1 - \cos\varphi) \qquad (6)$$

Enligt Castiglianos 2a sats fås då den horisontella förskjutningen vid **B** som

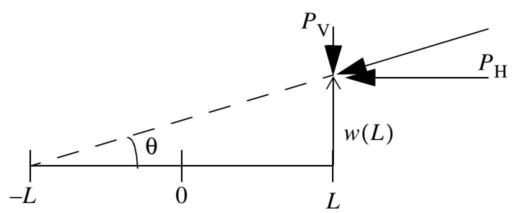
$$h_B = \frac{\partial}{\partial H_B}\int_0^{\pi/2}\frac{M^2}{2EI}Rd\varphi = \int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial M}\left[\frac{M^2}{2EI}\right]\frac{\partial M}{\partial H_B}Rd\varphi = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{PR\sin\varphi - H_BR(1 - \cos\varphi)}{EI} \cdot (-R(1 - \cos\varphi))\right)Rd\varphi =$$

$$\frac{R^3}{EI}\int_0^{\pi/2}[P\sin\varphi(\cos\varphi - 1) + H_B(1 - \cos\varphi)^2]d\varphi = \left(\frac{-P}{2} + \frac{3\pi - 8}{4}H_B\right)\frac{R^3}{EI}$$

Villkoret $h_B = 0$ ger då $H_B = \frac{2P}{3\pi - 8}$. Det efterfrågade momentet fås nu ur (6):

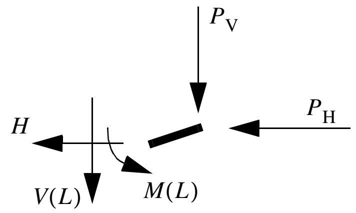
$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = PR - H_BR = \frac{(3\pi - 10)PR}{3\pi - 8} \approx -0{,}40\ PR$$

Lösning 5: Komponentuppdela lasten: $P_V = P\sin\theta$, $P_H = \cos\theta$. Under antagande om att $\theta \ll 1$ har vi att $\tan\theta = \frac{w(L)}{2L} \approx \theta$ samt $\cos\theta \approx 1$ och $\sin\theta \approx \theta \approx \frac{w(L)}{2L}$. Vi har då $P_H \approx P$ och $P_V \approx P\frac{w(L)}{2L}$.



Den allmänna lösningen till den styrande differentialekvationen är (Lundh 8–66)

$$w(x) = A + Bx + C\cos(nx) + D\sin(nx) \qquad \text{där } n = \sqrt{\frac{P_\mathrm{H}}{EI}} \approx \sqrt{\frac{P}{EI}}$$



Vid $x = 0$ har vi randvillkoren $w(0) = 0$ och $w'(0) = 0$. Randvillkoren vid $x = L$ fås ur jämviktsvillkor. Momentjämvikt kräver att $M(L) = 0$ och eftersom $M = -EIw''$ har vi då att $w''(L) = 0$. Horisontell jämvikt visar att $H = -P_\mathrm{H} \approx -P$, medan vertikal jämvikt kräver att $V(L) + P_\mathrm{V} \approx V(L) + P\frac{w(L)}{2L} = 0$; enligt Lundh ekv 8–59 är $V = T + Nw'$, där $T = -EIw'''$ och $N \approx H \approx -P$. Insättning i jämviktsekvationen ger, efter division med $-EI$, $w'''(L) + n^2 w'(L) - \frac{n^2}{2L}w(L) = 0$. Sammanfattningsvis:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \\ w''(L) = 0 \\ w'''(L) + n^2 w'(L) - \dfrac{n^2}{2L}w(L) = 0 \end{cases}$$

De tre första villkoren ger $A + C = 0$, $B + Dn = 0$ samt $-Cn^2\cos(nL) - Dn^2\sin(nL) = 0$, så $C = -D\tan(nL)$, $A = D\tan(nL)$ och $B = -Dn$. Insättning i lösningen ger

$$\begin{aligned} w(x) &= D(\tan(nL) - nx - \tan(nL)\cos(nx) + \sin(nx)) \\ w'(x) &= Dn(-1 + \tan(nL)\sin(nx) + \cos(nx)) \\ w'''(x) &= Dn^3(-\tan(nL)\sin(nx) - \cos(nx)) \end{aligned}$$

Det fjärde randvillkoret ger nu

$$Dn^3\left[\cancel{-\tan(nL)\sin(nL)} - \cancel{\cos(nL)} - 1 + \cancel{\tan(nL)\sin(nL)} + \cancel{\cos(nL)} - \frac{1}{2nL}(\tan(nL) - nL - \cancel{\tan(nL)\cos(nL)} + \cancel{\sin(nL)})\right] = 0$$

Med $D = 0$ fås den triviala lösningen $w \equiv 0$; icke–triviala lösningar kräver att uttrycket inom parentesen är noll: $-1 - \frac{1}{2nL}(\tan(nL) - nL) = 0$ eller $nL + \tan(nL) = 0$

(Numerisk lösning ger $nL \approx 2{,}02875$, så $P_\mathrm{kr} \approx \frac{(2{,}02875)^2 EI}{L^2} \approx \frac{0{,}42\pi^2 EI}{L^2}$, vilket som väntat ligger mellan Euler 1 och Euler 2 (jmf inlämningsuppgift 5, 2010)).