Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

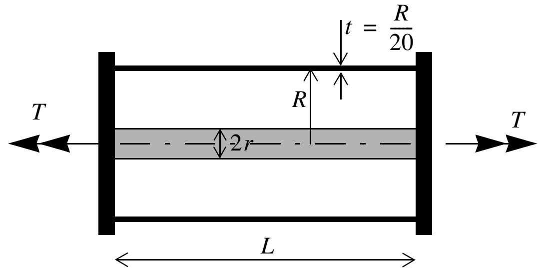
12 JANUARI 2010

Tid och plats:	8.30—12.30 i M–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.00
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 13/1. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2009) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 18/1 2010 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 25/1.
Granskning:	Tisdag 19/1 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt fredag 22/1 $12^{\underline{00}}$–$14^{\underline{00}}$ på inst. (2a våningen i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

Axelkonstruktionen i figuren består av en central massiv axel med radien r och ett omgivande tunnväggigt rör med medelradie R och godtjocklek $t = \frac{R}{20}$. Delarna är tillverkade av ett lineärt elastiskt material med skjuvmodul G, och de är förenade med gavlar som kan betraktas som stela.

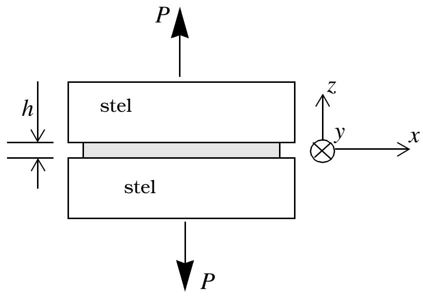


a: Bestäm radieförhållandet R/r så att snittmomenten i rör och axel blir lika stora, då konstruktionen belastas med ett vridande moment T. (3p)

b: Vilken del kommer först att plasticera då vridmomentet T successivt ökar, om $R = \frac{3r}{2}$? (2p)

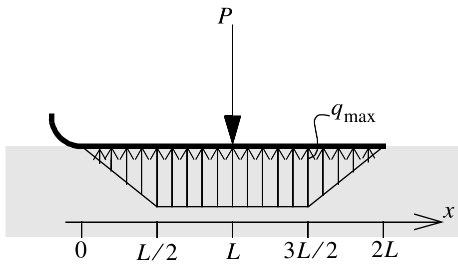
2.

En tunn gummimatta med elasticitetsmodul E och tvärkontrationstal ν, limmas mellan två stålblock. Tjockleken h är mycket liten jämfört med utsträckningen i (x, y)–planet. Konstruktionen belastas med en axialkraft i z–led. Försumma stålblockens deformationer samt skjuvdeformationer i gummimattan och beräkna kvoten $\frac{\varepsilon_z}{\sigma_z}$. (5p)



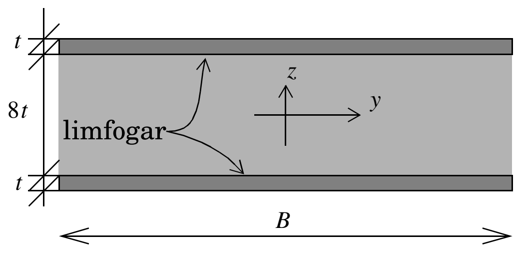
3.

En skida med längden $2L$ belastas på mitten med en vertikal punktlast P samt med trycket från underlaget. Snötrycket ger upphov till en lastintensitet $q(x)$ (kraft/längd) som antas variera enligt vad som visas i figuren.

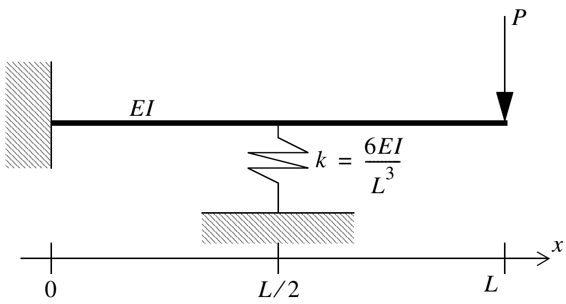


a: Bestäm den största lastintensiteten (q_{max}) och beräkna sedan moment och tvärkraft i ett snitt omedelbart till höger om $x = L$. (2p)

b: Skidans tvärsnitt är rektangulärt med bredden B och höjden $10t$. Den är uppbyggd av två kolfiberlaminat med tjockleken t vardera, som är limmade på en skumplastkärna med tjockleken $8t$. Kärnan har så låg elasticitetsmodul att det böjande momentet kan anses tas upp av enbart laminaten, dvs skumplastkärnan ger inget bidrag till areatröghetsmomentet. Bestäm skjuvspänningen i limfogarna i ett tvärsnitt där tvärkraften är $T = \frac{P}{2}$. (3p)



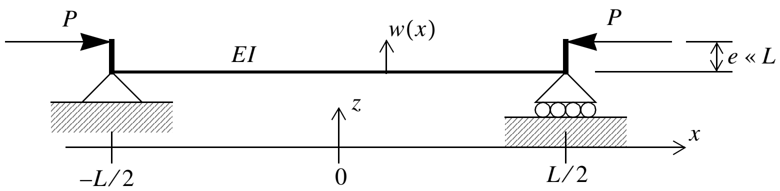
4.



En konsolbalk med böjstyvheten EI och längden L understödjs på mitten av en fjäder med styvheten $k = \frac{6EI}{L^3}$. Då konstruktionen är obelastad är fjädern ospänd. Använd Castiglianos 2a sats för att beräkna fjäderkraften då balken belastas med en vertikal kraft P i sin fria ände. (5p) **Lösning där Castiglianos 2a sats ej utnyttjas ger maximalt 2p**.

5.

En fritt upplagd balk med böjstyvheten EI och längden L belastas av en tryckande axialkraft P som verkar med excentriciteten $e \ll L$. Bestäm snittmomentet $M(x)$ i balken med hänsyn taget till utböjningen $w(x)$. (5p)



Lösning 1a: Beteckna snittmomentet i respektive del med M_v ($T = 2M_v$). Vridningsvinkeln för axeln blir då (se Lundh ekv 6–11,12) $\varphi_{axel} = \frac{2M_vL}{\pi G r^4}$, medan rörets vridningsvinkel blir (6–6) $\varphi_{rör} = \frac{10M_vL}{\pi G R^4}$. Eftersom gavlana kan betraktas som stela, måste vridningsvinklarna bli lika stora:

$$\varphi_{axel} = \varphi_{rör} \Rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^4 = 5 \Rightarrow \frac{R}{r} = \sqrt{\sqrt{5}} \approx 1{,}5$$

Lösning 1b: Skjuvspänningen i röret, som är approximativt konstant i tjockledsled eftersom röret är tunnväggigt, fås ur Lundh 6–4:

$$\tau_{rör} = \frac{M_{v,\,rör}}{2\pi R^2 \frac{R}{20}} = \frac{10M_{v,\,rör}}{\pi\left(\frac{3}{2}r\right)^3} = \frac{80M_{v,\,rör}}{27\pi r^3}$$

Lundh 6–14 ger maximal skjuvspänning i axeln: $\tau_{max,axel} = \frac{2M_{v,axel}}{\pi r^3}$

Från deluppgift a inser vi att $R = \frac{3r}{2}$ gör att snittmomenten i de båda delarna blir nästan exakt lika ($M_{v,\,rör} \approx M_{v,axel}$), så $\tau_{rör} > \tau_{max,axel}$. Röret kommer att plasticera först.

Lösning 2: Vi använder Hookes lag (Lundh ekv 10–7,8,9). Eftersom deformationerna i (x, y)–planet kan bertraktas som förhindrade fås

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z)$$

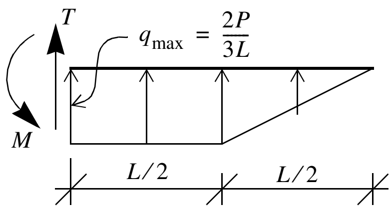
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) = 0 \Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_y}{\nu} - \sigma_z$$

ur vilket vi löser $\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu\sigma_z}{1-\nu}$. Ekv 10–9 ger då

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) = \frac{\sigma_z}{E}\left(1 - 2\nu\frac{\nu}{1-\nu}\right) = \frac{\sigma_z(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$$

$\frac{\varepsilon_z}{\sigma_z} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$ (speciellt: då $\nu = \frac{1}{2}$ fås $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$; inkompressibelt material).

Lösning 3a: Vertikal jämvikt ger $q_{\max}L + 2\left(q_{\max}\frac{L}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - P = 0$, ur vilket vi löser $q_{\max} = \frac{2P}{3L}$.

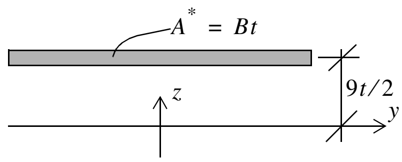


Snitta omedelbart till höger om mittpunkten och titta på högra (t.ex) delen. Vertikal jämvikt ger $T - \frac{2P}{3L}\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = 0$, så $T = \frac{P}{2}$.

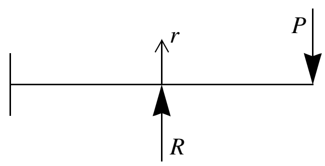
Momentjämvikt ger $M - \frac{2P}{3L}\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{4} + \frac{L}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{6}\right)\right) = 0$, ur vilket

$$M = \frac{7PL}{36}$$

Lösning 3b: Skjuvspänningen beräknas enligt Lundh 7–48. Vi betraktar ett snitt i underkant av övre lamellen (eller ovankant av undre lamellen). Statiska momentet av den utsnittade biten m.a.p y–axeln blir $S_{A^*} = A^*\cdot\frac{9t}{2} = \frac{9Bt^2}{2}$. Areatröghetsmomentet för tvärsnittet är (Steiners sats, Lundh 7—42) $I_y = 2\cdot\left(\frac{Bt^3}{12} + Bt\cdot\left(\frac{9t}{2}\right)^2\right) = \frac{122Bt^3}{3}$. Ekv 7–48 ger då $\tau = \frac{TS_{A^*}}{I_yB} = \frac{27P}{488Bt}$

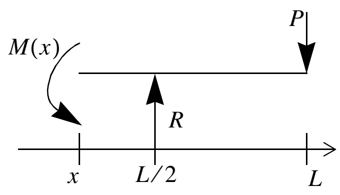


Lösning 4: Ansätt fjäderkraften R som bekant last och beräkna den associerade förskjutningen r med Castiglianos 2a sats: $r = \frac{\partial\Pi}{\partial R}$, där $\Pi = \int_0^L \frac{M^2}{EI}dx$. Vi har då $r = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R}dx$ och söker först snittmomentet M i



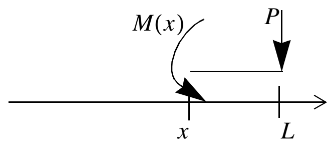
balken.

Snitta i spannet $0 < x < \frac{L}{2}$; momentjämvikt ger



$M(x) = P(L-x) - R\left(\frac{L}{2} - x\right)$ och alltså $\frac{\partial M}{\partial R} = -\frac{1}{2}(L-2x)$.

Med ett snitt i spannet $\frac{L}{2} < x < L$ fås $M(x) = P(L-x)$, varför $\frac{\partial M}{\partial R} = 0$.



Insättning ger nu

$$r = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R}dx = \frac{-1}{2EI}\int_0^{L/2} (P(L-x)(L-2x) - R(L-2x)^2)dx = \frac{L^3}{EI}\left(\frac{R}{24} - \frac{5P}{48}\right).$$

För fjädern gäller (det konstitutiva) sambandet $r = \frac{-R}{k}$, så vi får $\frac{L^3}{EI}\left(\frac{R}{24} - \frac{5P}{48}\right) = \frac{-R}{k}$. Med $k = \frac{6EI}{L^3}$ får

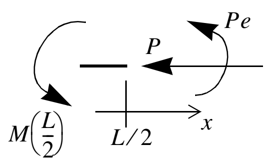
vi då $R = \frac{P}{2}$

<u>Lösning 5:</u> Lundh ekv 8–66 ger utböjningen $w(x) = A\sin nx + B\cos nx + Cx + D$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. Med origo i symmetripunkten (se tes) måste vi ha $w(-x) = w(x)$, varur vi finner $A = C = 0$, så

$\frac{d^2w}{dx^2} = -Bn^2\cos nx$. Sambandet mellan moment och utböjningen andraderivata (ekv 7–65) ger nu

$M(x) = -EI\frac{d^2w}{dx^2} = EIBn^2\cos nx = PB\cos nx$. Vi måste alltså finna integrationskonstanten B.

Studera momentjämvikt vid något av stöden: $M\left(\frac{L}{2}\right) = -Pe$. Men



$M = -EIw''$, så vi har $w''\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{Pe}{EI}$. Insättning i uttrycket för 2a derivatan ovan ger $-Bn^2\cos\frac{nL}{2} = \frac{Pe}{EI}$, så vi får $B = \frac{-e}{\cos\frac{nL}{2}}$. Alltså fås

$$M(x) = \frac{-Pe\cos nx}{\cos\frac{nL}{2}}$$