Lösningar

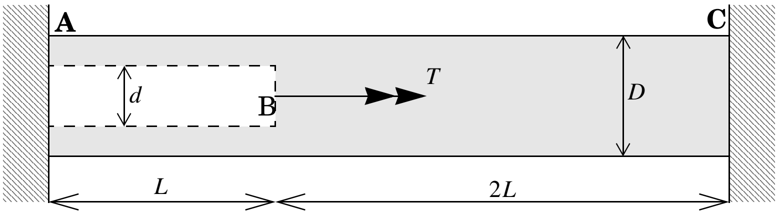
TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

24 AUGUSTI 2009

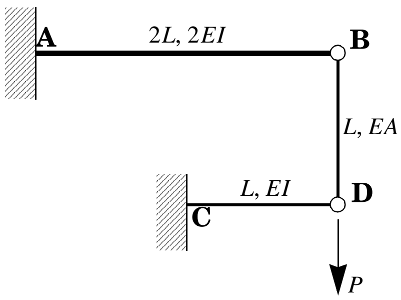
Tid och plats:	8.30—12.30 i V–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.00
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 25/8. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2009) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 7/9 2009 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 10/9.
Granskning:	Tisdag 8/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt torsdag 10/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. Hörsalsvägen 7a, plan 3.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1. En axel **ABC** av ett lineärt elastiskt material har länden $3L$ och ett cirkulärt tvärsnitt med ytterdiameter D. Axelns båda ändar hålls fixerade och vid **B** anbringas ett vridmoment T enligt figuren nedan. Man önskar borra upp ett hål med diameter d i delen **AB**, så att snittmomentet M_v i delen **AB** blir lika stort som i delen **BC**. Beräkna d uttryckt i D. (5p)



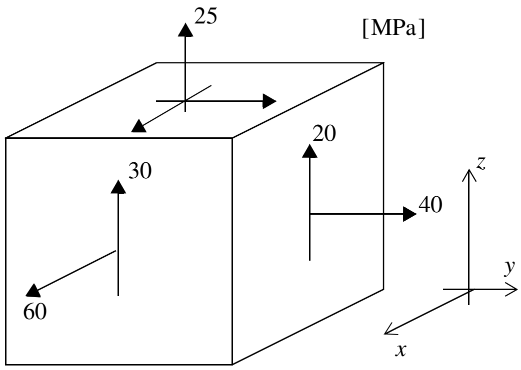
2. Konsolbalkarna **AB** och **CD** har längderna $2L$ respektive L samt böjstyvheterna $2EI$ respektive EI. De fria ändarna är sammankopplade med en stång **BD** som har längden L och axialstyvheten EA. Bestäm axialkraften i **BD** då den kortare balken belastas med en vertikal kraft P i sin fria ände enligt figuren. (5p)



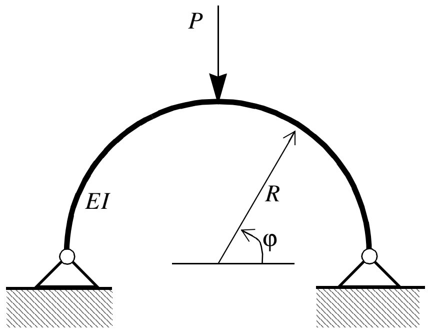
3. Figuren visar spänningstillståndet i en punkt, i en lineärt elastisk kropp. Materialets sträckgräns är $\sigma_s = 200\ \text{MPa}$. Bestäm säkerheten mot plasticering enligt

a: von Mises (1p)

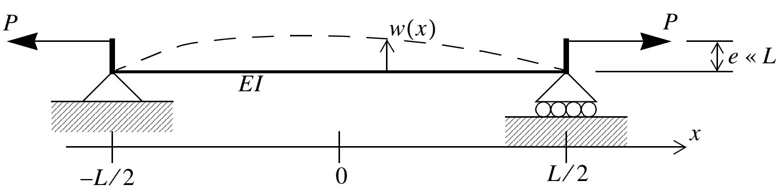
b: Tresca (4p)

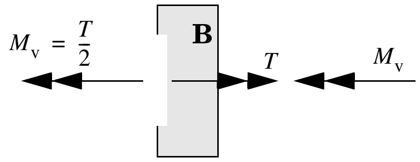


4. En halvcirkelbåge med böjstyvheten EI och krökningsradien R vilar på två fasta stöd enligt figuren. Beräkna snittmomentet under lasten P som verkar på hjässan. (5p)



5. En fritt upplagd balk med böjstyvheten EI och längden L belastas av en dragande axialkraft P som verkar med excentriciteten $e \ll L$. Bestäm snittmoment i balken med hänsyn taget till utböjningen $w(x)$. Ledning: utböjningen fås som lösningen till $\frac{d^4 w}{dx^4} - n^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$. (5p)

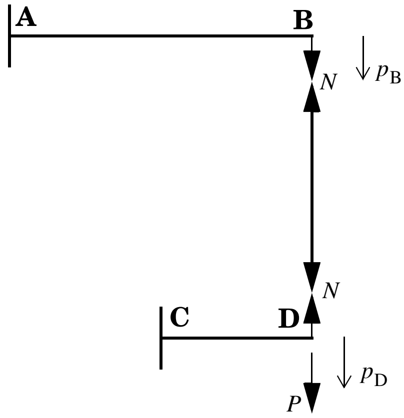




<u>Lösning 1:</u> Låt M_v beteckna snittmomentet i de båda axeldelarna. Delen **AB** vrids då vinkeln (Lundh ekv 6–11)

$\varphi_{AB} = \frac{M_v L}{GK_{AB}}$, där tvärsnittskonstanten är (Lundh ekv 6–12)

$K_{AB} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$. För delen **BC** får vi på samma sätt $\varphi_{BC} = \frac{M_v \cdot 2L}{GK_{BC}}$ med $K_{BC} = \frac{\pi}{32}D^4$. Kompatibilitetsvillkoret $\varphi_{AB} = \varphi_{BC}$ ger oss ekvationen $M_v LGK_{BC} = 2M_v LGK_{AB}$, vilket förenklas till $D^4 = 2(D^4 - d^4)$. Vi får alltså $d = \frac{D}{\sqrt{\sqrt{2}}} \approx 0{,}84D$



<u>Lösning 2:</u> Frilägg systemet och låt N beteckna axialkraften i stången **BD**. Den vertikala förskjutningen av **B** blir då (elementarfall, formelsamling sid 10) $p_B = \frac{N \cdot (2L)^3}{3 \cdot 2EI} = \frac{4NL^3}{3EI}$. På samma sätt fås den vertikala förskjutningen av **D** till

$p_D = \frac{(P - N)L^3}{3EI}$. Stångens förlängning blir (Lundh ekv 2–15)

$\delta = \frac{NL}{EA}$. Kompatibilitetssambandet $\delta = p_D - p_B$ ger oss ekvationen $\frac{NL}{EA} = \frac{PL^3}{3EI} - \frac{5NL^3}{3EI}$, ur vilken vi löser $N = \frac{P}{\frac{3I}{AL^2} + 5}$

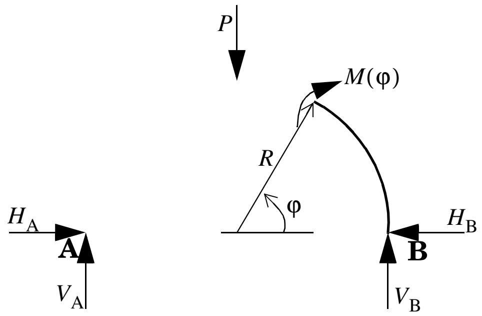
<u>Lösning 3:</u> Vi kommer att behöva huvudspänningarna, som fås som egenvärdena till spänningstensorn (Lundh ekv 9–6,37) $S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 30 \\ 0 & 40 & 20 \\ 30 & 20 & 25 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$. $\det(S - \sigma \boldsymbol{I}) = 0$ ger oss

$\sigma^3 - 125\ [\text{MPa}] \cdot \sigma^2 + 3600\ [\text{MPa}]^2 \cdot \sigma = 0$. Vi finner då att huvudspänningarna är $\sigma_1 = 80\ [\text{MPa}]$, $\sigma_2 = 45\ [\text{MPa}]$ och $\sigma_3 = 0$.

a: Effektivspänningen enligt von Mises beräknas enligt Lundh ekv 12–4, 6 eller 7. Man får

$\sigma_e = 69{,}5\ \text{MPa}$, så säkerheten mot plasticering är $s = \frac{\sigma_s}{\sigma_e} \approx 2{,}88$.

b: Effektivspänningen enligt Tresca fås som skillnaden mellan största och minsta huvudspänningen (Lundh ekv 12–14), $\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = 80\ \text{MPa}$, så säkerheten mot plasticering blir $s = \frac{\sigma_s}{\sigma_e} = 2{,}5$



<u>Lösning 4:</u> Betrakta jämvikt för strukturen. Vertikal jämvikt ger att $P - V_A - V_B = 0$, medan momentjämvikt kring **A** (figur) ger $PR - V_B \cdot 2R = 0$. Vi har alltså att $V_A = V_B = \frac{P}{2}$. Horisontell jämvikt ger att $H_A = H_B$,men längre än så kommer vi inte med enbart jämviktekvationer.

Snitta vid en vinkelkoordinat φ och teckna snittmomentet (figur): $M(\varphi) = V_B R(1-\cos\varphi) - H_B R\sin\varphi$

(sökt är $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$). Speciellt har vi $\frac{\partial M}{\partial H_B} = -R\sin\varphi$. Med utnyttjande av symmetrin får vi högra stödets horisontella förskjutning enligt Castiglianos 2a sats:

$$p_B = \frac{\partial}{\partial H_B}\left[2\int_0^{\pi/2}\frac{M^2}{2EI}Rd\varphi\right] = \int_0^{\pi/2}\frac{2M}{EI}\frac{\partial M}{\partial H_B}Rd\varphi = \frac{R^3}{EI}\int_0^{\pi/2}(P(1-\cos\varphi)\sin\varphi - 2H_B(\sin\varphi)^2)d\varphi$$

Villkoret $p_B = 0$ ger då (efter integration) ekvationen

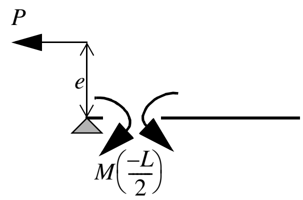
$P\left[-\cos(\varphi) - \frac{1}{2}(\sin\varphi)^2\right]_0^{\pi/2} - 2H_B\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = 0$, vilket förenklas till $\frac{P}{2} - \frac{\pi H_B}{2} = 0$; dvs $H_B = \frac{P}{\pi}$.

Med samtliga stödreaktioner beräknade får vi nu det sökta snittmomentet

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{P}{2}R\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right) - \frac{P}{\pi}R\sin\frac{\pi}{2} = PR\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\right) = \frac{\pi-2}{2\pi}PR$$

Lösning 5: Vi kan beräkna snittmomentet från sambandet $M(x) = -EIw''$, genom att beräkna $w(x)$.

Den karraktäristiska ekvationen (till differentialekv), $\lambda^4 - n^2\lambda^2 = 0$, har rötterna $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -n$ och $\lambda_4 = n$, så utböjningen kan skrivas $w(x) = (A+Bx)e^{0x} + \bar{C}e^{-nx} + \bar{D}e^{nx} = A + Bx + C\cosh nx + D\sinh nx$.



Eftersom problemet är symmetrisk kring $x = 0$, måste vi ha $w(x) = w(-x)$, så vi finner direkt att $B = D = 0$. De andra två integrationskonstanterna fås ur randvillkor; vi behöver bara beräkna C, eftersom vi söker $w'' = Cn^2\cosh nx$. Momentjämvikt kring stöden ger att $M\left(\frac{\pm L}{2}\right) = Pe$ och eftersom $M = -EIw''$, kan vi formulera villkoret $w''\left(\frac{\pm L}{2}\right) = \frac{-Pe}{EI}$. Det ger oss ekvationen $Cn^2\cosh\frac{nL}{2} = \frac{-Pe}{EI}$ ur vilken vi löser $C = \frac{-e}{\cosh\frac{nL}{2}}$; vi har då $w'' = \frac{-en^2\cosh nx}{\cosh\frac{nL}{2}} = \frac{-Pe\cosh nx}{EI\cosh\frac{nL}{2}}$ och slutligen $M(x) = -EIw'' = \frac{Pe\cosh nx}{\cosh\frac{nL}{2}}$.

(Den sista integrationskonstanten (A) kan beräknas ur villkoret $w\left(\frac{\pm L}{2}\right) = 0$)