Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

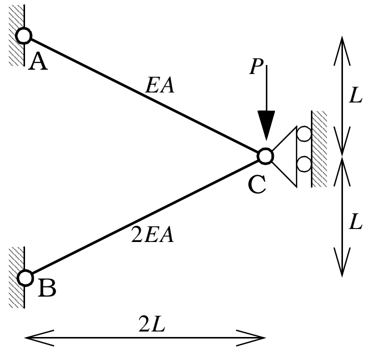
2 JUNI 2009

Tid och plats:	14.00—18.00 i V–huset. Lärare besöker salen ca 15 samt 16.30
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 3/6. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2009) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 15/6 2009 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 19/6.
Granskning:	Torsdag 18/6 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ (plan 3, avd dynamik, Eklandagatan 86) samt tisdag 1/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (2a våningen i södra trapphuset, nya M–huset).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

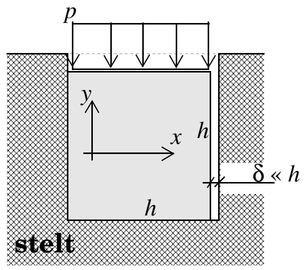
1.

Stångbärverket i figuren består av två stänger, **AC** med axialstyvheten EA och **BC** med axialstyvheten $2EA$, som är förenade i en punkt vars horisontalförskjutning är förhindrad. Konstruktionen belastas med en vertikalt riktad kraft P i den gemensamma knutpunkten. Bestäm stångkrafterna. (5p)



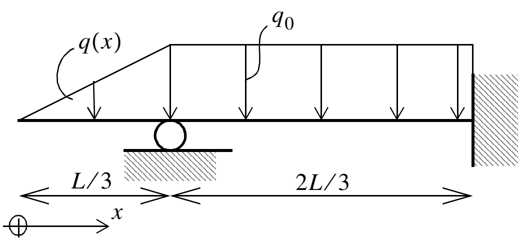
2.

En elastisk kropp i formen av en kub med kantlängd h är placerad i en kavitet – i horisontell ledd finns ett glapp $\delta \ll h$ enligt figuren. Materialet är lineärt elastiskt med elasticitetsmodulen E och tvärkontraktionstalet ν, medan omgivande material kan betraktas som oeftergivligt ('oändligt styvt'). Beräkna det tryck p som måste anbringas för att kroppen ska komma i kontakt med väggen, under antagande om att all friktion kan försummas och att utvidgning i z–led är förhindrad. (5p)



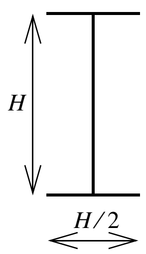
3.

En balk med konstant böjstyvhet EI belastas av en fördelad last med maximal intensitet q_0 (kraft/längd). Balkens längd är L och den är fast inspänd i sin högra ände samt vilar på ett rullager på ett avstånd $L/3$ från vänsteränden.



a: Bestäm det största böjande moment som uppträder i balken. (3p)

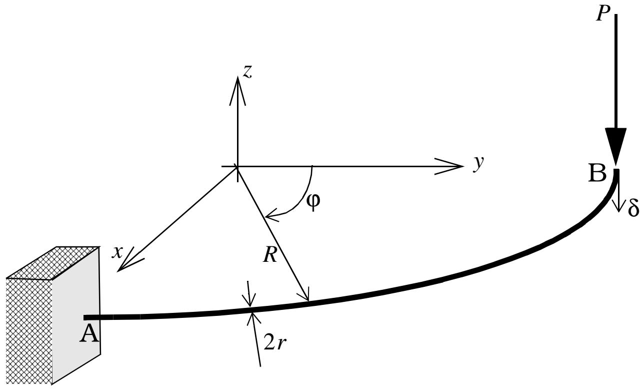
b: I ett visst snitt av balken är det böjande momentet $M = \dfrac{5q_0L^2}{108}$. Beräkna den största normalspänning som uppträder i snittet, pga detta moment. Balken har ett I–tvärsnitt med livhöjd H, flänsbredd $H/2$ och godstjockleken $t = H/20$. Sätt $L = 20H$ och uttryck spänningen i q_0 och H. (2p)



Godstjocklek $t = H/20$
($t \ll H$)

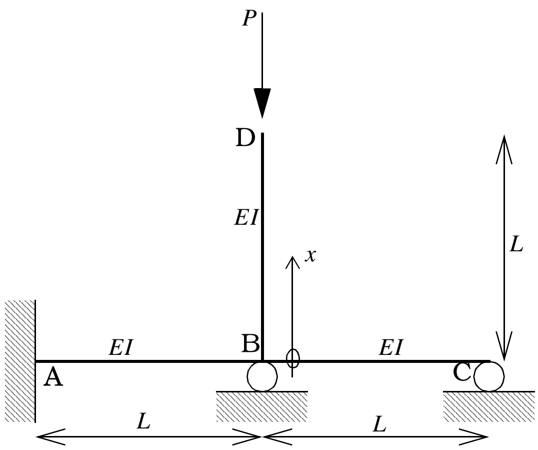
4.

Kvartscirkelbågen **AB** ligger i (x, y)–planet och belastas vid **B** av en kraft P i z–led, medan förskjutningar och rotationer är förhindrade vid **A**. Bågens krökningsradie är R och den har ett cirkulärt tvärsnitt med radien $r \ll R$; materialet är lineärt elastiskt med elasticitetsmodul E och skjuvmodul $G = \frac{E}{2}$. Beräkna förskjutningen δ av kraftens angreppspunkt och i kraftens riktning. Hänsyn ska tas till böjande och vridande moment, men tvärkraftens inverkan kan försummas. Uttryck δ i P, E, R och r. (5p)



5.

En balk **ABC** är fast inspänd vid **A** och rullagrad vid **B** samt **C**, så att två spann med vardera längden L bildas. Över mittstödet monteras en pelare BD med längden L. Samtliga delar har böjstyvheten EI. Pelaren belastas sedan med en tryckande axiallast P.

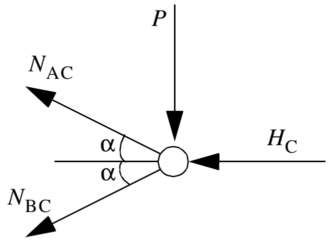


a: Ge, med tydlig motivation, en övre gräns för den kritiska lasten $P = P_{\text{kr}}$ med hänsyn till elastisk stabilitet. (1p)

b: Den kritiska lasten kan beräknas genom att lösa differentialekvationen

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + n^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, x \in (0, L)$$, där $n^2 = \frac{P}{EI}$. Ange och motivera de randvillkor som då behövs för att bestämma P_{kr}. Randvillkoren ska ges i termer av villkor på funktionen w och dess derivator. (4p)

Lösning 1: Frilägg knuten **C** — vertikal och horisontell jämvikt ger



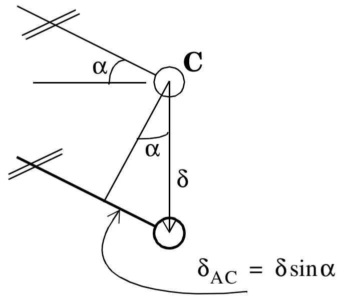
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$P - \frac{N_{AC}}{\sqrt{5}} + \frac{N_{BC}}{\sqrt{5}} = 0 \qquad (1)$$

respektive

$$H_C + \frac{2N_{AC}}{\sqrt{5}} + \frac{2N_{BC}}{\sqrt{5}} = 0 \qquad (2)$$

Om knuten **C** förskjuts ett stycke δ nedåt, förlängs **AC** $\delta_{AC} = \frac{\delta}{\sqrt{5}}$.



Kraft–förlängningssambandet för en stång (Lundh ekv 2–14) ger

$\delta_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot \sqrt{5}L}{EA}$. Ur dessa två samband löser vi

$$\delta = \frac{5N_{AC}L}{EA} \qquad (3)$$

Av symmetriskäl ser vi också att **BC** förkortas $\delta_{BC} = \frac{-\delta}{\sqrt{5}}$ och 2–14 ger här $\delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot \sqrt{5}L}{2EA}$, så

$$\delta = \frac{-5N_{BC}L}{2EA} \qquad (4)$$

Ur (3) och (4) får vi $N_{AC} = \frac{-N_{BC}}{2}$ som insatt i (1) ger $P + \frac{3}{2\sqrt{5}}N_{BC} = 0$. $N_{BC} = \frac{-2\sqrt{5}P}{3}$ $\quad N_{AC} = \frac{\sqrt{5}P}{3}$

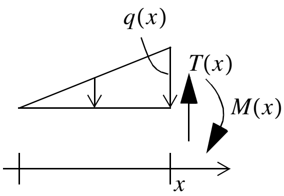
(Ekv (2) kan nu användas för att bestämma stödreaktionen i **C**)

Lösning 2: Eftersom all friktion kan försummas är alla skjuvspänningar noll. Vidare är $\sigma_x = 0$ eftersom kroppen är fri att expandera i x–led. Vertikal jämvikt kräver att $\sigma_y = -p$. Utvidgning i z–led är förhindrad så $\varepsilon_z = 0$; Lundh ekv 10–9 ger då

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) = 0 \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = -\nu p$$

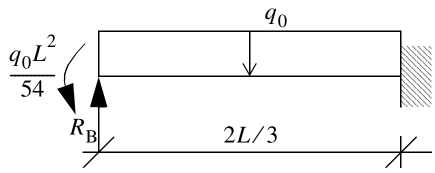
Vi får då axialdeformationen i x–led (Lundh ekv 10–7) som $\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) = \frac{\nu(1+\nu)p}{E}$. Kroppen kommer i kontakt med väggen då $\varepsilon_x h = \delta$, så $\frac{\delta}{h} = \frac{\nu(1+\nu)p}{E} \Rightarrow p = \frac{\delta E}{h\nu(1+\nu)}$

Lösning 3a: För delen $0 < x < \frac{L}{3}$ har vi att $q(x) = \frac{3q_0 x}{L}$. Snitta på ett avstånd $x < \frac{L}{3}$ från vänster ände och betrakta momentjämvikt:



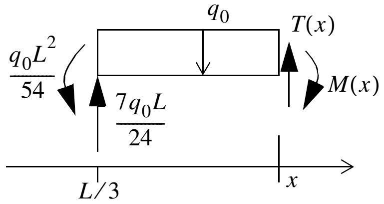
$M(x) - \frac{3q_0 x}{L} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = 0 \Rightarrow M(x) = \frac{q_0 x^3}{2L}$ Speciellt fås $M\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{q_0 L^2}{54} \approx 0{,}0185 q_0 L^2$.

Betrakta nu delen $\frac{L}{3} < x < L$; formelsamlingen sid 11 ger



$$R_B = \frac{3q_0\frac{2L}{3}}{8} + \frac{q_0L^2}{54} \cdot \frac{3}{2\frac{2L}{3}} = \frac{7q_0L}{24}$$. Snitta på ett avstånd $x > \frac{L}{3}$

från vänster ände och ställ upp momentjämvikt:



$$M(x) + \frac{7q_0L}{24} \cdot \left(x - \frac{L}{3}\right) - \frac{q_0L^2}{54} - q_0 \cdot \left(x - \frac{L}{3}\right) \cdot \left(\frac{x - \frac{L}{3}}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$M(x) = \frac{q_0L^2}{216}\left(108\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 135\frac{x}{L} + 37\right)$$

Momenten i intervallets ändpunkter blir $M\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{q_0L^2}{54}$ (som väntat) respektive

$M(L) = \frac{5q_0L^2}{108} \approx 0{,}0463q_0L^2$. Sök nu extrempunkter i intervallet: $\frac{dM}{dx} = 0 \Rightarrow 216\frac{x}{L} - 135 = 0 \Rightarrow x = \frac{5L}{8}$. Vi

får $M\left(\frac{5L}{8}\right) = \frac{-83}{16} \cdot \frac{q_0L^2}{216} \approx -0{,}0240q_0L^2$. $\therefore |M|_{max} = \underline{M(L) = \frac{5q_0L^2}{108}}$

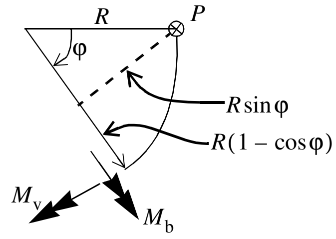
Lösning 3b: Areatröghetsmomentet fås med Steiners sats som $I = \frac{tH^3}{12} + 2\left(\frac{H}{2} \cdot t \cdot \left(\frac{H}{2}\right)^2\right)$; första termen är livets bidrag medan andra termen, där bidraget $\frac{Ht^3}{12}$ försummats, är bidraget från flänsarna. Med $t = \frac{H}{20}$ fås $I = \frac{H^4}{60}$. Den största normalspänningen i snittet blir då

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}|z|_{max}}{I} = \frac{\frac{5q_0L^2}{108} \cdot \frac{H}{2}}{\frac{H^4}{60}} = \{L = 20H\} = \underline{\frac{5000q_0}{9H}}$$

Lösning 4: Enligt Castiglianos 2a sats kan vi beräkna förskjutningen (δ) i kraftens (P) riktning som $\delta = \frac{\partial W}{\partial P}$. Med hänsyn tagen till böjande (M_b) och vridande (M_v) moment, har vi (Lundh ekv 15–52) $W = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{M_b^2}{2EI} + \frac{M_v^2}{2GK}\right) R d\varphi$. Vi har då

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial M_b}\frac{\partial M_b}{\partial P} + \frac{\partial W}{\partial M_v}\frac{\partial M_v}{\partial P} = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{M_b}{EI}\frac{\partial M_b}{\partial P} + \frac{M_v}{GK}\frac{\partial M_v}{\partial P}\right) R d\varphi \qquad (5)$$

Vi måste beräkna de två momenten. Snitta en vinkelkoordinat φ från kraften. Momentjämvikt kring de axlar M_b och M_v verkar ger $M_b - PR\sin\varphi = 0$ respektive $M_v + PR(1-\cos\varphi) = 0$ så vi får



$$M_b = PR\sin\varphi \qquad \frac{\partial M_b}{\partial P} = R\sin\varphi$$

$$M_v = -PR(1-\cos\varphi) \qquad \frac{\partial M_v}{\partial P} = -R(1-\cos\varphi)$$

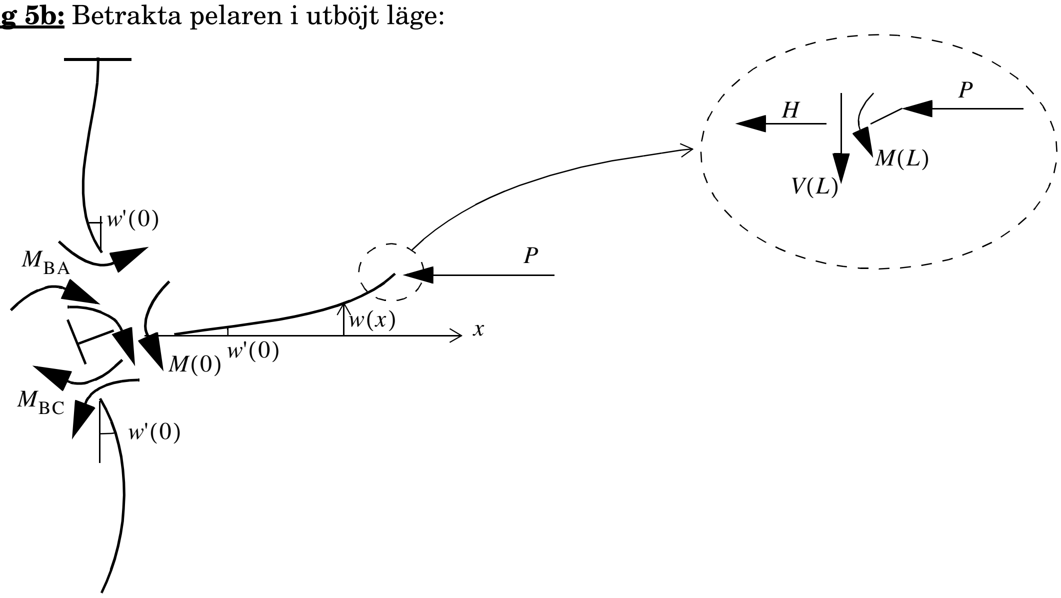
Insättning i (5) ger nu

$$\delta = PR^3\int_0^{\pi/2}\left(\frac{(\sin\varphi)^2}{EI} + \frac{(1-\cos\varphi)^2}{GK}\right)d\varphi = \frac{PR^3}{EI}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} + \frac{PR^3}{GK}\left[\frac{3\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} - 2\sin\varphi\right]_0^{\pi/2}$$

$$= PR^3\left(\frac{\pi}{4EI} + \frac{3\pi - 8}{4GK}\right) = \left\{G = \frac{E}{2}, I = \frac{\pi r^4}{4}, K = \frac{\pi r^4}{2}\right\} = \frac{PR^3}{Er^4}\left(1 + \frac{3\pi - 8}{\pi}\right) = \underline{\frac{4(\pi - 2)PR^3}{\pi E r^4}}$$

Lösning 5a: Om balken **ABC** haft en mycket stor böjstyvhet, “$EI = \infty$“, skulle pelaren **BD** motsvara Eulers första knäckfall med kritisk last $P_{kr} = \dfrac{\pi^2 EI}{4L^2}$. Eftersom detta svarar mot en styvare struktur än den givna, måste $\underline{\dfrac{\pi^2 EI}{4L^2}}$ vara en övre gräns för den kritiska lasten.

Lösning 5b: Betrakta pelaren i utböjt läge:



Vi börjar med de två randvillkoren vid $x = 0$. Vi har trivialt att $\underline{w(0) = 0}$. Betrakta nu momentjämvikt för den utsnittade knuten **B**:

$$M(0) + M_{BA} + M_{BC} = 0 \tag{6}$$

Formelsamlingen sid 9 och 11 ger $w'(0) = \dfrac{M_{BC}L}{3EI}$ respektive $w'(0) = \dfrac{M_{BA}L}{4EI}$, så vi har

$M_{BA} + M_{BC} = \dfrac{7EI}{L}w'(0)$; sätt in i (6) tillsammans med sambandet $M(0) = -EIw''(0)$. Vi får då

$-EIw''(0)+\frac{7EI}{L}w'(0) = 0$, som efter division med $-EI$ kan skrivas $w''(0)-\frac{7}{L}w'(0) = 0$.

De två villkoren vid $x = L$ fås ur jämviktsvillkor. Momentjämvikt ger att $M(L) = 0$ och eftersom $M = -EIw''$ har vi då att $w''(L) = 0$. Kraftjämvikt ger att $V(L) = 0$, men $V = T+Nw'$ (Lundh 8–59) där $T = -EIw'''$ och $N \approx H = -P$ gör att detta kan formuleras som $-EIw'''(L)-Pw'(L) = 0$. Division med $-EI$ ger sedan $w'''(L)+n^2w'(L) = 0$.

(Lösningen till den styrande differentialekvationen, $w(x) = A+Bx+C\cos nx+D\sin nx$, tillsammans med de 4 randvillkoren leder fram till

$$A = D\tan nL \qquad B = 0 \qquad C = -D\tan nL \qquad Dn^2\left(\tan nL-\frac{7}{nL}\right) = 0$$

Icke–triviala lösningar kräver då att $\tan nL-\frac{7}{nL} = 0$ — lägsta positiva roten (egenvärdet) är $nL \approx 1{,}3766$ som ger den kritiska lasten $P_{\mathrm{kr}} \approx \frac{(1{,}3766)^2EI}{L^2} \approx \frac{0{,}768\cdot\pi^2EL}{4L^2}$, dvs drygt 23 procent lägre än Euler 1.)