Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

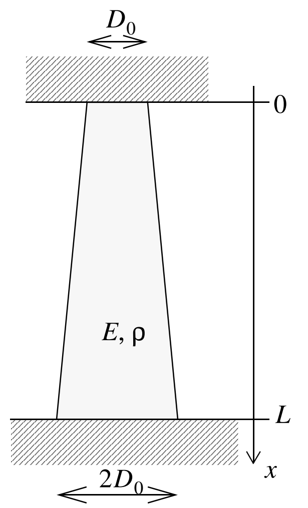
16 JANUARI 2009

Tid och plats:	8.30—12.30 i V–huset. Lärare besöker salen ca 9.30 samt 11.30
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler (Chalmers södra, plan 3) 19/1. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2008) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 27/1 2009 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 2/2.
Granskning:	Onsdag 28/1 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt måndag 2/2 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. (Chalmers södra, plan 3).

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

1.

En pelare med ett homogent cirkulärt tvärsnitt har i spänningsfritt tillstånd längden L. Tvärsnittets diameter varierar lineärt från D_0 i ena änden till $2D_0$ i den andra. Materialet är lineärt elastiskt med elasticitets modul E och densitet ρ. Pelaren monteras vertikalt mellan två stela plan på avståndet L från varandra enligt figuren. Beräkna normalkraften $N(x)$ i pelaren. (5p)

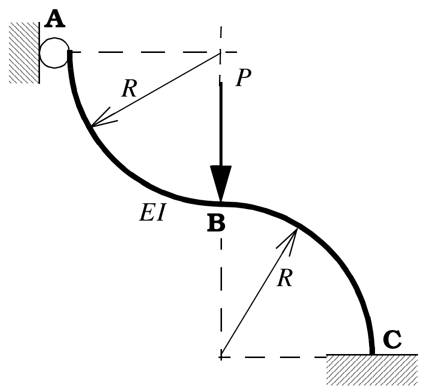


2.

I en punkt i en belastad kropp av lineärt elastiskt–idealplastisk material mätte man med trådtöjningsgivare upp normaltöjningarna $\varepsilon_x = 0{,}001$ och $\varepsilon_y = 0{,}002$ då belastningen var så stor att materialet precis började plasticera (i mätpunkten). Antag att det råder plant töjningstillstånd samt att von Mises flythoptes kan användas för materialet och beräkna skjuvningen γ_{xy}. För materialet gäller elasticitetsmodulen $E = 200\ \mathrm{GPa}$, Poissons tal $\nu = 0{,}3$ och flytspänningen (sträckgränsen) $\sigma_s = 500\ \mathrm{MPa}$. (5p)

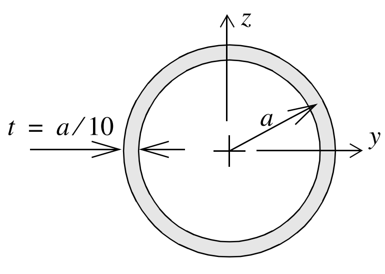
3.

Två kvartscirkelbågar, **AB** och **BC**, med krökningsradien R och böjstyvheten EI bildar en S–formad konstruktion enligt figuren. Vid **A** är horisontell rörelse förhindrad genom en rullagring och vid **C** är konstruktionen fast inspänd. Beräkna stödreaktionen vid **A**, då konstruktionen belastas med en vertikal kraft P vid **B**. Hänsyn behöver bara tas till böjdeformationer. (5p)



4.

Snittkrafterna i ett visst tvärsnitt i konstruktionen i uppgift 3 har beräknats till $N = \frac{-P}{2}$, $T_z = P$ och $M_y = \frac{PR}{2}$. Strukturen har ett tunnväggigt cirkulärt tvärsnitt med radien $a = \frac{R}{20}$ och godstjockleken $t = \frac{a}{10}$. Beräkna den till beloppet största normalspänningen, $|\sigma|_{max}$, och den största skjuvspänningen, τ_{max}, i tvärsnittet. (5p)

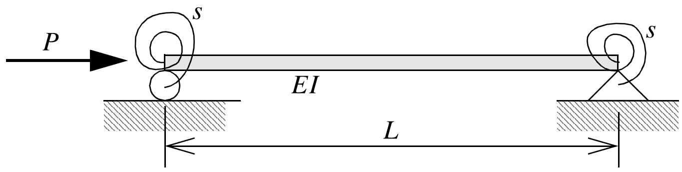


5.

En lineärt elastisk balk med böjstyvheten EI och längden L är elastiskt inspänd med styvheten $s = 2EI/L$ i båda ändar, dvs sambandet mellan infästningsmomentet M_{in} och ändens rotation θ är $M_{\text{in}} = s\theta$. Balken belastas med en axiellt tryckande kraft P enligt figuren.

a: Bestäm en övre och undre gräns för elastisk stabilitet (knäcklasten) (1p)

b: Härled knäckekvationen för balken, dvs den ekvation vars lösning ger det kritiska värdet på P (4p)



Lösning 1: Problemet är statiskt obestämt och löses enklast genom att lösa den styrande differentialekvationen (Lundh ekv 3–7 eller formelsamlingen sid 2): $-\frac{d}{dx}\left[EA\frac{du}{dx}\right] = K_xA$. Diametern är här $D(x) = D_0\left(1+\frac{x}{L}\right)$, så tvärsnittsytan blir$A(x) = \frac{\pi D^2(x)}{4} = \frac{\pi D_0^2}{4}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2$. Vidare är K_xA last per längdenhet, vilket i vårt fall är pelarens egentyngd dvs $K_xA = \rho gA = \frac{\pi D_0^2\rho g}{4}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2$. Insättning i differentialekvationen och integration ger

$$EA\frac{du}{dx} = C_1 - \frac{\pi D_0^2\rho gL}{12}\left(1+\frac{x}{L}\right)^3 \tag{1}$$

Division med EA ger $\frac{du}{dx} = \frac{4C_1}{\pi ED_0^2\left(1+\frac{x}{L}\right)^2} - \frac{\rho gL}{3E}\left(1+\frac{x}{L}\right)$ som efter integration ger axialförskjutningen $u = C_2 - \frac{4C_1L}{\pi ED_0^2\left(1+\frac{x}{L}\right)} - \frac{\rho gL^2}{6E}\left(1+\frac{x}{L}\right)^2$. Randvillkoren $u(0) = 0$ och $u(L) = 0$ ger

$$C_2 - \frac{4C_1L}{\pi ED_0^2} - \frac{\rho gL^2}{6E} = 0 \tag{2}$$

respektive

$$C_2 - \frac{4C_1L}{2\pi ED_0^2} - \frac{4\rho gL^2}{6E} = 0 \tag{3}$$

Om ekvation (2) subtraheras från (3) fås

$$\frac{2C_1L}{\pi ED_0^2} - \frac{\rho g L^2}{2E} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\pi D_0^2 \rho g L}{4} \qquad (4)$$

varvid $N(x) = \sigma A = EA\varepsilon = EA\frac{du}{dx} = \{\text{ekv (1) med } C_1 \text{ enl. (4)}\} = \underline{\frac{\pi D_0^2 \rho g L}{12}\left(3 - \left(1 + \frac{x}{L}\right)^3\right)}$

Lösning 2: Plan töjning innebär att deformationerna ut ur det belastade planet antas vara noll: $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$; för ett isotropt material har vi att $\tau_{ij} = G\gamma_{ij}$, så även skjuvspänningarna ut ur planet är noll: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Axialspänningarna fås med hjälp av de uppmätta normaltöjningarna och Hookes lag; Lundh ekv 10–10,11,12 med $\varepsilon_z = 0$ ger

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right) = 500 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right) \approx 653{,}85 \text{ MPa}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \cdot \frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \approx 346{,}15 \text{ MPa}$$

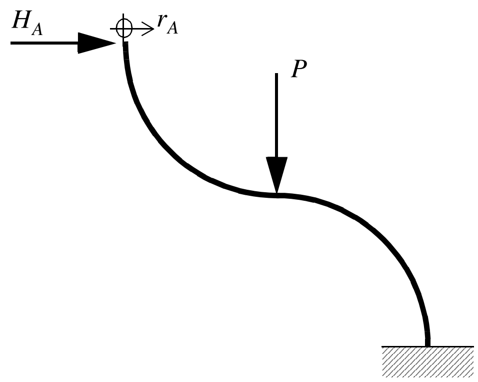
Effektivspänningen enligt von Mises hypotes, Lundh ekv 12–4 med $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, är

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_z\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

varur vi löser $\tau_{xy} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_e^2 - (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_x\sigma_z - \sigma_z\sigma_y))}$. Vid plasticering har vi $\sigma_e = \sigma_s$, så

$\tau_{xy} \approx 244{,}26 \text{ MPa}$, varvid skjuvdeformationen blir $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2\tau_{xy}(1+\nu)}{E} \approx 3{,}175 \cdot 10^{-3} \approx \underline{0{,}003}$

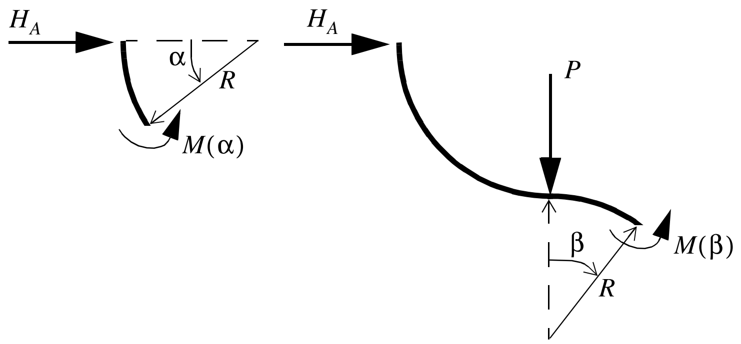
Lösning 3: Låt H_A vara den sökta kraften och r_A den associerade förskjutningen. Vi beräknar $r_A(P, H_A)$ med Castiglianos 2a sats, varefter H_A fås ur kompatibilitets-villkoret $r_A = 0$.



Momentjämvikt ger momentet i den övre bågdelen som

$$M(\alpha) = H_A R \sin\alpha$$

så



$$\frac{dM}{dH_A} = R\sin\alpha$$

I den undre delen får vi på samma sätt $M(\beta) = H_A R(2 - \cos\beta) - PR\sin\beta$ och $\frac{dM}{dH_A} = R(2 - \cos\beta)$.

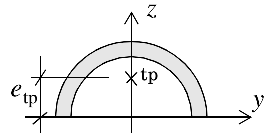
Castiglianos 2a sats ger nu

$$r_A = \frac{1}{EI}\left(\int_0^{\pi/2} M\frac{dM}{dH_A}Rd\alpha + \int_0^{\pi/2} M\frac{dM}{dH_A}Rd\beta\right) = \frac{R^3}{EI}\int_0^{\pi/2} (H_A(\sin^2\theta + (2 - \cos\theta)^2) - P\sin\theta(2 - \cos\theta))d\theta =$$

$$= \frac{R^3}{EI}\left[\frac{5\pi - 8}{2}H_A - \frac{3}{2}P\right]$$

$r_A = 0 \Rightarrow H_A = \frac{3P}{5\pi - 8}$

Lösning 4: Normalspänningen beräknas enligt Lundh ekv 7–91 som



$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y z}{I_y}$. Här är tvärsnittsytan $A = 2\pi at = \frac{\pi a^2}{5}$ och yttröghetsmo-

mentet (formelsamlingen sid 6) $I_y = \pi a^3 t = \frac{\pi a^4}{10}$. Insättning ger

$\sigma = \frac{-5P}{2\pi a^2} + \frac{P \cdot 20a \cdot z}{\frac{\pi a^4}{10}} = \frac{-5P}{2\pi a^2} + \frac{200P}{\pi a^3}z$. Den till beloppet största spänningen i tvärsnittet, fås då för

$z = -a$: $|\sigma|_{\max} = \left|\frac{-5P}{2\pi a^2} - \frac{200P}{\pi a^2}\right| = \frac{405P}{2\pi a^2}$ (tryckspänning).

Skjuvspänningen fås enligt Lundh ekv 7–48 med $\tau = \frac{T_z S_{A*}}{I_y b}$. Här är $b = 2t = \frac{a}{5}$ oberoende av var

vi delar tvärsnittet, så störst skjuvspänning i snittet fås där S_{A*} blir störst, dvs längs linjen $z = 0$:

$S_{A*} = \frac{A}{2}e_{\text{tp}} = \pi at \cdot \frac{2a}{\pi} = \frac{a^3}{5}$. Vi får alltså $\tau_{\max} = \frac{P \cdot \frac{a^3}{5}}{\frac{\pi a^4}{10} \cdot \frac{a}{5}} = \frac{10P}{\pi a^2}$

Lösning 5a: Med $s = 0$ kan balkändarna rotera utan motstånd och vi har Eulers 2a knäckfall för

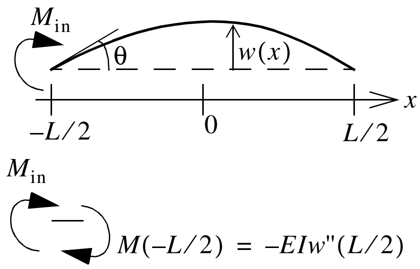
vilket den kritiska lasten är $P_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$. Då $s \to \infty$ blir ändarnas rotation förhindrad och vi har

Eulers 4e knäckfall, med $P_{\text{kr}} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$. Med $s \neq 0$ men ändligt, måste då $\frac{\pi^2 EI}{L^2} < P_{\text{kr}} < \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$

Lösning 5b: Vid instabilitet ges den transversella utböjningen av

$w(x) = A + Bx + C\cos nx + D\sin nx$, där $n = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ (Lundh ekv 8–66). Med enbart homogena randvillkor, finns alltid den triviala lösningen $w \equiv 0$ ($A = B = C = D = 0$); knäcklasten fås som det lägsta värdet på P som ger ett n som tillåter en icke–trivial lösning.

Genom att lägga origo i balkens mittpunkt kan vi enkelt utnyttja symmetrin: $w(x) = w(-x) \Rightarrow B = D = 0$. Vi har då



$$\begin{aligned} w &= A + C\cos nx \\ w' &= -Cn\sin nx \\ w'' &= -Cn^2\cos nx \end{aligned}$$

Randvillkoret $w\left(\frac{\pm L}{2}\right) = 0$ ger $A = -C\cos\frac{nL}{2}$. Momentjämvikt vid $x = \frac{-L}{2}$ kräver att $M\left(\frac{-L}{2}\right) = -M_{\text{in}}$; med $M(-L/2) = -EIw''(L/2)$ och $M_{\text{in}} = s\theta$, där $\theta = w'\left(\frac{-L}{2}\right)$, fås randvillkoret $w''\left(\frac{-L}{2}\right) - \frac{s}{EI}w'\left(\frac{-L}{2}\right) = 0$. Insättning ger

$$-Cn\left(n\cos\frac{nL}{2} + \frac{s}{EI}\sin\frac{nL}{2}\right) = 0$$

Icketriviala lösningar kräver att uttrycket inom parentes är noll. ($s = 0$ ger knäckekvationen $\cos\frac{nL}{2} = 0$, med lägsta positiva rot $\frac{nL}{2} = \frac{\pi}{2}$ som ger knäcklasten $P_{\text{kr}} = n^2EI = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ (dvs Eulers andra knäckfall som väntat). $s \to \infty$ ger knäckekvationen $\sin\frac{nL}{2} = 0$ som har minsta positiva rot $\frac{nL}{2} = \pi$, vilket ger knäcklasten $P_{\text{kr}} = n^2EI = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$ (Eulers fjärde knäckfall)).

Multiplikation med $\frac{EI}{s\cos\frac{nL}{2}}$ och insättning av $s = \frac{2EI}{L}$ ger oss nu knäckekvationen $\frac{nL}{2} + \tan\frac{nL}{2} = 0$

(Lägsta positiva roten är $\frac{nL}{2} \approx 2{,}028$, vilket ger knäcklasten $P_{\text{kr}} \approx \frac{4EI \cdot (2,028)^2}{L^2} \approx \frac{1{,}67\,\pi^2 EI}{L^2}$).