Institutionen för tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola

Lösningar

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA F — MHA 081

22 AUGUSTI 2008

Tid och plats:	14.00—18.00 i V–huset. Lärare besöker salen ca 15 samt 17
Hjälpmedel:	**1.** Lärobok i hållfasthetslära: Hans Lundh, *Grundläggande hållfasthetslära*, Stockholm, 2000. **2.** *Handbok och formelsamling i hållfasthetslära*, KTH, eller utdrag ur denna; vid Inst. for tillämpad mekanik utarbetad formelsamling. **3.** Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar. Medtagna böcker får innehålla 'normala' marginalanteckningar, men inga lösningar till problemuppgifter. Lösa anteckningar i övrigt är inte tillåtna. Vid tveksamma fall: kontakta skrivningsvakten **innan** hjälpmedlet används. **4.** Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.
Lärare:	Peter Möller, tel (772) 1505
Lösningar:	Anslås vid ingången till institutionens lokaler 23/8. Se även kurshemsidan.
Poängbedömning:	Varje uppgift kan ge maximalt 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. Betygsgränser: 10–14p ger betyg 3; 15–19p ger betyg 4; för betyg 5 krävs minst 20p. Ytterligare 1 poäng ges för varje korrekt löst inlämningsuppgift under kursens gång (lp 4 2008) — dock krävs ovillkorligen minst 7 poäng på tentamen. För att få poäng på en uppgift måste lösningen vara läsligt och uppställda ekvationer/samband motiveras (det ska vara möjligt att följa tankegången). Använd entydiga beteckningar och rita tydliga figurer. Kontrollera dimensioner och (där så är möjligt) rimligheten i svaren.
Resultatlista:	Anslås **senast** 1/9 2008 på samma ställe som lösningarna samt på kurshemsidan. Resultaten sänds till betygsexpeditionen senast 8/9.
Granskning:	Onsdag 3/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ samt fredag 5/9 $12^{\underline{00}}$–$13^{\underline{00}}$ på inst. **Eklandagatan 86, plan 3**.

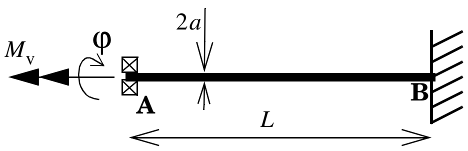
Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad

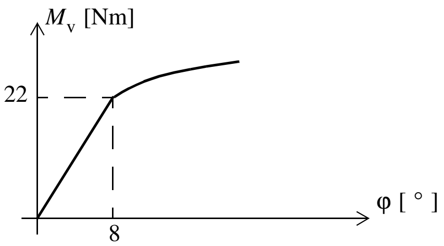
1.

En axel med längden $L = 0{,}5\ \mathrm{m}$ har ett massivt cirkulärt tvärsnitt med radien $a = 5\ \mathrm{mm}$. Den monteras i en enkel konstruktion för materialprovning, så att den kan rotera fritt vid **A**, men hålls fixerad vid **B** (se figur nedan). Vid provning avläses vridningsvinkeln φ för olika storlek på det vridande momentet M_v. Man noterar ett lineärt samband mellan moment och vinkel upp till $(\varphi, M_\mathrm{v}) = (8°,\ 22\ \mathrm{Nm})$; vid större moment är sambandet olineärt p g a plasticering.

a: Bestäm materialets skjuvmodul G. (2p)

b: Bestäm sträckgränsen σ_s om det kan antas att materialet följer von Mises flythypotes. (3p)





Lösning 1a: Sambandet mellan vridmoment och vinkel (H Lundh ekv 6–11) ger $G = \dfrac{M_\mathrm{v} L}{K\varphi}$ där

$K = \dfrac{\pi a^4}{2}$. Med $\varphi = 8 \cdot \dfrac{\pi}{180}\ \mathrm{rad}$ för $M_\mathrm{v} = 22\ \mathrm{Nm}$ fås $G = \dfrac{22 \cdot 0{,}5}{\frac{\pi}{2}(5 \cdot 10^{-3})^4 \cdot 8 \cdot \frac{\pi}{180}}\ [\mathrm{Pa}] = 80{,}25\ \mathrm{GPa}$

Lösning 1b: Maximal skjuvspänning i axeln är $\tau_{max} = \dfrac{2M_\mathrm{v}}{\pi a^3}$ (H Lundh ekv 6–14). Begynnande plasticering fås då $M_\mathrm{v} = 22\ \mathrm{Nm}$, dvs då $\tau_{max} = \dfrac{2 \cdot 22}{\pi(5 \cdot 10^{-3})^3}\ \mathrm{Pa} = 112\ \mathrm{MPa}$. Plasticering vid ren skjuvning, enligt von Mises hypotes, inträffar då (se t ex H Lundh ekv 12—13) $\sigma_\mathrm{e} = \sqrt{3}|\tau_{max}| = \sigma_\mathrm{s}$, så

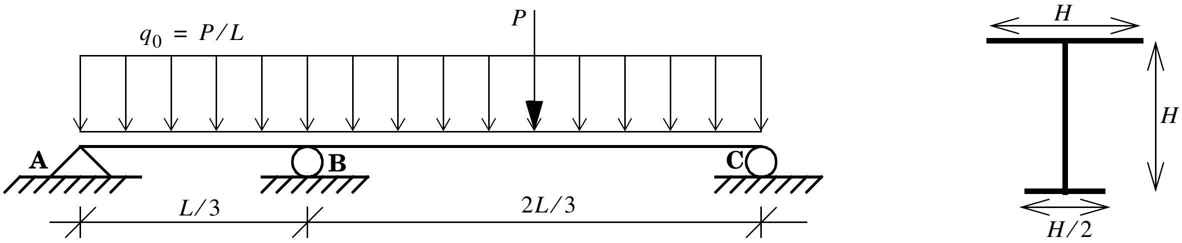
$\sigma_s \approx 194\ [\mathrm{MPa}]$

2.

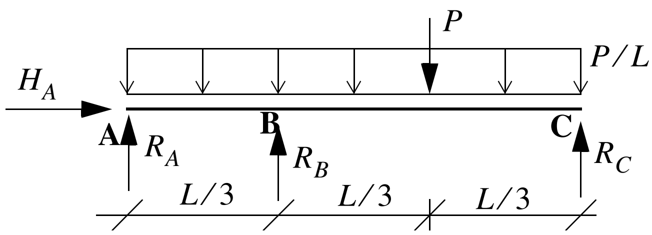
En fritt upplagd balk med längden L och böjstyvheten EI har ett inre stöd, så att två spann med längderna $L/3$ respektive $2L/3$ bildas. Balken belastas utmed hela sin längd med en utbredd last med den konstanta intensiteten $q_0 = P/L$ samt mitt på det längsta spannet av en punktlast P.

a: Beräkna samtliga stödreaktioner. (3p)

b: Momentet under punktlasten P blir $|M| = \frac{23PL}{144}$. Beräkna den till beloppet största normalspänningen (i tvärsnittet under P), om balken har ett tunnväggigt, enkelsymetriskt, H–tvärsnitt enligt figuren till höger nedan. För godstjockleken t gäller att $t \ll H$ (2p)



Lösning 2a: Inför stödreaktionerna. Horisontell jämvikt ger omedelbart att $H_A = 0$. Vertikal jämvikt ger att

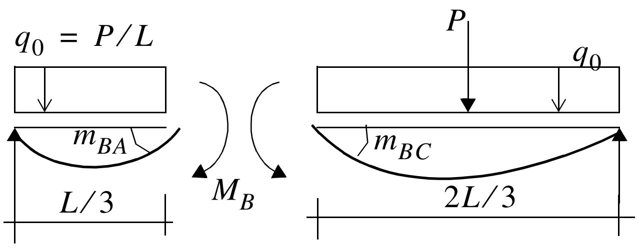


$$R_A + R_B + R_C - 2P = 0 \qquad (1)$$

Momentekvation kring A ger

$$\frac{R_B L}{3} + R_C L - \frac{2PL}{3} - \frac{PL}{2} = 0 \qquad (2)$$

Vi har nu två ekvationer med tre obekanta, och kan inte ställa upp någon mer (oberoende) jämviktsekvation. Använd något kompatibilitetsvillkor för att ställa upp något ytterligare samband — studera t ex rotationerna på ömse sidor av mittstödet: Elementarfall sid 9 ger

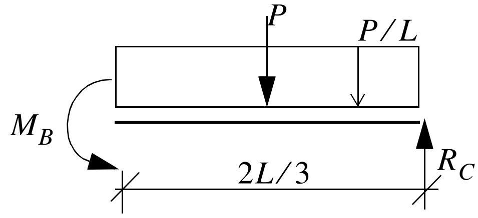


$$m_{BA} = \frac{q_0\left(\frac{L}{3}\right)^3}{24EI} - \frac{M_B\frac{L}{3}}{3EI} = \frac{PL^2}{27\cdot 24EI} - \frac{M_BL}{9EI}$$

$$m_{BC} = \frac{q_0\left(\frac{2L}{3}\right)^3}{24EI} + \frac{P\left(\frac{2L}{3}\right)^2}{16EI} - \frac{M_B\frac{2L}{3}}{3EI} = \frac{PL^2}{3\cdot 27EI} + \frac{PL^2}{36EI} - \frac{2M_BL}{9EI}$$

Kompatibilitetsvillkoret $m_{BA} + m_{BC} = 0$ ger $\frac{M_BL}{3EI} - \frac{PL^2}{3EI}\left(\frac{1}{8\cdot 27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{12}\right) = 0$, ur vilket vi får $M_B = \frac{PL}{8}$.

Momentjämvikt för spannet BC, kring B ger nu:



$M_B + R_C\frac{2L}{3} - P\frac{L}{3} - \frac{P}{L}\cdot\frac{2L}{3}\cdot\frac{L}{3} = 0$; detta ger

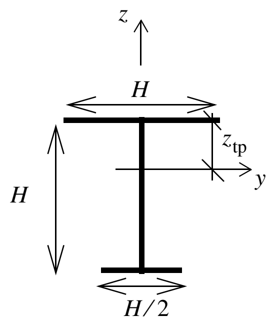
$R_C = \frac{3}{2L}\left(\frac{5PL}{9} - M_B\right) = \frac{31P}{48}$. Insättning i (2) ger nu

$R_B = 3\left(\frac{7P}{6} - R_C\right) = \frac{25P}{16}$. Slutligen ger (1) att

$R_A = 2P - R_B - R_C = \frac{-5P}{24}$.

Stödreaktionerna blir $H_A = 0$ $\quad R_A = \frac{-5P}{24}$ $\quad R_B = \frac{25P}{16}$ $\quad R_C = \frac{31P}{48}$

Lösning 2b: Bestäm först tyngdpunktens läge i tvärsnittet. Statiskt moment med avseende på en axel genom övre flänsen ger



$z_{\text{tp}}A = \frac{Ht}{2}\cdot H + Ht\cdot\frac{H}{2}$, där $A = \frac{5Ht}{2}$ är tvärsnittsytan; man får $z_{\text{tp}} = \frac{2H}{5}$.

Yttröghetsmomentet med avseende på y–axeln blir då (Steiners sats,

Lundh ekv 7–42) $I_y = \frac{Ht^3}{12} + Ht\cdot z_{\text{tp}}^2 + \frac{tH^3}{12} + Ht\cdot\left(\frac{H}{2} - z_{\text{tp}}\right)^2 + \frac{(H/2)t^3}{12} + \frac{Ht}{2}\cdot(H - z_{\text{tp}})^2$;

de två första termerna är bidraget från övre flänsen, termerna 3 och 4 är bidraget från livet, och de sista två termerna är undre flänsens bidrag. Försummas termerna som är kubiska i godstjockleken ($t \ll H$), fås $I_y \approx \frac{13tH^3}{30}$. Vi har också att $|z|_{\max} = H - z_{\text{tp}} = \frac{3H}{5}$.

Det till beloppet största normalspänningen av det böjande momentet blir då

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M||z|_{\max}}{I_y} = \frac{\frac{23PL}{144}\cdot\frac{3H}{5}}{\frac{13tH^3}{30}} = \frac{23PL}{104tH^2}$$

3.

Spänningarna i en punkt i en linerärt elastisk kropp har beräknats till $\tau_{xy} = 10\ \text{MPa}$, $\tau_{yz} = 30\ \text{MPa}$ och övriga spänningskomponenter till noll.

a: Bestäm den största skjuvspänningen som uppträder i punkten. (3p)

b: Antag att ett hydrostatiskt tryck p överlagrar den givna belastningen, så att $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ och övriga spänningskomponenter oförändrade. Hur mycket **förändras** då effektivspänningen enligt Trescas flythypotes, om $p = 32\ \text{MPa}$? (2p)

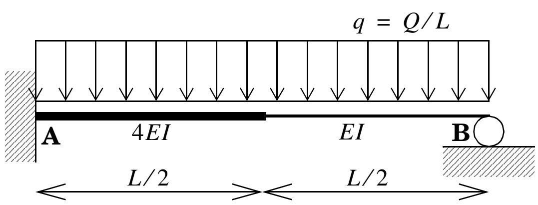
Lösning 3a: Största skjuvspänningen kan beräknas med hjälp av största och minsta egenvärdena σ_i till spänningstensorn $S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$, dvs huvudspänningarna; om vi numrerar dessa enligt $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, så gäller att $\tau_{\max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. Huvudspänningarna fås alltså som rötterna till tredjegradspolynomet $\det(S - \sigma_i I) = \det\left\{\begin{bmatrix} -\sigma_i & 10 & 0 \\ 10 & -\sigma_i & 30 \\ 0 & 30 & -\sigma_i \end{bmatrix}\right\} = -\sigma_i^3 + 1000\sigma_i$. Vi finner trivialt att $\sigma_2 = 0$ och

$\sigma_1 = -\sigma_3 = \sqrt{1000}\ \text{MPa}$, så $\tau_{\max} = \dfrac{\sqrt{1000} - (-\sqrt{1000})}{2}\ \text{MPa} \approx \underline{\underline{32\ \text{MPa}}}$

Lösning 3b: Effektivspänningen påverkas inte av ett överlagrat hydrostatiskt tryck (se t.ex Lundh avsnitt 12.1). (Alternativ lösning: använd Lundh ekv 12–4 för att beräkna effektivspänningen före och efter det att trycket överlagras).

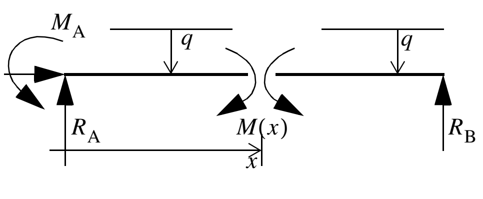
4.

Balken i figuren har varierande böjstyvhet och belastas med en jämt fördelad last med intensiteten $q = Q/L$, där Q är lastresultanten. Hur många procent större blir inspänningsmomentet (dvs momentet vid **A**) jämfört med om balken hade haft konstant böjstyvhet. (5p)



Lösning 4: Om balken hade konstant böjstyvhet (EI) så skulle inspänningsmomentet bli (Elementarfall sid 11) $M_A = \dfrac{qL^2}{8} = \dfrac{QL}{8}$.

Betrakta nu den givna konstruktionen med inspänningsmomentet som en bekant yttre belastning. Enligt Castiglianos 2a sats blir rotationen vid **A**



$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M_A}\int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI(x)}dx = \int_0^{L/2} \frac{\partial M}{\partial M_A}\frac{M}{4EI}dx + \int_{L/2}^{L} \frac{\partial M}{\partial M_A}\frac{M}{EI}dx$$. Momentjämvikt kring **B** ger att $R_A = \frac{M_A}{L} + \frac{Q}{2}$.

Momentjämvikt kring ett snitt vid en punkt x (del till vänster om snittet) ger oss

$M(x) = M_A\left(1 - \frac{x}{L}\right) - \frac{QL}{2}\left(\frac{x}{L} - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$, så $\frac{\partial M}{\partial M_A} = \left(1 - \frac{x}{L}\right)$. Insättning ger

$$\theta_A = \frac{1}{4EI}\int_0^{L/2}\left(M_A\left(1-\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{QL}{2}\left(\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)\right)dx + \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L}\left(M_A\left(1-\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{QL}{2}\left(\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)\right)dx$$

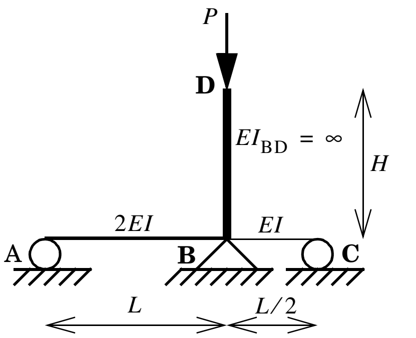
$$= \frac{L}{EI}\left(\frac{11M_A}{96} - \frac{31QL}{1536}\right)$$

Kompatibilitetsvillkoret $\theta_A = 0$ ger oss då att $M_A = \frac{31QL}{176}$. Detta är

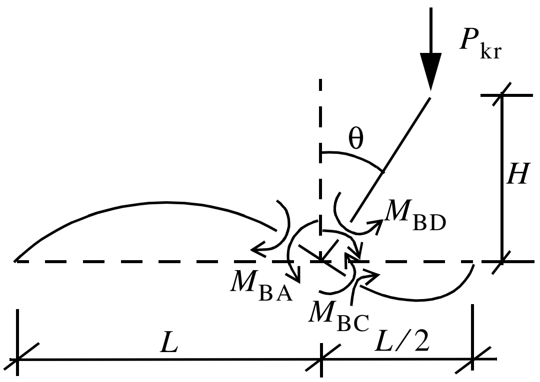
$\frac{\frac{31}{176} - \frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} \cdot 100 = \frac{9}{22} \cdot 100 \approx 41\%$ större än för den jämnstyva konstruktionen.

5.

Beräkna kritisk last $P = P_{kr}$ med avseende på elastisk stabilitet för konstruktionen i figuren. Observera att balkarna i de två spannen, **AB** respektive **BC**, har olika längd och olika böjstyvhet. Flexibiliteten hos pelaren **DB** får försummas (d v s den får betraktas som oändligt styv). (5p)



Lösning 5: Betrakta konstruktionen i utböjt läge; vinkeln θ är liten, d v s vi tittar på konstruktionen just i det läge den knäcker ut. I figuren är endast snittmomenten vid **B** utritade — normal– och tvärkrafter visas ej. Momentjämvikt vid **B** för pelaren **BD** ger ett $M_{BD} = P_{kr}H\theta$ där vi utnyttjat att $\sin\theta \approx \theta$.



Elementarfall sid 9 ger $\theta = M_{BA} \cdot \frac{L}{3 \cdot 2EI}$ samt

$\theta = M_{BC} \cdot \frac{L/2}{3EI}$ för delarna **AB** respektive **BC**. Detta ger att $M_{BA} = M_{BC} = \frac{6EI}{L} \cdot \theta$. Momentjämvikt

för den utsnittade delen vid **B** ger att $M_{BD} - M_{BA} - M_{BC} = 0$, så att vi får $P_{kr}H\theta - 2 \cdot \frac{6EI}{L}\theta = 0$. Ur

detta löses $P_{kr} = \frac{12EI}{HL}$.