TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Lördagen den 12:e Januari 2008, klockan 08.30–12.30, i V-huset
Lärare: Ragnar Larsson, ankn 5267

Salsbesök av lärare: c:a kl 9.30 och 11.30.
Lösningar: anslås på kurshemsidan måndag 14/1.
Preliminärt rättningsresultat: meddelas via LADOK.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik fredag 18/1 kl 12.30–13.30.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.
2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

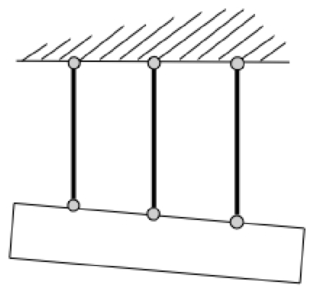
Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

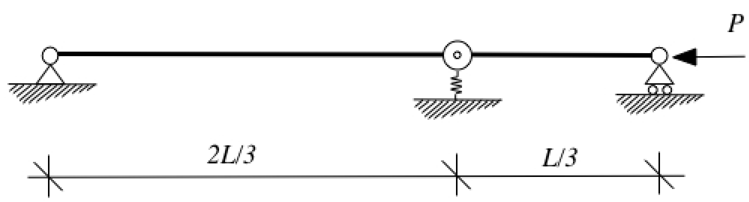
Räkna lugnt!

Uppgifter

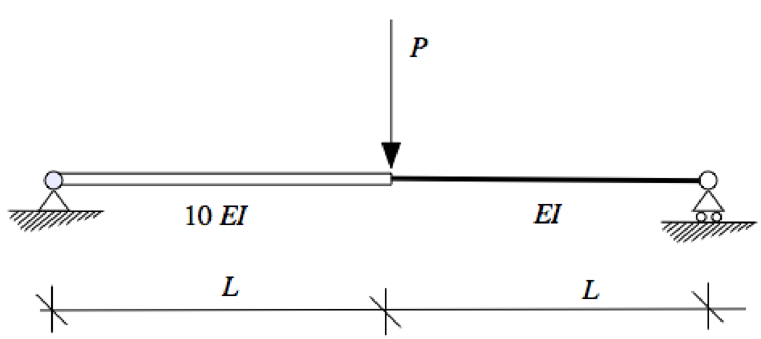
1 Tre elastiska stänger med elasticitetsmodul E och tvärsnittsarea A skall ledat fästas i ett stelt tak samt i en stel kropp enligt figur. Avståndet mellan stängerna betecknas a. De två stängerna till vänster hade före infästning längd L, stången längst till höger hade längd $L + \delta$, där $\delta << L$ så att vi kan anta att $L + \delta \approx L$. *Bestäm krafterna i stängerna efter infästning.* (5p)



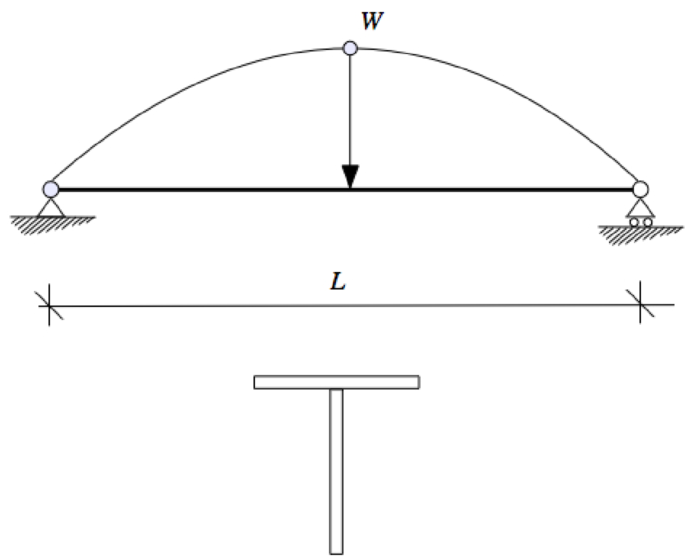
2 Två **stela** stänger är förenade med en rotationsfjäder, som i sin tur är understödd av en fjäder, enligt figur. Fjäderns styvhet betecknas k, rotationsfjäderns styvhet är kL^2. *Bestäm kritiskt värde på lasten P.* (5p)



3 En balk bestående av två delar med olika böjstyvhet är belastad med en punktlast P enligt figur. *Bestäm med valfri metod utböjningen mitt på balken.* (5p)



4 En balk är belastad med en utbredd last som tar formen av en parabel med intensitet $Q(x) = 4Wx(L-x)/L^2$ (positiv nedåt). Balken består av två ihoplimmade delar; dess tvärsnitt formar ett T bestående av två rektanglar med storlek $t \times 10\,t$. Data: $W = 100$ kN/m, $t = 1$ cm, $L = 10$ m. *Bestäm till beloppet maximala tvärkraften i limfogen.* (5p)



5 En cirkulär axel med konstant densitet ϱ, längd L och ytterdiameter D borras ur med ett centralt placerat hål så att dess vikt minskas med en faktor a (vikt efter urborrning $= a \times$ ursprunglig vikt). Den ursprungliga balken kunde bära det vridande momentet M_{vs} innan plasticering. *Hur stort vridande moment kan den bära efter urborrning?* (5p)

TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Onsdagen den 29:e Augusti 2008, klockan 08.30–12.30, i M-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 9.30 och 11.30.
Lösningar: anslås på kurshemsidan onsdag 29/8.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik senast den 7/9.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik torsdag 7/9 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.

2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

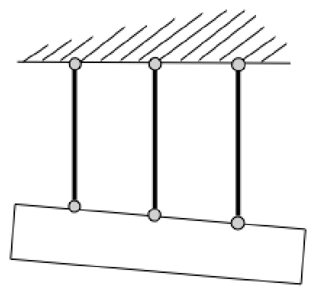
Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

1 Tre elastiska stänger med elasticitetsmodul E och tvärsnittsarea A skall ledat fästas i ett stelt tak samt i en stel kropp enligt figur. Avståndet mellan stängerna betecknas a. De två stängerna till vänster hade före infästning längd L, stången längst till höger hade längd $L + \delta$, där $\delta << L$ så att vi kan anta att $L + \delta \approx L$. *Bestäm krafterna i stängerna efter infästning.* (5p)



Svar: Numrera stängerna från vänster till höger. Med beteckningarna n_1, n_2, och n_3 för stängernas förlängningar har vi det geometriska sambandet

$$n_2 - n_1 = \frac{1}{2}(\delta + n_3 - n_1).$$

Jämvikt ger att

$$N_1 + N_2 + N_3 = 0, \quad 2\,N_3 + N_2 = 0.$$

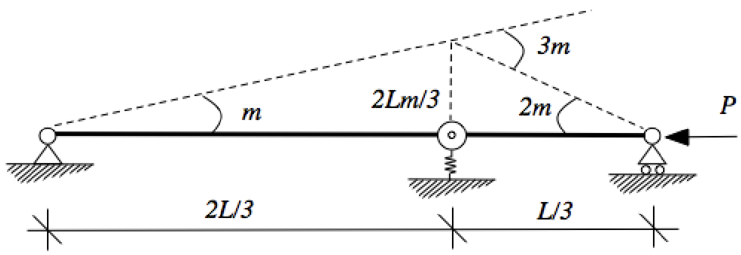
Materialsambanden är att

$$n_1 = \frac{N_1 L}{EA},\ n_2 = \frac{N_2 L}{EA},\ n_3 = \frac{N_3(L+\delta)}{EA} \approx \frac{N_3 L}{EA},$$

och vi får att

$$\boxed{N_1 = -\frac{EA\,\delta}{6L},\ N_2 = \frac{EA\,\delta}{3L},\ N_3 = -\frac{EA\,\delta}{6L}}$$

2 Två **stela** stänger är förenade med en rotationsfjäder, som i sin tur är understödd av en fjäder, enligt figur. Fjäderns styvhet betecknas k, rotationsfjäderns styvhet är kL^2. *Bestäm kritiskt värde på lasten P.* (5p)



Svar: Enligt figuren vrids rotationsfjädern vinkeln $3m$ samtidigt som fjädern förlängs sträckan $2Lm/3$ och kraften förflyttas sträckan Δ som ges av

$$\Delta = L - \frac{2L}{3}\cos m - \frac{L}{3}\cos 2m \approx L - \frac{2L}{3}\left(1 - \frac{m^2}{2}\right) - \frac{L}{3}\left(1 - \frac{4m^2}{2}\right) = m^2 L$$

Den totala potentiella energin är alltså

$$\Pi(m) = \frac{1}{2}k9m^2L^2 + \frac{1}{2}k(2Lm/3)^2 - PLm^2$$

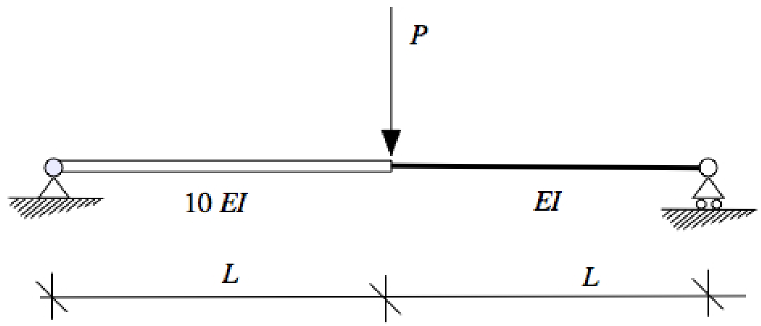
och

$$\frac{d^2\Pi}{dm^2} = 9\,k\,L^2 + \frac{4}{9}k\,L^2 - 2PL.$$

Kritisk last ges av $\frac{d^2\Pi}{dm^2} = 0$, varför

$$\boxed{P_{\mathrm{kr}} = \frac{85}{18}k\,L}$$

3 En balk bestående av två delar med olika böjstyvhet är belastad med en punktlast P enligt figur. *Bestäm med valfri metod utböjningen mitt på balken.* (5p)



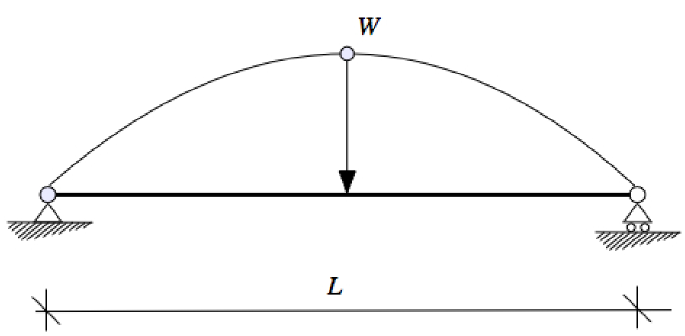
Svar: Använd t.ex. Castigliano. Stödreaktionerna är $R = P/2$ så att

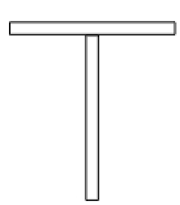
$$W = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2x^2}{40EI}dx + \frac{1}{2}\int_0^L \frac{P^2y^2}{4EI}dy$$

där x går från vänstra stödet och y från högra. Vi har då att

$$\boxed{w_{\text{mitt}} = \frac{\partial W}{\partial P} = \int_0^L \frac{P\,x^2}{40EI}dx + \int_0^L \frac{P\,y^2}{4EI}dy = \frac{11PL^3}{120EI}}$$

4 En balk är belastad med en utbredd last som tar formen av en parabel med intensitet $Q(x) = 4Wx(L-x)/L^2$ (positiv nedåt). Balken består av två ihoplimmade delar; dess tvärsnitt formar ett T bestående av två rektanglar med storlek $t \times 10\,t$. Data: $W =$ 100 kN/m, $t = 1$ cm, $L = 10$ m. *Bestäm till beloppet maximala tvärkraften i limfogen.* (5p)





Svar: En vertikal jämvikt ger att

$$2R = \int_0^L Q(x)\,dx = \frac{2WL}{3},$$

så att stödreaktionerna är $R = WL/3$. Tvärkraften ges av $T' = Q(x)$, $T(0) = -WL/3$ och alltså

$$T = \frac{2Wx^2}{L} - \frac{4Wx^3}{3L^2} - \frac{WL}{3},$$

och max tvärkraft ligger vid stöden, $|T^{\max}| = WL/3 \approx 333$ kN.

Tvärsnittets tyngdpunkt beräknas till $y_{\mathrm{TP}} \approx 15t/2$ från underkant. Vi har att

$$I \approx \frac{625}{3}t^4 \approx 2.08 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^4, \quad S_{A^*} \approx (10t - 15t/2)\,10\,t^2 \approx 2.51 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^3$$

och

$$\tau^{\max} = \frac{|T^{\max}|\,S_{A^*}}{I\,t} \approx \frac{333 \times 2.51 \times 10^{-2}}{2.08 \times 10^{-8}} \approx 4.02 \times 10^8\ \mathrm{Pa}.$$

Alltså

$$\boxed{\tau^{\max} \approx 402\ \mathrm{MPa.}}$$

5 En cirkulär axel med konstant densitet ϱ, längd L och ytterdiameter D borras ur med ett centralt placerat hål så att dess vikt minskas med en faktor a (vikt efter urborrning $= a \times$ ursprunglig vikt). Den ursprungliga balken kunde bära det vridande momentet M_{vs} innan plasticering. *Hur stort vridande moment kan den bära efter urborrning?*

Svar: Kalla hålets diameter för d. Vi har att

$$\pi((D/2)^2 - (d/2)^2)L\varrho = a\,\pi(D/2)^2 L\varrho,$$

dvs.

$$d = D\sqrt{1-a}.$$

Dessutom är

$$\tau_{\max} = \frac{2M_{\mathrm{v}}B}{\pi(B^4 - A^4)},$$

där A är innerradien och B är ytterradien. Alltså

$$\tau_{\mathrm{s}} = \frac{2M_{\mathrm{vs}}}{\pi(D/2)^3} = \frac{2M^{\max}D/2}{\pi((D/2)^4 - (D\sqrt{1-a}/2)^4)} = \frac{2M^{\max}}{\pi(D/2)^3(1-(1-a)^2)}$$

eller

$$\boxed{M^{\max} = (2\,a - a^2)\,M_{\mathrm{vs}}.}$$