TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Onsdagen den 30:e maj 2007, klockan 08.30–12.30, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 9.30 och 11.30.
Lösningar: anslås på kurshemsidan onsdag 30/5.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik senast den 7/6.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik torsdag 7/6 kl 11.00–12.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.
2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

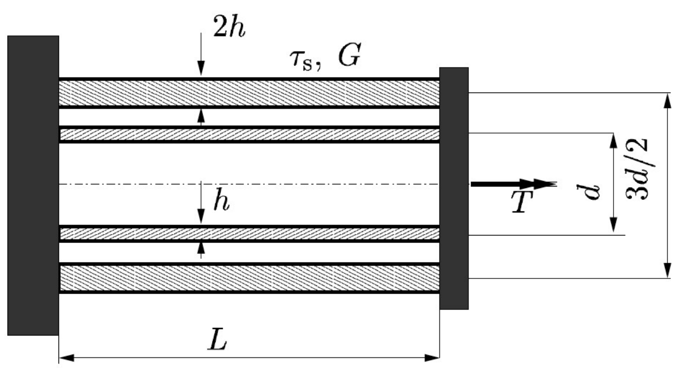
Räkna lugnt!

Uppgifter

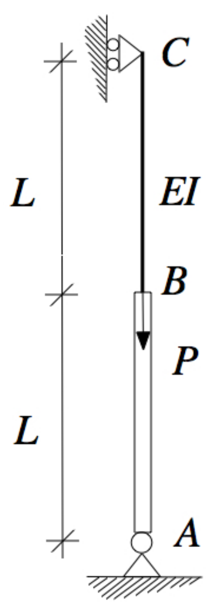
1 En axelkonstruktion består av två koncentriska tunnväggiga rör som är tillverkade av ett linjärt elastiskt—idealplatiskt material med skjuvmodul G och skjuvflytspänning τ_s. Axelkonstruktionen är fast inspänd i ena änden och belastas med det vridande momentet T via en stel skiva i andra änden. Det inre röret har diameter d och godstjocklek h, medan det yttre röred har diameter $3d/2$ och godstjocklek $2h$. Vi kan anta att $h << d$.

(a) *Bestäm det vridande moment T_s vid vilket begynnande plasticering i konstruktionen erhålls, samt motsvarande vridvinkel ϕ_s av den stela skivan.* (3p)

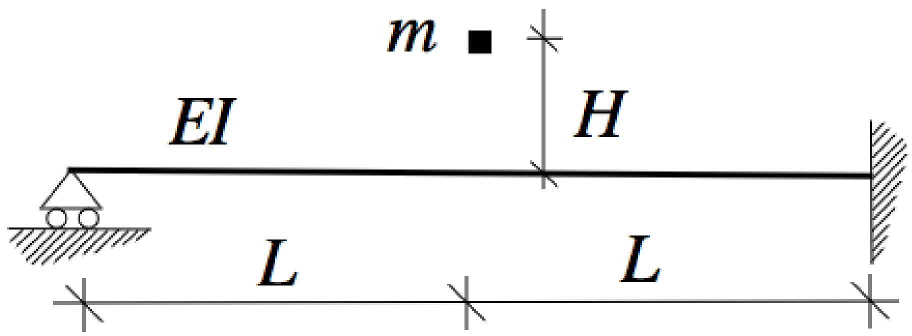
(b) *Bestäm det största vridmoment T_f konstruktionen kan belastas med innan den är helt genomplasticerad, samt motsvarande vridvinkel ϕ_f av den stela skivan.* (2p)



2 En sträva är ledat fäst i A och C. Delen AB antas stel, delen BC har böjstyvhet EI. Vid B angriper en last P. *Bestäm kritiskt värde på P.* (5p)



3 En liten vikt med massa m faller ner från höjden H mitt på en balk enligt figur. Massan fastnar när den träffar balken. Jordaccelerationen betecknas g. *Bestäm maximala förskjutningen mitt på balken.* (5p)

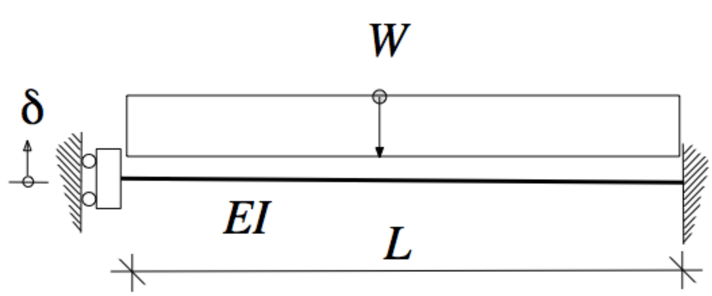


4 Spänningsmatrisen i en punkt ges av

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 60 \\ 0 & 80 & 40 \\ 60 & 40 & 50 \end{bmatrix} \quad \text{MPa.}$$

Bestäm till beloppet maximala **huvudtöjningen** *om* $E = 70$ GPa *och* $\nu = 0.3$. (5p)

5 En balk är belastad med en jämnt utbredd last med intensitet W [kraft/längdenhet] enligt figur. Vänstra änden av balken är stelt infästad i ett block som kan röra sig i vertikalled. *Hur stor vertikal förskjutning* δ *krävs för att maximala momentet i balken skall fördubblas jämfört med fallet* $\delta = 0$*?* (5p)

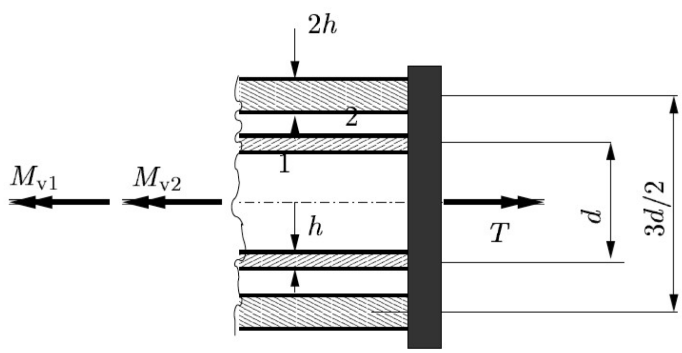


Lösningar, 070530

1 En axelkonstruktion består av två koncentriska tunnväggiga rör som är tillverkade av ett linjärt elastiskt—idealplatiskt material med skjuvmodul G och skjuvflytspänning τ_s. Axelkonstruktionen är fast inspänd i ena änden och belastas med det vridande momentet T via en stel skiva i andra änden. Det inre röret har diameter d och godstjocklek h, medan det yttre röred har diameter $3d/2$ och godstjocklek $2h$. Vi kan anta att $h << d$.

(a) *Bestäm det vridande moment T_s vid vilket begynnande plasticering i konstruktionen erhålls, samt motsvarande vridvinkel ϕ_s av den stela skivan.* (3p)

(b) *Bestäm det största vridmoment T_f konstruktionen kan belastas med innan den är helt genomplasticerad, samt motsvarande vridvinkel ϕ_f av den stela skivan.* (2p)



a: Momentjämvikt ger (1 betecknar inre röret, 2 yttre)

$$T - M_{v1} - M_{v2} = 0.$$

Deformationssamband $\phi_1 = \phi_2 = \phi$. Materialsamband

$$\phi_1 = \frac{M_{v1}L}{GK_1}, \quad K_1 = \frac{\pi d^3 h}{4}, \qquad \phi_2 = \frac{M_{v2}L}{GK_2}, \quad K_2 = \frac{27\pi d^3 h}{16}.$$

Tillsammans ger deformationssamband och materialsamband att

$$M_{v1} = \frac{K_1}{K_2} M_{v2} = \frac{4}{27} M_{v2}.$$

och ur jämvikt får vi då att

$$M_{v1} = \frac{4}{31}T, \quad M_{v2} = \frac{27}{31}T.$$

Skjuvspänningarna i (de tunnväggiga) rören ges då av

$$\tau_1 = \frac{M_{v1} d/2}{K_1} = \frac{8T}{31\pi d^2 h}, \quad \tau_2 = \frac{M_{v2} 3d/4}{K_2} = \frac{12T}{31\pi d^2 h}.$$

Eftersom $\tau_2 > \tau_1$ kommer det yttre röret att plasticera först, när $\tau_2 = \tau_\mathrm{s}$, och alltså är

$$T_\mathrm{s} = \frac{31\tau_\mathrm{s}\pi d^2 h}{12},$$

och

$$\phi_\mathrm{s} = \frac{27T_\mathrm{s}/31}{GK_2} = \frac{4\tau_\mathrm{s}L}{3Gd}.$$

b: Det inre röret bär ökande last fram tills dess att

$$M_\mathrm{v1} = \frac{K_1}{d/2}\tau_\mathrm{s}, \quad M_\mathrm{v2} = \frac{K_2}{3d/4}\tau_\mathrm{s},$$

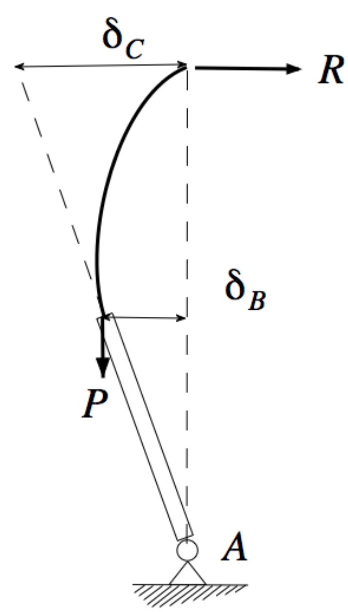
varvid jämvikten ger att

$$T_\mathrm{f} = \tau_\mathrm{s}\left(\frac{\pi d^2 h}{2} + \frac{9\pi d^2 h}{4}\right) = \frac{11\tau_\mathrm{s}\pi d^2 h}{4}.$$

Motsvarande vridvinkel är

$$\phi_\mathrm{f} = \frac{\frac{K_1}{d/2}\tau_\mathrm{s}L}{GK_1} = \frac{2\tau_\mathrm{s}L}{Gd}.$$

2 En sträva är ledat fäst i A och C. Delen AB antas stel, delen BC har böjstyvhet EI. Vid B angriper en last P. *Bestäm kritiskt värde på* P. (5p)



Vid deformation kommer balken att se ut som i figur. Momentjämvikt kring A ger då att

$$P\delta_B - R2L = 0.$$

Enligt elementarfall för en konsol med längd L har vi att

$$\delta_C = \frac{RL^3}{3EI},$$

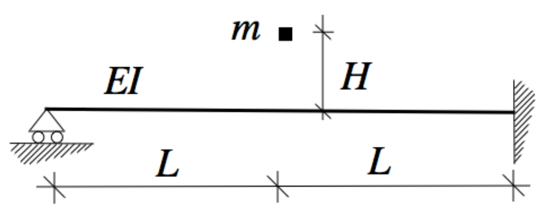
och ur geometrin fås $\delta_C = 2\delta_B$. Alltså gäller att

$$\left(P - \frac{12EI}{L^2}\right)\delta_B = 0.$$

Vi söker lösningar med $\delta_B \neq 0$ och därför har vi kritisk last

$$P_{\text{kr}} = \frac{12EI}{L^2}.$$

3 En liten vikt med massa m faller ner från höjden H mitt på en balk enligt figur. Massan fastnar när den träffar balken. Jordaccelerationen betecknas g. *Bestäm maximala förskjutningen mitt på balken.* (5p)



Förlusten i lägesenergi måste motsvaras av töjningsenergin som i sin tur är lika stor som arbetet W som utförs. Med δ beteckande utböjningen mitt på balken har vi att

$$W = \frac{1}{2}k\delta^2, \quad \text{där } k = \frac{768EI}{7(2L)^3} = \frac{96EI}{7L^3} \quad \text{(ur elementarfall).}$$

Alltså gäller

$$mg(H+\delta) = \frac{48EI}{7L^3}\delta^2,$$

och

$$\delta = \frac{7L^3\,mg + \sqrt{7L^3mg}\,\sqrt{192\,EI\,H + 7L^3\,mg}}{96\,EI}.$$

4 Spänningsmatrisen i en punkt ges av

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 60 \\ 0 & 80 & 40 \\ 60 & 40 & 50 \end{bmatrix} \quad \text{MPa.}$$

Bestäm till beloppet maximala **huvudtöjningen** *om* $E = 70$ GPa *och* $\nu = 0.3$. (5p)

Huvudspänningarna ges av lösningarna till

$$\begin{vmatrix} 120-\sigma & 0 & 60 \\ 0 & 80-\sigma & 40 \\ 60 & 40 & 50-\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

vilket ger

$$\sigma^3 - 250\,\sigma^2 + 14400\,\sigma = 0, \quad \sigma_1 = 160\,\text{MPa}, \quad \sigma_2 = 90\,\text{MPa}, \quad \sigma_3 = 0\,\text{MPa}.$$

Huvudtöjningsriktingarna är desamma som huvudspänningsriktiningarna för isotrop elasticitet. Enligt Hookes generaliserade lag har vi

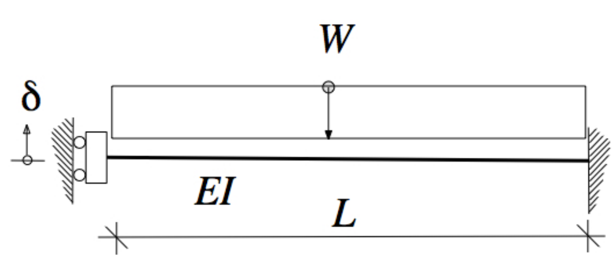
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\,(\sigma_2 + \sigma_3)) = 19 \times 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\,(\sigma_1 + \sigma_3)) = 6 \times 10^{-4},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu\,(\sigma_2 + \sigma_1)) \approx -11 \times 10^{-4},$$

och alltså $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = 19 \times 10^{-4}$.

5 En balk är belastad med en jämnt utbredd last med intensitet W [kraft/längdenhet] enligt figur. Vänstra änden av balken är stelt infästad i ett block som kan röra sig i vertikalled. *Hur stor vertikal förskjutning δ krävs för att maximala momentet i balken skall fördubblas jämfört med fallet $\delta = 0$?* (5p)



Elastiska linjens ekvation ger

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{W}{EI},$$

med lösning

$$w = -\frac{W}{EI}\frac{x^4}{24} + A\,x^3 + B\,x^2 + C\,x + D$$

och med

$$w(0) = \delta,\ w'(0) = 0,\ w(L) = 0,\ w'(L) = 0,$$

får vi

$$A = \frac{2\,\delta}{L^3} + \frac{WL}{12\,EI},\ \ B = -\frac{3\,\delta}{L^2} - \frac{WL^2}{24\,EI},\ \ C = 0,\ \ D = \delta,$$

vilket ger

$$M^{\delta} = -EI\,w'' = \frac{72\,\delta\,EI\,(L-x) + WL^3(L^2 - 6Lx + 6x^2)}{12L^3},$$

vilket antar maximum vid $x = 0$,

$$M^{\delta}_{\max} = \frac{72\,\delta\,EI + WL^4}{12L^2}.$$

När $\delta = 0$ får vi

$$M^{0}_{\max} = \frac{WL^2}{12}$$

för $x = 0$ och $x = L$. Villkoret $M^{\delta}_{\max} = 2\,M^{0}_{\max}$ ger att

$$\frac{72\,\delta\,EI + WL^4}{12L^2} = \frac{WL^2}{6} \quad\Longrightarrow\quad \frac{6\,\delta\,EI}{L^2} = \frac{WL^2}{12},$$

dvs.

$$\delta = \frac{WL^4}{72\,EI}.$$