TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Fredagen den 19:e januari 2007, klockan 14.00–18.00, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 15 och 17.
Lösningar: anslås på kurshemsidan och på Inst. för tillämpad mekanik.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik senast den 2/2.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik fredag 2/2 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.
2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

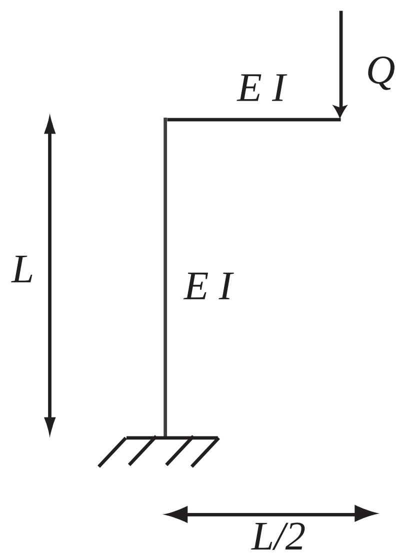
Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

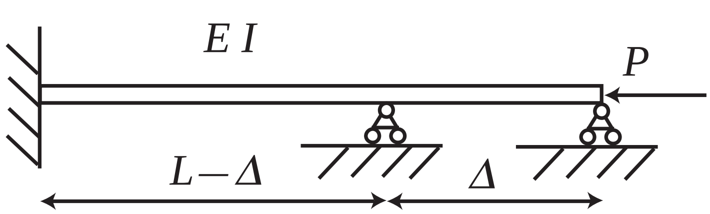
1 En ramkonstruktion består av två sammanfogade balkar med böjstyvhet EI. Konstruktionen är fast inspänd i grunden och belastas av en punktlast Q enligt figur.

Bestäm horisontella och vertikala utböjningen vid lastens angreppspunkt.



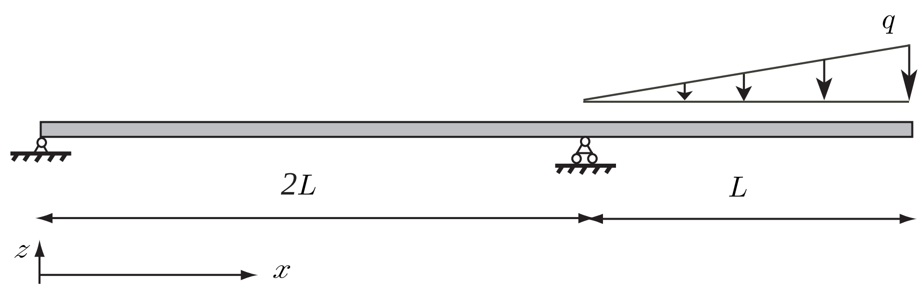
2 Man vill höja knäcklasten för en sträva genom att understödja den med ett rullstöd enligt figur. För att få en approximativ uppfattning om var stödet skall placeras kan man anta att högra delen käcker som en Euler 2:a och vänstra delen som en Euler 3:a.

Bestäm under denna approximation det Δ *som ger högsta knäcklast samt bestäm denna knäcklast.*



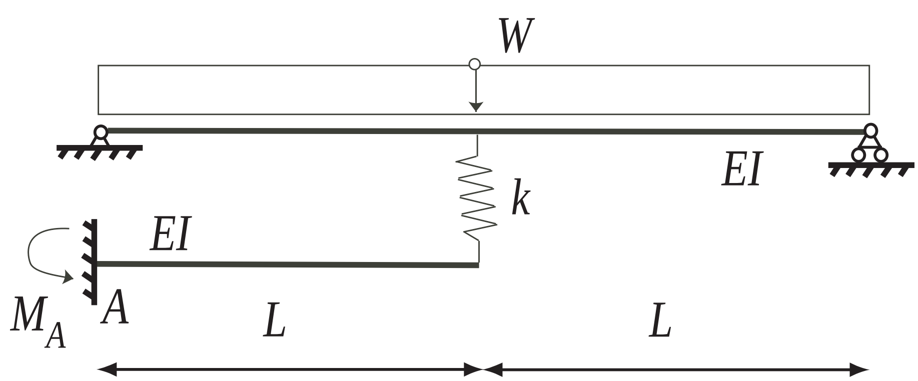
3 En balk som är fritt upplagd på två stöd utsätts för en triangulär utbredd last med maximal intensitet q [N/m], se figuren.

Bestäm tvärkraft- och momentdiagram, dvs $T(x)$ och $M(x)$.



4 En fritt upplagd balk belastad med en jämnt utbredd last med intensitet W är kopplad till en konsolbalk via en fjäder med fjäderkonstant $k = EI/L^3$.

Bestäm momentet M_A vid inspänningen A.

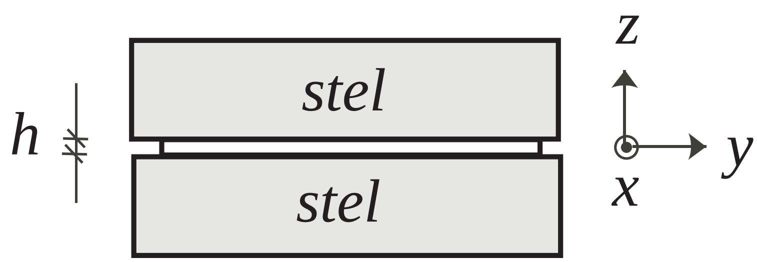


5 En tunn skiva av ett elastiskt material med elasticitetsmodul E och Poissons tal ν sitter fastlimmad mellan två stela block. En spänning σ_z läggs på. Man kan då införa den *skenbara* elasticitetsmodulen

$$E^* = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}.$$

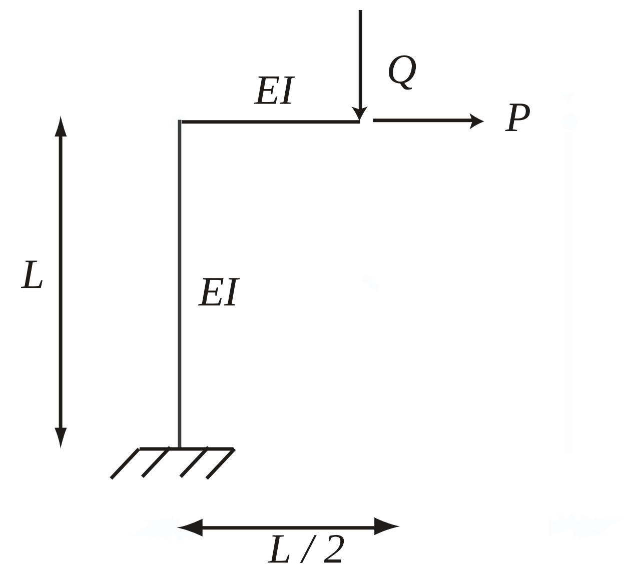
(a) *Bestäm E^* uttryckt i E och ν.* (4p)

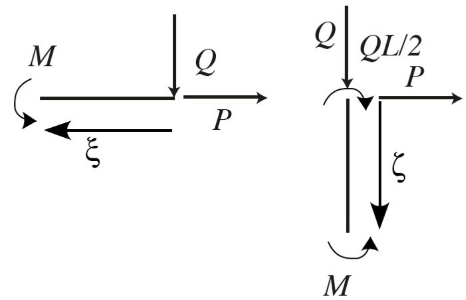
(b) *Visa att $E^* >> E$ om materialet är nära inkompressibelt.* (1p)



Lösningar, 070119

1 En ramkonstruktion består av två sammanfogade balkar med böjstyvhet EI. Konstruktionen är fast inspänd i grunden och belastas av en punktlast Q. *Bestäm horisontella och vertikala utböjningen vid lastens angreppspunkt.*





Beräkna momentet i balkdelarna. I horisontella delen blir: $M(\xi) = Q\,\xi$; och i vertikala delen $M(\zeta) = \frac{QL}{2} + P\zeta$. Elastiska energin blir alltså

$$W = \int_0^{L/2} \frac{Q^2\xi^2}{2EI} + \int_0^{L} \frac{(QL/2 + P\zeta)^2}{2EI},$$

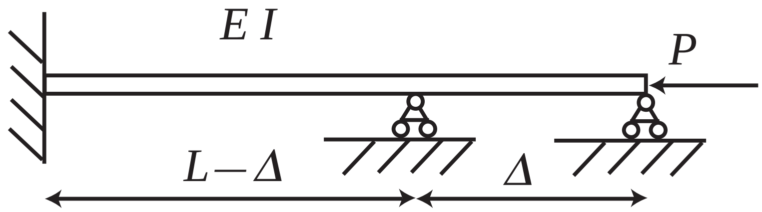
och

$$\delta_{\text{horisontell}} = \left.\frac{\partial W}{\partial P}\right|_{P=0} = \int_0^L (\frac{QL}{2} + P\zeta)\frac{\zeta}{EI}\,d\zeta = \frac{QL^3}{4EI}.$$

$$\delta_{\text{vertikal}} = \left.\frac{\partial W}{\partial Q}\right|_{P=0} = \int_0^{L/2} \frac{Q\xi^2}{EI} d\xi + \int_0^L \frac{QL}{2EI}\frac{L}{2}\,d\zeta = \frac{7QL^3}{24EI}.$$

2 Man vill höja knäcklasten för en sträva genom att understödja den med ett rullstöd enligt figur. För att få en approximativ uppfattning om var stödet skall placeras kan man anta att högra delen käcker som en Euler 2:a och vänstra delen som en Euler 3:a.

Bestäm under denna approximation det Δ *som ger högsta knäcklast samt bestäm denna knäcklast.*



Vänstra delen: $P_{\mathrm{kr}} = \frac{2.05\pi^2 EI}{(L-\Delta)^2}$.
Högra delen: $P_{\mathrm{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{\Delta^2}$.

Största kritika last uppstår när dessa är lika, dvs.

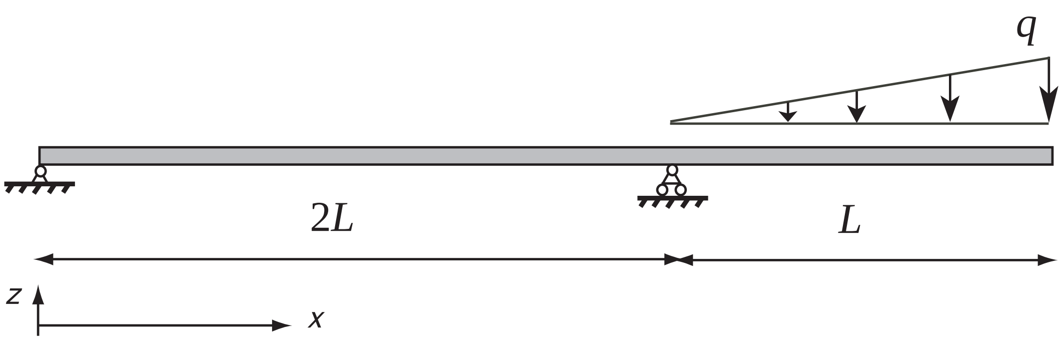
$$\frac{2.05}{(L-\Delta)}^2 = \frac{1}{\Delta^2} \Longrightarrow \Delta_{1,2} \approx \begin{cases} -2.3L \text{ (falsk rot)} \\ 0.411L \end{cases}$$

och alltså

$$P_{\mathrm{kr}} \approx \frac{5.9\pi^2 EI}{L^2} \approx 58.4\frac{EI}{L^2}.$$

3 En balk som är fritt upplagd på två stöd utsätts för en triangulär utbredd last med maximal intensitet q [N/m], se figuren.

Bestäm tvärkraft- och momentdiagram, dvs $T(x)$ och $M(x)$.



Stödreaktion i vänster stöd A:

$$R_A\,2L + q\frac{L}{2}\frac{2L}{3} = 0, \quad R_A = -\frac{qL}{6}.$$

För $0 \le x \le 2L$:

$$T = \frac{qL}{6}, \quad M = \frac{qL}{6}x.$$

Stödreaktion i högra stödet B:

$$R_B - \frac{qL}{6} - \frac{qL}{2} = 0, \quad R_B = \frac{2qL}{3}$$

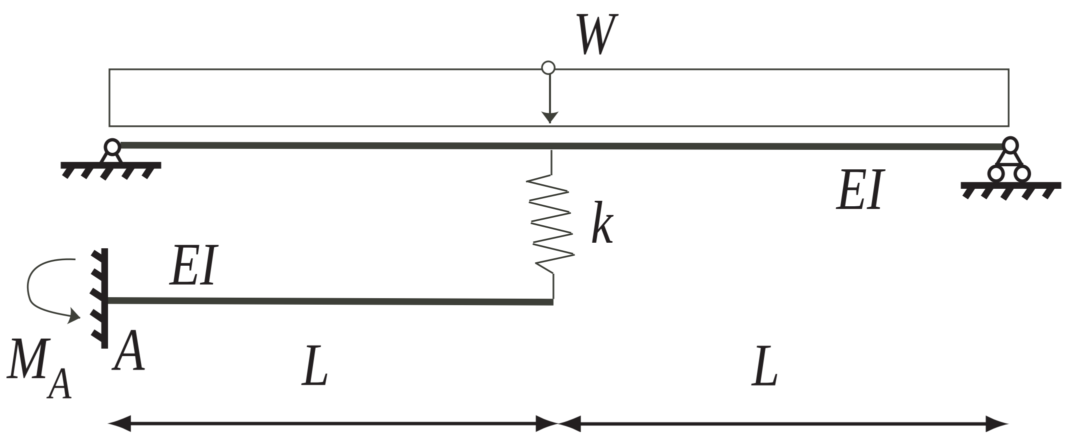
$$T(x) = -R_A = \frac{qL}{4},\; M(x) = -R_A x = \frac{qL}{4}x.$$

För $2L < x < 3L$ får vi efter förenkling

$$T(x) = -\frac{qL}{2} + \frac{q\,(x-2L)^2}{2L},\; M(x) = \frac{qx(x-3L)^2}{6L}.$$

4 En fritt upplagd balk belastad med en jämnt utbredd last med intensitet W är kopplad till en konsolbalk via en fjäder med fjäderkonstant $k = EI/L^3$.

Bestäm momentet M_A vid inspänningen A.



Inför kraften i fjädern som P. Utböjningen av den övre balken fås ur elementarfall som

$$p_{\text{övre}} = \frac{5W(2L)^4}{384EI} - \frac{P(2L)^3}{48EI},$$

och för den undre

$$p_{\text{undre}} = \frac{PL^3}{3EI}.$$

I fjädern har vi det konstitutiva sambandet

$$P = k(p_{\text{övre}} - p_{\text{undre}}) \Longrightarrow p_{\text{övre}} - p_{\text{undre}} = \frac{PL^3}{EI}$$

Vi har nu tre ekvationer och tre obekanta ur vilket kan lösas $P = 5WL/36$ och

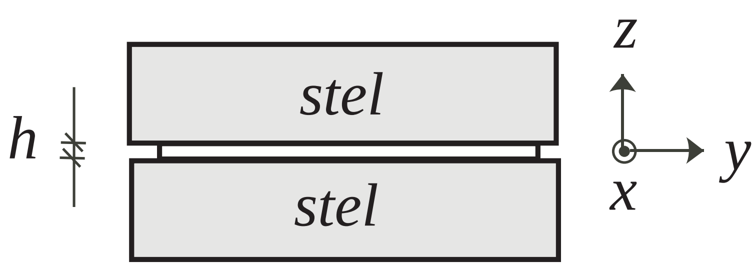
$$M_A = PL = \frac{5}{36}WL^2.$$

5 En tunn skiva av ett elastiskt material med elasticitetsmodul E och Poissons tal ν sitter fastlimmad mellan två stela block. En spänning σ_z läggs på. Man kan då införa den *skenbara* elasticitetsmodulen

$$E^* = \frac{\sigma_z}{\varepsilon_z}.$$

(a) *Bestäm E^* uttryckt i E och ν.* (4p)

(b) *Visa att $E^* >> E$ om materialet är nära inkompressibelt.* (1p)



Vi kan anta att inga töjningar sker i $xy-$planet eftersom skivan är tunn och fästad i blocken. Hookes lag ger då att

$$0 = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)), \quad 0 = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)), \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)).$$

Detta ger

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu\sigma_z}{1-\nu},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z\left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu}\right) = \frac{1}{E}\sigma_z\left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right) = \frac{1}{E}\sigma_z\left(\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}\right),$$

och

$$E^* = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \;\rightarrow\; \infty \;\text{ om }\; \nu \;\rightarrow\; 1/2.$$