TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Tisdagen den 29:e augusti 2006, klockan 08.30–12.30, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 9.30 och 11.30.
Lösningar: anslås på kurshemsidan onsdag 30/8.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik senast den 8/9.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik fredag 8/9 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.
2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

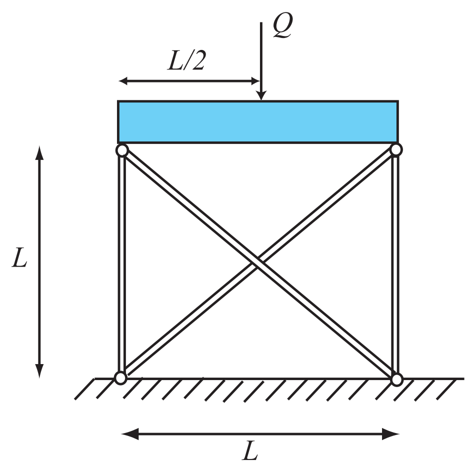
Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

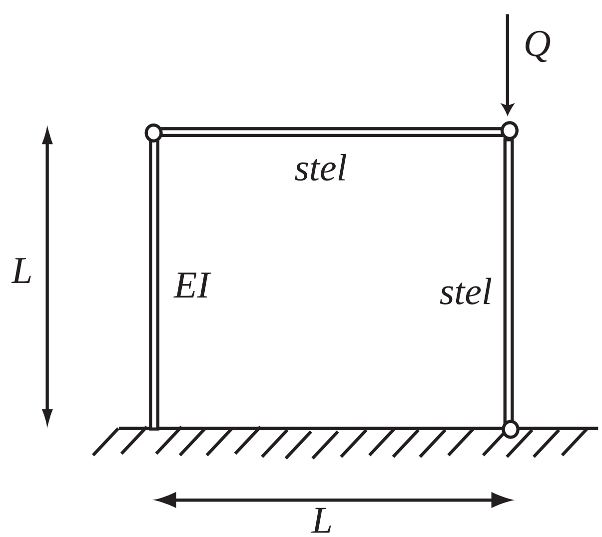
Räkna lugnt!

Uppgifter

1 En stel skiva som belastas med lasten Q bärs upp av ett stångsystem bestående av fyra stänger. Stängerna har alla kvadratiskt tvärsnitt med sidan a och är tillverkade av samma material med elasticitetsmodulen E. *Bestäm spänningarna i de fyra stängerna* (antag att utknäckning ej sker). Försumma egentyngder.
Givna data: $L = 1$ [m], $a = 20$ [mm], $E = 210 \cdot 10^3$ [MPa], $Q = 20$ [kN]



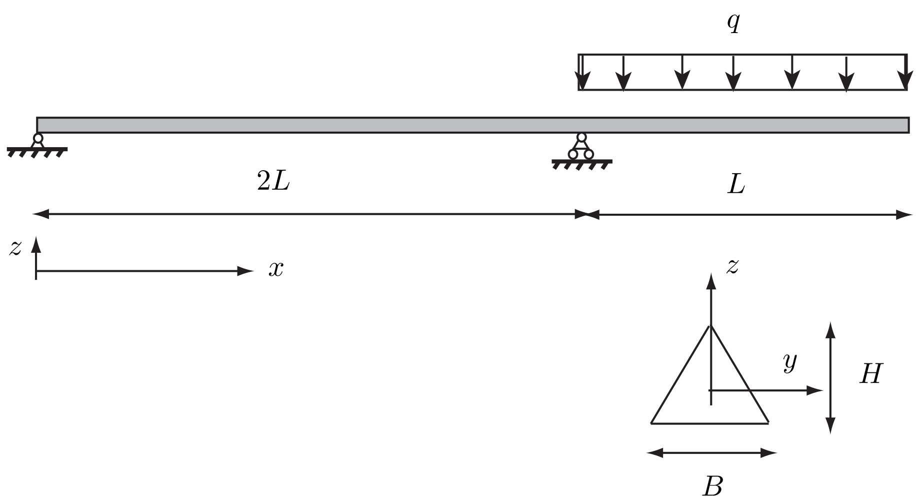
2 En ramkonstruktion består av tre balkar, två stela och en med böjstyvhet EI. Balkarna är ledat fästade i varandra, den deformerbara balken är fast inspänd i grunden. Balksystemet belastas av en punktlast Q enligt figur. *Bestäm kritisk last* Q_k.



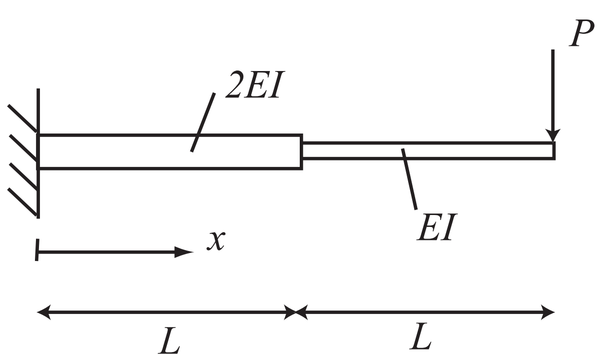
3 En balk som är fritt upplagd på två stöd utsätts för en utbredd last q [N/m], se figuren. Balkens har ett triangulärt tvärsnitt.

(a) *Bestäm tvärkraft och momentdiagram*, dvs $T(x)$ och $M(x)$. (3p)

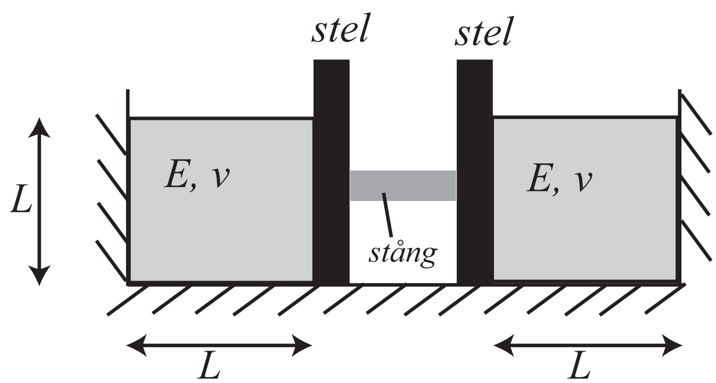
(b) *Bestäm största tillåtna utbredda last* q om max böjnormalspänning tillåts vara 400 [MPa] i balken. Övriga data: $L = 10$ [m], $B = H = 100$ [mm] (2p)



4 En balk består av två delar: vänsterdel med böjstyvhet $2EI$ och högerdel med böjstyvhet EI. Balken är fast infäst i sin vänstra ände och fri i sin högra ände. Balkens belastas med punktkraften P i sin högra ände. *Bestäm utböjningen av balkens högra ände.*

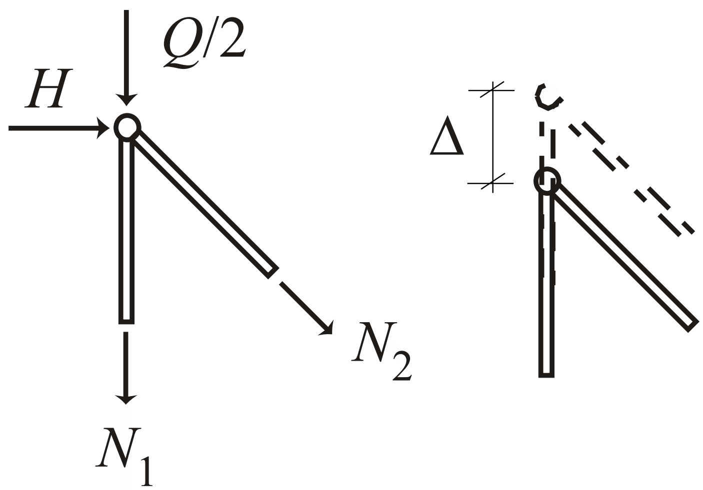


5 Mellan två kubiska klossar med Poissons tal $\nu = 1/3$ och E-modul E finns två stela skivor. Mellan de två stela skivorna skall en stång med ursprunglig längd a placeras. Stången har E-modul E och area βL^2. Båda klossarna ligger an mot stela väggar. Vi försummar friktionen mellan samtliga kroppar. Innan stången placeras mellan klossarna är avståndet mellan de stela skivorna $a - \Delta$. *Bestäm höjdökningen i båda klossarna* som sker då stången placeras mellan de stela skivorna. Antag spänningsfritt tillstånd ut ur papprets plan i samtliga kroppar och att klossarnas djup ut ur papprets plan är L.



Lösningar, 060829

1 En stel skiva som belastas med lasten Q bärs upp av ett stångsystem bestående av fyra stänger. Stängerna har alla kvadratiskt tvärsnitt med sidan a och är tillverkade av samma material med elasticitetsmodulen E. *Bestäm spänningarna i de fyra stängerna* (antag att utknäckning ej sker). Försumma egentyngder.
Givna data: $L = 1$ [m], $a = 20$ [mm], $E = 210 \cdot 10^3$ [MPa], $Q = 20$ [kN]



Betrakta vänstra övre knuten. Vertikal jämviktsekvation ger pga symmetrin att

$$N_1 + \frac{N_2}{\sqrt{2}} = -\frac{Q}{2}.$$

Symmetrin ger också att spänningarna i de lutande och de vertikala stängerna är parvis lika. Det konstitutiva sambandet är att

$$N_1 = \frac{Ea^2}{L}\delta_1, \quad N_2 = \frac{Ea^2}{L\sqrt{2}}\delta_2,$$

där

$$\delta_1 = -\Delta, \quad \delta_2 = -\frac{\Delta}{\sqrt{2}}.$$

Alltså är

$$N_1 = -\frac{Ea^2}{L}\Delta, \quad N_2 = -\frac{Ea^2}{2L} \;\Rightarrow\; N_1 = 2\,N_2.$$

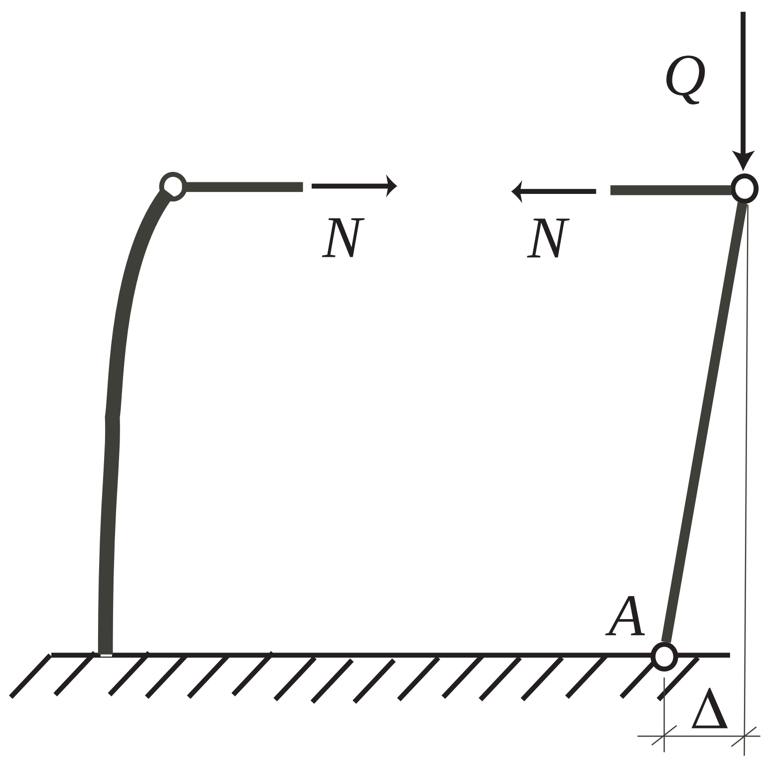
Således gäller

$$N_1 + \frac{N_1}{2\sqrt{2}} = -\frac{Q}{2} \;\Rightarrow\; N_1 = -\frac{Q}{2 + 1/\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; N_2 = -\frac{Q}{4 + \sqrt{2}}$$

Detta ger med siffror insatta att

$$\boxed{\sigma_1 = N_1/a^2 = -18,5 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = N_2/a^2 = -9,25 \text{ MPa}.}$$

2 En ramkonstruktion består av tre balkar, två stela och en med böjstyvhet EI. Balkarna är ledat fästade i varandra, den deformerbara balken är fast inspänd i grunden. Balksystemet belastas av en punktlast Q enligt figur. *Bestäm kritisk last* Q_k.



Jämvikt i utböjt läge, momentjämvikt runt stöd A:

$$Q\Delta - NL = 0 \;\Rightarrow\; N = Q\frac{\Delta}{L}.$$

Deformationssamband ur elementarfall:

$$\Delta = \frac{NL^3}{3EI}.$$

Alltså:

$$\left(\frac{3EI}{L^3} - \frac{Q}{L}\right)\Delta = 0.$$

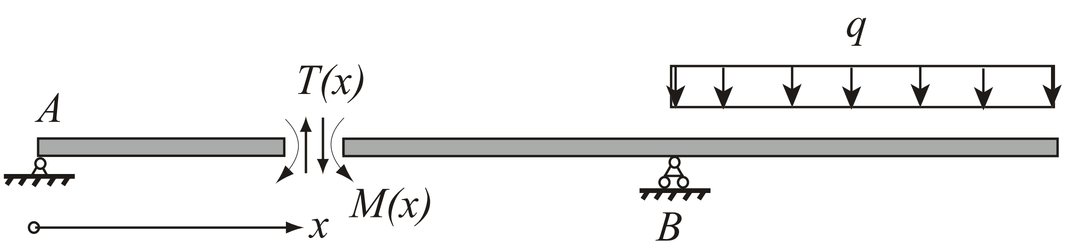
För lösningar med $\Delta \neq 0$ får vi

$$\boxed{Q_{\mathrm{kr}} = \frac{3EI}{L^2}.}$$

3 En balk som är fritt upplagd på två stöd utsätts för en utbredd last q [N/m], se figuren. Balkens har ett triangulärt tvärsnitt.

(a) *Bestäm tvärkraft och momentdiagram*, dvs $T(x)$ och $M(x)$. (3p)

(b) *Bestäm största tillåtna utbredda last* q om max böjnormalspänning tillåts vara 400 [MPa] i balken. Övriga data: $L = 10$ [m], $B = H = 100$ [mm] (2p)



a) Vertikal jämvikt:

$$R_A + R_B - qL = 0.$$

Momentjämvikt kring A:

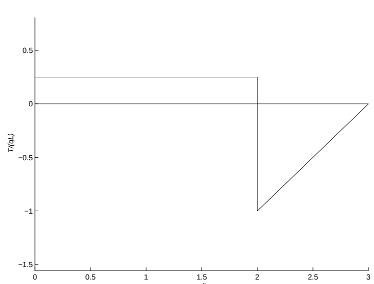
$$-2R_B L + qL(2L + L/2) = 0 \;\Rightarrow\; R_A = -\frac{qL}{4},\; R_B = \frac{5qL}{4}.$$

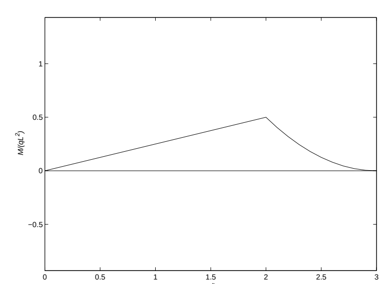
Snitt vid $0 < x < 2L$ ger

$$T(x) = -R_A = \frac{qL}{4},\; M(x) = -R_A x = \frac{qL}{4}x.$$

Snitt vid $2L < x < 3L$ ger

$$T(x) = q\,(x - 3L),\; M(x) = \frac{q}{2}(x - 3L)^2.$$





b) Tyngpunktens position $y_{\mathrm{TP}} = H/3$ från underkant. Formelsamlingen ger ytttröghetsmomentet

$$I_y = \frac{BH^3}{36}.$$

Alltså

$$\sigma_{\max} = \frac{\max_x |M(x)|\,|z_{\max}|}{I_y} = \frac{qL^2/2(2H/3)}{BH^3/36} = \frac{12qL^2}{BH^2}.$$

Max tillåten spänning $\sigma_{\mathrm{till}} = 400$ MPa ger att

$$\boxed{q \leq \frac{BH^2}{12L^2}\sigma_{\mathrm{till}} \approx 333 \text{ N/m} .}$$

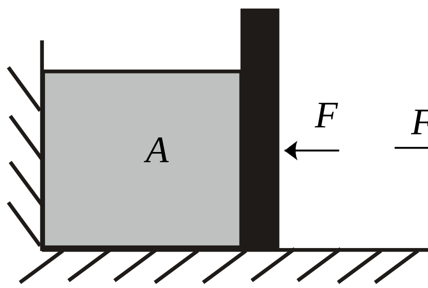
4 En balk består av två delar: vänsterdel med böjstyvhet $2EI$ och högerdel med böjstyvhet EI. Balken är fast infäst i sin vänstra ände och fri i sin högra ände. Balkens belastas med punktkraften P i sin högra ände. *Bestäm utböjningen av balkens högra ände.*

Enklast är att använda Castiglianos sats. Töjniongsenergin ges av (x räknat från vänster)

$$W = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\,dx + \frac{1}{4}\int_L^{2L} \frac{M^2}{EI}\,dx.$$

$$\boxed{p = \frac{\partial W}{\partial P} = \int_0^L \frac{Px^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_L^{2L} \frac{Px^2}{EI}\,dx = \frac{3PL^3}{2EI}.}$$

5 Mellan två kubiska klossar med Poissons tal $\nu = 1/3$ och E-modul E finns två stela skivor. Mellan de två stela skivorna skall en stång med ursprunglig längd a placeras. Stången har E-modul E och area $\beta\, L^2$. Båda klossarna ligger an mot stela väggar. Vi försummar friktionen mellan samtliga kroppar. Innan stången placeras mellan klossarna är avståndet mellan de stela skivorna $a-\Delta$. *Bestäm höjdökningen i båda klossarna* som sker då stången placeras mellan de stela skivorna. Antag spänningsfritt tillstånd ut ur pappret plan i samtliga kroppar och att klossarnas djup ut ur pappret plan är L.



Jämvikt ger:

$$\sigma_x^A = -\frac{F}{L^2}, \quad \sigma_x^B = -\frac{F}{\beta L^2}.$$

Konstitutiva samband, enaxlig spänning i alla delar:

$$\varepsilon_x^A = \frac{\sigma_x^A}{E} = -\frac{F}{EL^2} = \frac{\delta_A}{L}, \quad \varepsilon_x^B = \frac{\sigma_x^B}{E} = -\frac{F}{\beta EL^2} = \frac{\delta_B}{a}$$

Geometri: stångens längd efter inplacering plus klossarnas bredd måste vara lika med avståndet mellan de stela väggarna före inplaceringen så att

$$L + \delta_A + (a + \delta_B)/2 = L + (a - \Delta)/2 \quad \text{(symmetri)}.$$

Detta ger att $\Delta = -2\delta_A - \delta_B$ vilket ger $F = \Delta EL^2/(2L + a/\beta)$. Hookes lag ger sedan

$$\varepsilon_y^A = -\frac{\nu}{E}\sigma_x^A = \frac{\nu\Delta}{2L + a/\beta},$$

och, med $\nu = 1/3$,

$$\boxed{\delta_y = \varepsilon_y^A L = \frac{\Delta}{6 + 3\frac{a}{\beta L}}.}$$