TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Onsdagen den 24:e maj 2006, klockan 14.00–18.00, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 15.00 och 17.00.
Lösningar: anslås på kurshemsidan torsdag 25/5.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik senast den 7/6.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik onsdag 7/6 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.
2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.
3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.
4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

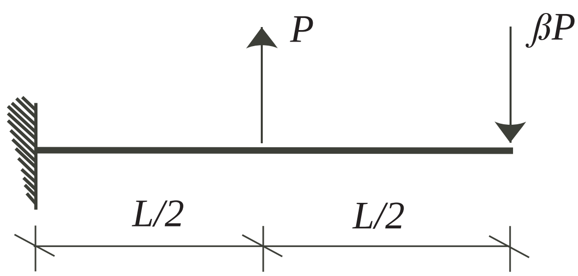
Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

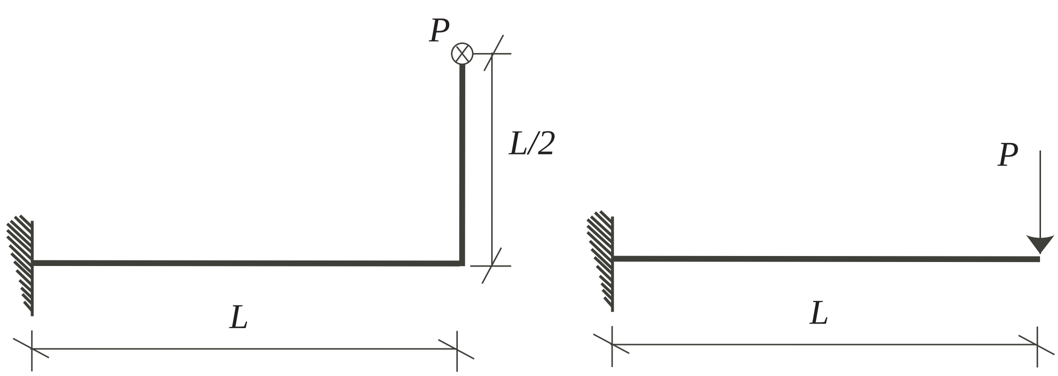
1 Balken i nedanstående figur brister om absolutbeloppet av böjmomentet överskrider värdet M_B. Bestäm var brott inträffar och för vilket värde på kraften P (uttryckt i M_B) när β tillåts variera.

(5p)



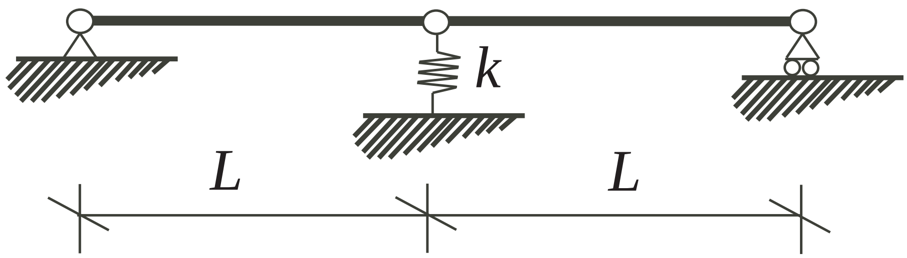
2 Betrakta konstruktionen i nedanstående figur. Balken visas ovanifrån till vänster och från sidan till höger. Bestäm nedböjningen under lasten till följd av böj- och vriddeformationer. Balken har cirkulärt tvärsnitt med diameter D och är linjärelastisk med elasticitetsmodul E och skjuvmodul G.

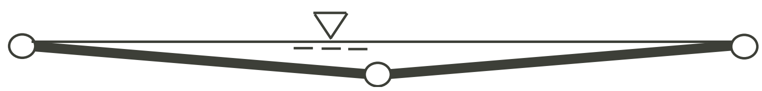
(5p)



3 Ett (oändligt långt) tak, enligt figur, består av två stela skivor sammanfogade med en friktionsfri led som är understödd av en fjäder med fjäderstyvhet k (per meter). Om det börjar regna kan det bli en ansamling av vatten enligt den undre figuren. För en fix fjäderstyvhet har längden L ett kritiskt värde L_{kr} som, om den överskrids, leder till kollaps vid långvarigt regnande. Bestäm L_{kr} om vattnets densitet är ρ och jordaccelerationen betecknas g.

(5p)



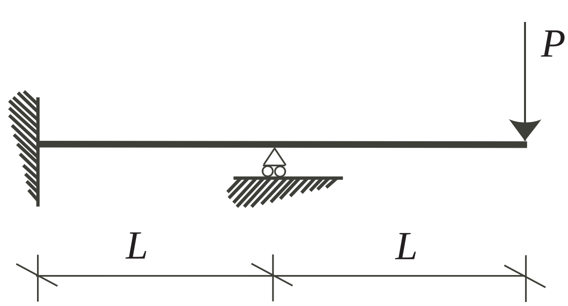


4 Bestäm nedböjningen under lasten för balken enligt nedanstående figur genom användande av lämplig(a) energimetod(er). Balken har konstant böjstyvhet EI.

(3p)

Bestäm samma nedböjning approximativt med hjälp av satsen om potentiella energins minimum genom att ansätta utböjningen som en lämplig tredjegradskurva.

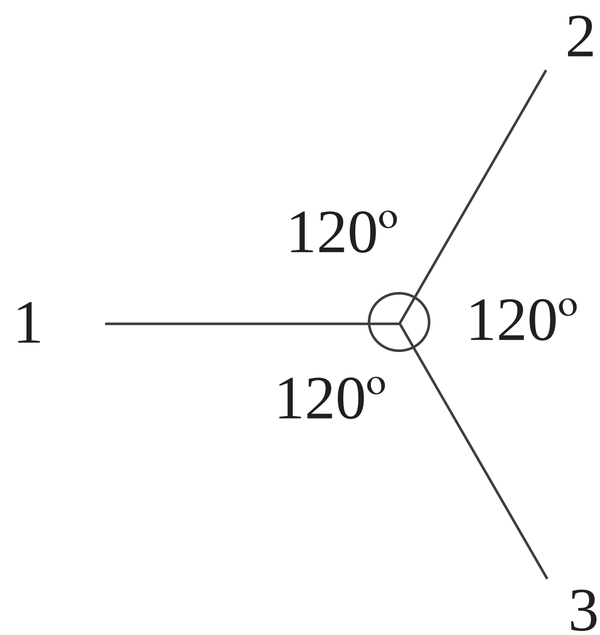
(2p)



5 I en punkt på ytan av en plåt, belastad i plant spänningstillstånd, uppmäts töjningarna $\varepsilon_1 = -1‰$, $\varepsilon_2 = 0,4‰$, $\varepsilon_3 = 0,4‰$ i riktningarna 1,2 och 3, se figur. Bestäm plåtens tjockleksändring i denna punkt. Plåttjockleken betecknas h, och materialet är elastiskt med elasticitetsmodul E och Poissons tal ν.

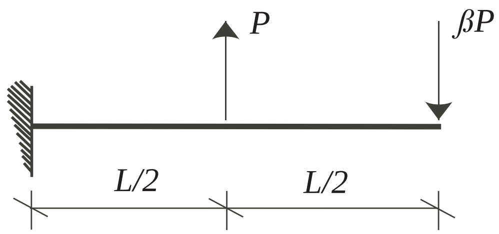
Ledning: töjningen ε_n i en riktning given av enhetsvektorn $\boldsymbol{n}$ ges av töjningsmatrisen $\boldsymbol{T}$ enligt sambandet $\varepsilon_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}$.

(5p)

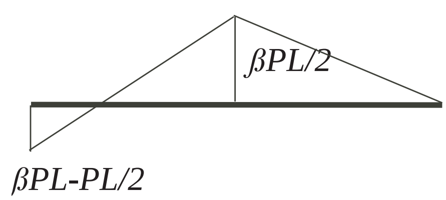


Lösningar, 060524

1 Balken i nedanstående figur brister om absolutbeloppet av böjmomentet överskrider värdet M_B. Bestäm var brott inträffar och för vilket värde på kraften P (uttryckt i M_B) när β tillåts variera.



Momentdiagrammet blir



Fall 1: Brott vid inspänningen om

$$|\beta PL - PL/2| \geq \beta PL/2 \quad \Rightarrow \quad \beta \leq \frac{1}{3} \quad \text{eller} \quad \beta \geq 1,$$

och då är

$$|\beta PL - PL/2| = M_B \quad \Rightarrow \quad P = \frac{M_B}{|\beta - 1/2|\, L}.$$

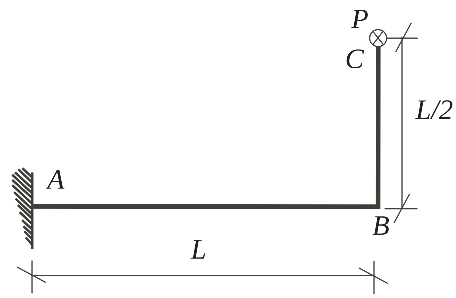
Fall 2: Brott vid balkmitt om

$$|\beta PL - PL/2| \leq \beta PL/2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \beta \leq 1,$$

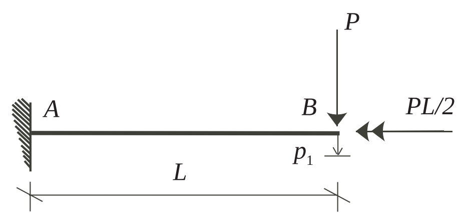
och då är

$$P = \frac{2\, M_B}{\beta\, L}.$$

2 Betrakta konstruktionen i nedanstående figur. Bestäm nedböjningen under lasten till följd av böj- och vriddeformationer. Balken har cirkulärt tvärsnitt med diameter D och är linjärelastisk med elasticitetsmodul E och skjuvmodul G.



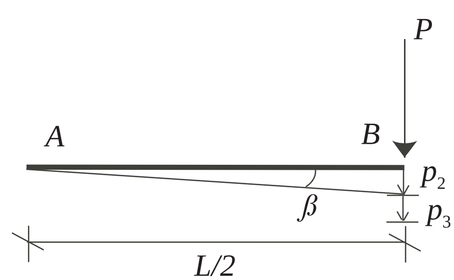
Balkdel AB:



Nedböjning: $p_1 = \dfrac{PL^3}{3EI} = \dfrac{64\,PL^3}{3\pi\,ED^4}$.

Vridvinkel: $\beta = \dfrac{M_v L}{GK} = \dfrac{16\,PL^2}{\pi\,GD^4}$.

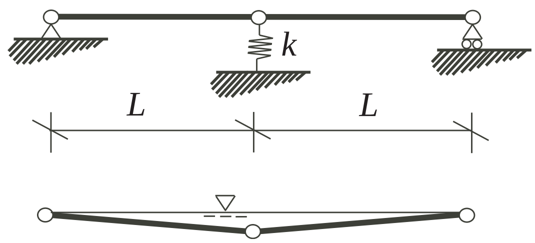
Balkdel BC:



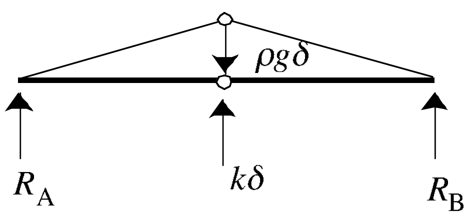
$$p_2 = \beta\frac{L}{2} = \frac{8\,PL^3}{\pi\,GD^4}, \quad p_3 = \frac{P(L/2)^3}{3EI} = \frac{8\,PL^3}{3\pi\,ED^4}.$$

$$p_{\text{tot}} = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{72PL^3}{3\pi ED^4} + \frac{8PL^3}{\pi GD^4}.$$

3 Ett (oändligt långt) tak, enligt figur, består av två stela skivor sammanfogade med en friktionsfri led som är understödd av en fjäder med fjäderstyvhet k (per meter). Om det börjar regna kan det bli en ansamling av vatten enligt den undre figuren. För en fix fjäderstyvhet har längden L ett kritiskt värde L_{kr} som, om den överskrids, leder till kollaps vid långvarigt regnande. Bestäm L_{kr} om vattnets densitet är ρ och jordaccelerationen betecknas g.



Belastning vid förskjutning δ:



Momentjämvikt kring leden ger

$$R_A L - \frac{1}{2}\rho g \delta L \frac{1}{3} L = 0 \quad \Rightarrow R_A = \frac{1}{6}\rho g \delta L.$$

Symmetrin ger att $R_A = R_B$. Vertikal jämvikt ger följaktligen

$$\frac{2}{6}\rho g \delta L + k\delta - 2\rho g \delta \frac{1}{2} L = 0,$$

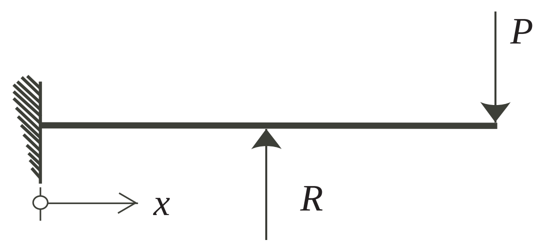
$$\left(L - \frac{3}{2}\frac{k}{\rho g}\right)\delta = 0,$$

det vill säga, för $\delta \neq 0$ får vi

$$L_{\text{kr}} = \frac{3}{2}\frac{k}{\rho g}.$$

4 a) Bestäm nedböjningen under lasten för balken enligt nedanstående figur genom användande av lämplig(a) energimetod(er). Balken har konstant böjstyvhet EI.
b) Bestäm samma nedböjning approximativt med hjälp av satsen om potentiella energins minimum genom att ansätta utböjningen som en lämplig tredjegradskurva.

a) Inför stödreaktionen R i stödet som obekant.



För $0 \leq x \leq L$ har vi $M(x) = P(2L-x) - R(L-x)$ och för $L \leq x \leq 2L$ är $M(x) = P(2L-x)$
Töjningsenergin ges av

$$W = \frac{1}{2}\int_0^{2L} \frac{M^2}{EI}dx = \int_0^L \frac{(P(2L-x) - R(L-x))^2}{2EI}dx + \int_L^{2L} \frac{(P(2L-x))^2}{2EI}dx.$$

Förskjutningen vid $x = L$:

$$r = \frac{\partial W}{\partial R} = \int_0^L \frac{P(2L-x) - R(L-x)}{EI}(x-L)dx = \frac{(2R-5P)L^3}{6EI} = 0,$$

och förskjutningen vid $x = 2L$:

$$p = \frac{\partial W}{\partial P} = \int_0^L \frac{P(2L-x) - R(L-x)}{EI}(2L-x)dx + \int_L^{2L} \frac{P(2L-x)^2}{EI}dx,$$

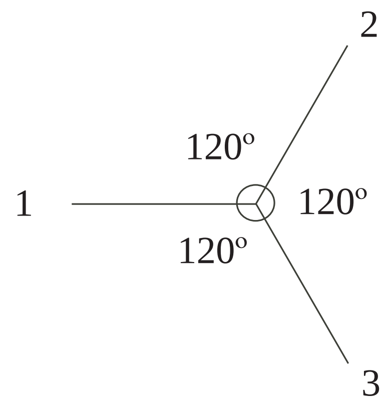
så att $R = 5P/2$ och $p = \dfrac{(16P-5R)L^3}{6EI} = \dfrac{7PL^3}{12EI}$.

b) Ansätt $w(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$. Förskjutningsansatsen måste uppfylla förskjutningsrandvillkoren, dvs $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$ och $w(L) = 0$. Detta ger $w = Dx^2(x-L)$. Potentiella energin ges av (positiv riktning uppåt!)

$$U = \frac{1}{2}\int_0^{2L} EI(w'')^2\,dx + Pw(2L) \approx \frac{1}{2}\int_0^{2L} EI(-2D(L-3x))^2\,dx + 4DPL^3 = 28EI\,D^2L^3 + 4DPL^3$$

$$dU/dD = 56EID\,L^3 + 4PL^3 = 0 \text{ ger } D = -P/(14EI) \text{ och } p \approx -w(2L) = \frac{2PL^3}{7EI}.$$

5 I en punkt på ytan av en plåt, belastad i plant spänningstillstånd, uppmäts töjningarna $\varepsilon_1 = -1‰$, $\varepsilon_2 = 0,4‰$, $\varepsilon_3 = 0,4‰$ i riktningarna 1,2 och 3, se figur. Bestäm plåtens tjockleksändring i denna punkt. Plåttjockleken betecknas h, och materialet är elastiskt med elasticitetsmodul E och Poissons tal ν.



Vi har töjningarna i riktningarna $\boldsymbol{n}_1 = (-1, 0)$, $\boldsymbol{n}_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $\boldsymbol{n}_3 = (1/2, -\sqrt{3}/2)$. Dessutom är det plant spänningstillstånd så att $\sigma_z = 0$ är en huvudspänning och därför också $\varepsilon_z = \Delta h/h$ en huvudtöjning. Ansätt alltså en tvådimensionell töjningsmatris

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}.$$

Vi får att

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n} = \varepsilon_x n_x^2 + 2\gamma_{xy} n_x n_y + \varepsilon_y n_y^2,$$

och alltså

$$\varepsilon_x = -10^{-3},$$

$$\frac{1}{4}\varepsilon_x + 2\gamma_{xy}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y = 0.4 \times 10^{-3},$$

$$\frac{1}{4}\varepsilon_x - 2\gamma_{xy}\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_y = 0.4 \times 10^{-3},$$

vilket ger $\varepsilon_y = \dfrac{13}{15} \times 10^{-3}$. Vidare är enligt Hookes lag

$$\left.\begin{array}{rcl} \varepsilon_z & = & -\dfrac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \\ \sigma_x & = & \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y & = & \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta h = \varepsilon_z h = \frac{4\nu h}{3(1-\nu)} \times 10^{-4}.$$