TENTAMEN I HÅLLFASTHETSLÄRA FÖR F (MHA081)

Tid: Måndagen den 6:e mars 2006, klockan 08.30–12.30, i V-huset
Lärare: Peter Hansbo, ankn 1494

Salsbesök av lärare: c:a kl 9.30 och 11.30.
Lösningar: anslås på kurshemsidan tisdag 7/3.
Preliminärt rättningsresultat: anslås på Inst. för tillämpad mekanik senast den 20/3.
Rättningsgranskning: sker på Inst. för tillämpad mekanik 21/3 kl 12.00–13.00.

Tillåtna hjälpmedel:

1. Grundläggande hållfasthetslära av Hans Lundh, KTH Inst. för hållfasthetslära, valfri upplaga.

2. Handbok och formelsamling i hållfasthetslära, Inst. för hållfasthetslära, KTH, valfri upplaga eller utdrag ur denna; vid Inst. för tillämpad mekanik utarbetad formelsamling.

3. Publicerade matematiska, fysiska och tekniska formelsamlingar.

4. Valfri kalkylator i fickformat med tangentbord och sifferfönster i samma enhet.

Egna anteckningar får finnas på befintliga sidor i Grundläggande hållfasthetslära, dock inga lösta exempel. I övrigt tillåts inga egna anteckningar. Om hjälpmedel används vid lösning av problem skall referens och sidhänvisning ges.

Poängbedömning: Uppgifterna kan vardera maximalt ge 5 poäng. Maxpoäng på tentan är 25. För att få poäng måste det skrivna vara läsligt och uppställda ekvationer skall klart motiveras. Vidare skall entydiga beteckningar användas och tydliga figurer ritas. Tänk på att kontrollera dimensioner och rimlighet i svaren.

Betygsgränser	Poäng
3	10–14
4	15–19
5	20–

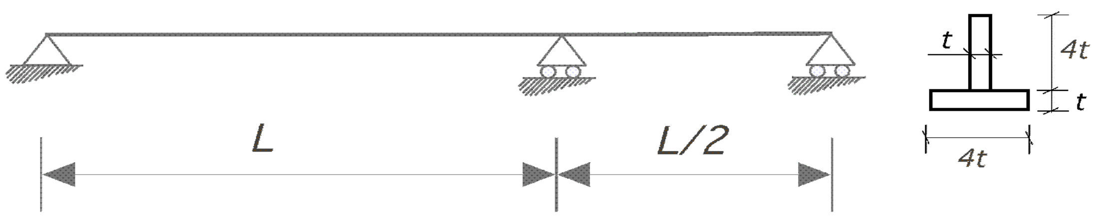
Uppgifterna är **ej** ordnade efter svårighetsgrad. Läs gärna igenom alla uppgifter innan du sätter igång och räknar. Börja sedan med de uppgifter du känner dig säker på.

Räkna lugnt!

Uppgifter

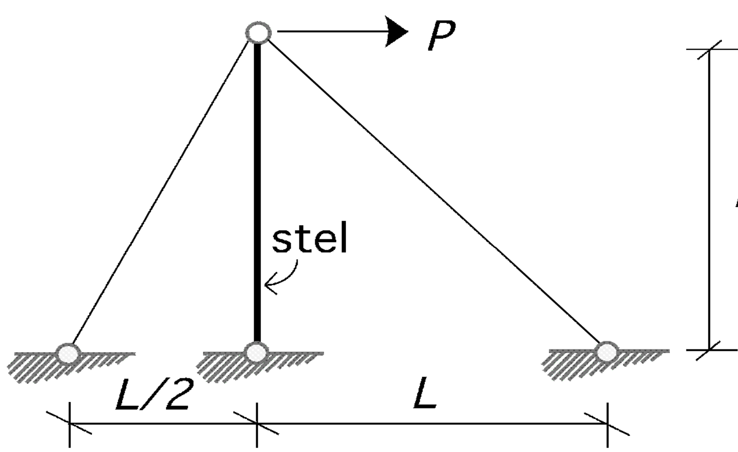
1 En elastisk balk fästs på tre stöd enligt figur (tvärsnitt enligt figur). Beräkna maximala normalspänningen, till tecken och storlek, i balken på grund av dess egenvikt. Vi antar att $g = 9.81$ m/s^2, att $L = 2$ m och $t = 3$ cm, balkens densitet $\rho = 7850$ kg/m^3 och elasticitetsmodul $E = 210$ GPa. Ange svaret i MPa.

(5p)



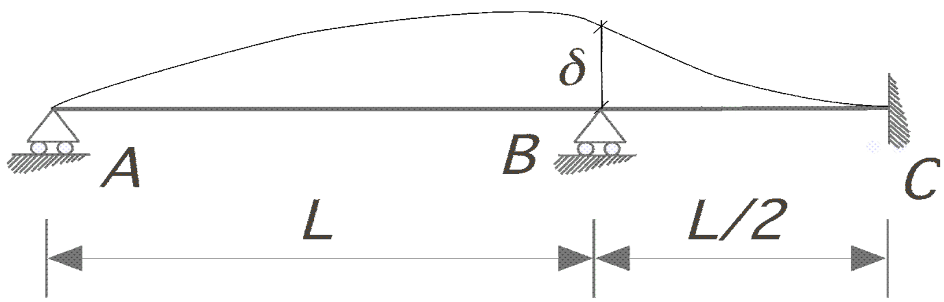
2 Betrakta konstruktionen i nedanstående figur. Den vertikala balken är stel, de båda lutande har samma böjstyvhet EI och axialstyvhet EA. Den vänstra balken är elastisk idealplastisk med sträckgräns σ_S. Bestäm σ_S så att den högra, elastiska, balken böjknäcker vid samma last P som den vänstra plasticerar.

(5p)



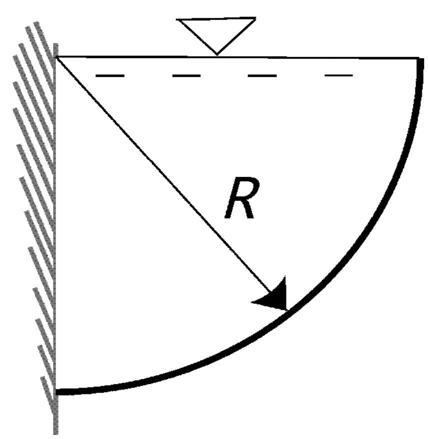
3 En elastisk balk med böjstyvhet EI och längd $3L/2$ är lagrad enligt figur. Stödet vid B utsätts för en (liten) förskjutning sträckan δ uppåt. Bestäm de resulterande momenten $M(x)$ i balken, x räknat från stöd A.

(5p)



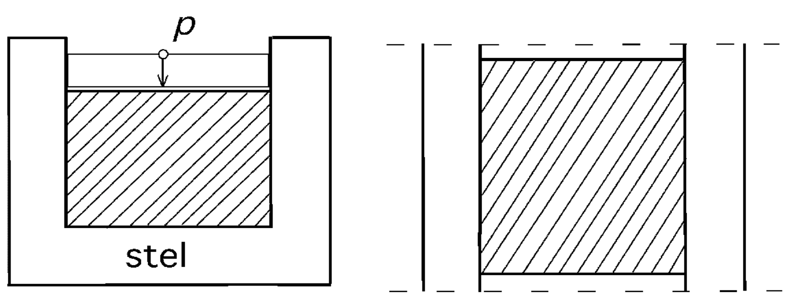
4 En (mycket lång) stupränna som har formen av en kvartscirkel med radie R hålls uppe av kvartscirkelformade balkar på avstånd $4R$ från varandra. Beräkna ytterkantens vertikala förskjutning när stuprännan är full med vatten med densitet ρ. Balkarna har alla samma böjstyvhet EI. (Försumma böjstyvheten hos själva stuprännan. Vattnets vikt antas trycka direkt mot balken.)

(5p)



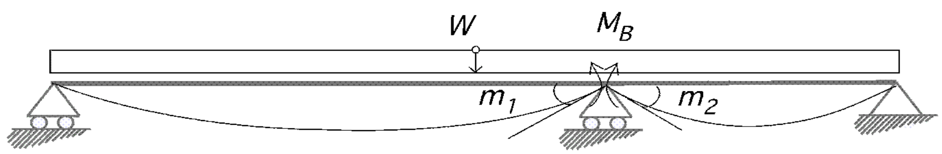
5 Ett block av ett linjärelastiskt material (parametrar E, ν) är med exakt passning placerat i en öppen friktionsfri ränna i en stel kropp. Bestäm den maximala skjuvspänningen i blocket om det belastas med ett tryck p enligt figur.

(5p)



Lösningar, 060306

1 En elastisk balk fästs på tre stöd enligt figur (tvärsnitt enligt figur). Beräkna maximala normalspänningen, till tecken och storlek, i balken på grund av dess egenvikt. Vi antar att $g = 9.81$ m/s^2, att $L = 2$ m och $t = 3$ cm, balkens densitet $\rho = 7850$ kg/m^3 och elasticitetsmodul $E = 210$ GPa. Ange svaret i MPa.



Lösningsförslag: Egenvikten betraktas som en jämnt utbredd last med intensitet W. Beräkna momentet vid stöd B: elementarfall ger

$$m_1 = \frac{M_B L}{3EI} + \frac{WL^3}{24EI}, \quad m_2 = \frac{M_B L}{6EI} + \frac{WL^3}{192EI},$$

villkoret $m_1 = -m_2$ ger

$$M_B = -\frac{3WL^2}{32} \approx 0.094WL^2 \quad \text{(dragen ovansida).}$$

Det inses att maximalt fältmoment uppnås i vänstra balkhalvan. Jämvikt ger uppåtriktad stödreaktion $R_A = 13WL/32$, och momentet i balken ges av $M(x) = Wx^2/2 - 13WLx/32$ med extremvärde

$$M(13L/32) = \frac{-169WL^2}{2048} \approx -0.083WL^2 \quad \text{(dragen undersida).}$$

Störst absolutvärde på momentet får man alltså över stödet. Tvärsnittets tyngdpunkt ligger sträckan

$$c = \frac{4t^2 \times \frac{t}{2} + 4t^2 \times 3t}{4t^2 + 4t^2} = \frac{7t}{4}$$

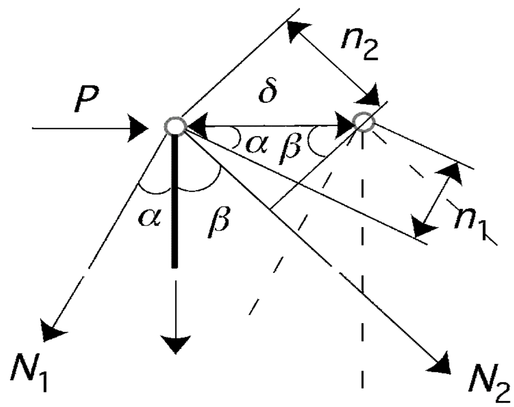
från underkant balk. Alltså är $z_{\max} = 13t/4$ vid överkant balk. Yttröghetsmomentet ges av

$$I = \frac{t(4t)^3}{12} + 4t^2 \times (3t - 7t/4)^2 + \frac{4t^4}{12} + 4t^2 \times (7t/4 - t/2)^2 = \frac{109t^4}{6}$$

Slutligen får vi, med $W = 8\rho\, g\, t^2$,

$$\sigma_{\max} = \left|\frac{M_B z_{\max}}{I}\right| = \frac{\frac{24\rho g t^2 L^2}{32}\frac{13t}{4}}{\frac{109t^4}{6}} \approx 1.38 \text{ MPa} \quad \text{(dragspänning).}$$

2 Betrakta konstruktionen i nedanstående figur. Den vertikala balken är stel, de båda lutande har samma böjstyvhet EI och axialstyvhet EA. Den vänstra balken är elastisk–idealplastisk med sträckgräns σ_S. Bestäm σ_S så att den högra, elastiska, balken böjknäcker vid samma last P som den vänstra plasticerar.



Lösningsförslag: Horisontell jämvikt ger att

$$P = N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\beta = \frac{N_1}{\sqrt{5}} - \frac{N_2}{\sqrt{2}}.$$

Ur geometrin har vi (med tecken) att

$$n_1 = \delta \sin\alpha = \frac{\delta}{\sqrt{5}} \text{ (utdragen)}, \quad n_2 = -\delta \sin\beta = -\frac{\delta}{\sqrt{2}} \text{ (hoptryckt)}.$$

Materialsamband:

$$n_1 = \frac{N_1 L\sqrt{5}}{2EA}, \quad n_2 = \frac{N_2 L\sqrt{2}}{EA},$$

alltså

$$5N_1 = -4N_2 \;\Rightarrow\; N_1 = \frac{40P}{25\sqrt{2}+8\sqrt{5}},\; N_2 = -\frac{50P}{25\sqrt{2}+8\sqrt{5}}.$$

Kraften som behövs för att nå sträckgränsen i stång 1 är alltså

$$P_s = \frac{25\sqrt{2}+8\sqrt{5}}{40}\sigma_s A,$$

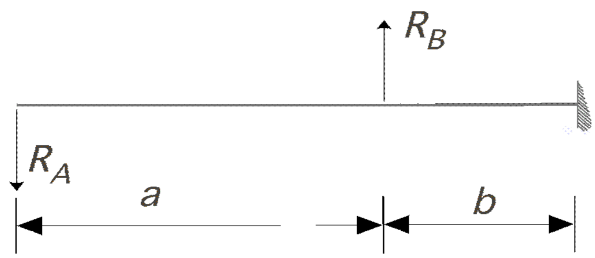
och

$$N_2^{\mathrm{kr}} = \frac{\pi^2 EI}{(L\sqrt{2})^2} = \frac{50P_s}{25\sqrt{2}+8\sqrt{5}} = \frac{5}{4}\sigma_s A,$$

så att vi slutligen har

$$\sigma_s = \frac{4\pi^2 EI}{10L^2 A}.$$

3 En elastisk balk med böjstyvhet EI och längd $3L/2$ är lagrad enligt figur. Stödet vid B utsätts för en (liten) förskjutning sträckan δ uppåt. Bestäm de resulterande momenten $M(x)$ i balken, x räknat från stöd A.



Lösningsförslag: Kraften som kräv för att förskjuta balken sträckan δ vid $x = L$ kallas R_B. Ur elementarfall får vi, med beteckningen l för balkens längd,

$$\delta = R_B \frac{a^2 b^3}{12EIl^2}\left(4 - \frac{b}{3l}\right) \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{11 R_B L^3}{648EI}.$$

$$R_A = R_B \frac{b^2}{2l^2}\left(3 - \frac{b}{l}\right) = \frac{4}{27} R_B = \frac{96}{11} EI\delta.$$

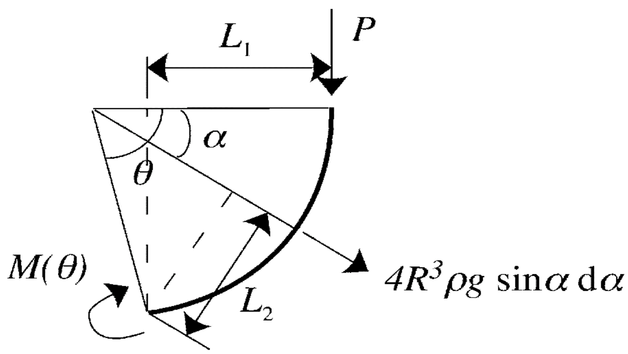
För $0 \leq x \leq L$ får vi alltså

$$M(x) = R_A x = \frac{96EI}{11L^3}\delta x$$

och för $L \leq x \leq 3L/2$

$$M(x) = R_A x - R_B(x - L) = \frac{24EI}{11L^3}\delta\,(27L - 23x).$$

4 En (mycket lång) stupränna som har formen av en kvartscirkel med radie R hålls uppe av kvartscirkelformade balkar på avstånd $4R$ från varandra. Beräkna ytterkantens vertikala förskjutning när stuprännan är full med vatten med densitet ρ. Balkarna har alla samma böjstyvhet EI. (Försumma böjstyvheten hos själva stuprännan. Vattnets vikt antas trycka direkt mot balken.)



Lösningsförslag: Trycket på ett litet vinkelsegment $d\alpha$ ger upphov till en kraft

$$dF = 4\rho g R^3 \sin\alpha \, d\alpha$$

som är riktad vinkelrät mot kvartscirkeln. Inför dessutom en fiktiv kraft P som verkar i den sökta förskjutningens riktning.

Hävarmarna $L_1 = R(1 - \cos\theta)$ och $L_2 = R\sin(\theta - \alpha)$, varför momentet $M(\theta)$ ges av:

$$M(\theta) = PR(1-\cos\theta) + \int_0^\theta 4\rho g R^3 \sin\alpha R \sin(\theta-\alpha)\, d\alpha = PR(1-\cos\theta) + 2\rho g R^4(\sin\theta - \theta\cos\theta).$$

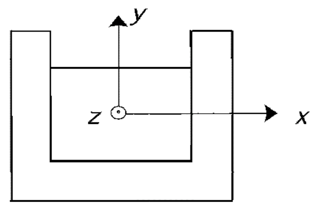
Clapeyrons sats ger att

$$\delta = \frac{\partial}{\partial P}\int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI} R\, d\theta = \frac{2\rho g R^6}{EI}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta - \theta\cos\theta)(1-\cos\theta)\, d\theta$$

och

$$\delta = \frac{20 - 8\pi + \pi^2}{16}\frac{\rho g R^6}{EI} \approx 0.148\frac{\rho g R^6}{EI}.$$

5 Ett block av ett linjärelastiskt material (parametrar E, ν) är med exakt passning placerat i en öppen friktionsfri ränna i en stel kropp. Bestäm den maximala skjuvspänningen i blocket om det belastas med ett tryck p enligt figur.

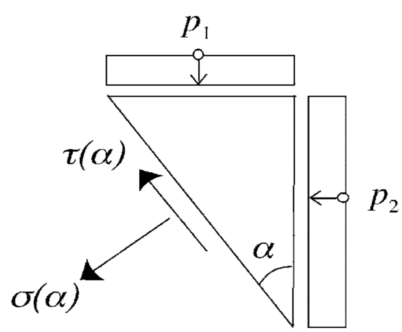


Lösningsförslag: Vi har med axlar enligt figur att $\sigma_z = 0$, $\sigma_y = -p$ och $\varepsilon_x = 0$. Hookes lag säger att

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right)$$

så att $\sigma_x = -\nu p$. Alltså är huvudspänningarna

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -\nu p, \ \sigma_3 = -p.$$



Ur figuren har vi att i ett givet plan är

$$\tau \sin\alpha + \sigma\cos\alpha + p_2\cos\alpha = 0 \quad \text{(horisontell jämvikt)}$$

$$\tau\cos\alpha - \sigma\sin\alpha - p_1\sin\alpha = 0 \quad \text{(vertikal jämvikt)}$$

och alltså

$$\tau = \frac{p_2 - p_1}{2}\sin 2\alpha, \quad |\tau^{\max}| = \frac{1}{2}|p_2 - p_1|.$$

Störst skjuvspänning fås följaktligen i planet med största och minsta huvudspänning, alltså $p_1 = 0, p_2 = p$ och

$$|\tau^{\max}| = \frac{p}{2}.$$